Топологический анализ пространства параметров в задачах выбора мультимоделей

Адуенко Александр

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

24 июня 2015 года

Цели исследования

Цель исследования: создать метод выбора мультимоделей при построении моделей банковского кредитного скоринга.

Мотивация: Логистическая модель является де-факто стандартом в банковском скоринге, мультимодели являются интерпретируемым обобщением, позволяющим учитывать неоднородности в данных.

Проблема: мультимодель может содержать большое число похожих моделей, что ведет к ее неинтерпретируемости и низкому качеству прогноза. Признаковые пространства моделей могут не совпадать, в частности иметь разную размерность.

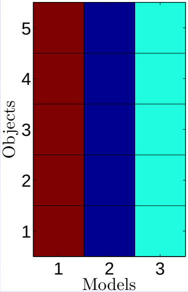
Метод решения задачи: анализ пространства параметров мультимодели с помощью введенной функции сравнения моделей.

Мультимодели: Смеси моделей и многоуровневые модели

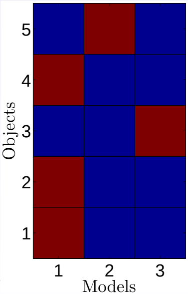
Смесь регрессионных моделей — регрессионная модель вида

$$f = \sum_{k=1}^{K} \pi_k f_k(\mathbf{w}_k), \text{ где}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1,\ \pi_k \geq 0.$$



Многоуровневая регрессионная модель — набор регрессионных моделей f_k, $k = 1, \ldots, K$ такой, что при разбиении множества индексов объектов $\mathcal{I} = \sqcup_{k=1}^{K} \mathcal{I}_k$ для всех объектов с индексами из $\mathcal{I}_k$ используется модель f_k.



Вероятностная модель, соответствующая смеси моделей

Гипотеза порождения данных:

- Сэмплируем веса $(\pi_1, \ldots, \pi_K)$ моделей из некоторого априорного распределения, $\boldsymbol{\pi} \sim q(\boldsymbol{\pi}|\alpha)$.
- Сэмплируем параметры каждой из моделей из некоторого априорного распределения $\mathbf{w}_j \sim p_j(\mathbf{w}_j)$.
- Для каждого объекта $\mathbf{x}_i$ выбираем модель m_i, которой он описывается, причем $p(m_i = k) = \pi_k$.
- Для каждого объекта $\mathbf{x}_i$ определяем значение целевой переменной y_i в соответствии с моделью m_i: $y_i \sim \mathrm{Be}(f_{m_i}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_{m_i}))$.

Совместное распределение для мультимодели

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X}) =$$
$$q(\boldsymbol{\pi}|\alpha) \prod_{j=1}^{n} p_j(\mathbf{w}_j) \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{K} \pi_k f_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_k)^{y_i} (1 - f_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_k))^{1-y_i} \right).$$

Условие оптимальности и адекватности мультимодели

Определение 1. Будем называть мультимодель, заданную совместным распределением $p(\mathbf{y},\, \mathbf{w}_1,\, \ldots,\, \mathbf{w}_K,\, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X})$ $(s,\, \alpha)$-**адекватной**, если модели, ее составляющие, являются попарно статистически различимыми с помощью функции близости s на уровне значимости α.
Множество всех $(s,\, \alpha)$-адекватных моделей обозначим $\mathcal{M}_{s,\,\alpha}$.
Определение 2. Будем называть мультимодель **оптимальной**, если она обладает наибольшей обоснованностью

$$[q(\pi|\alpha),\, p_1(\mathbf{w}_1),\, \ldots,\, p_K(\mathbf{w}_K)] = \operatorname*{arg\,max}_{q,\, p_1,\, \ldots,\, p_K} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = \operatorname*{arg\,max}_{q,\, p_1,\, \ldots,\, p_K} \int p(\mathbf{y},\, \mathbf{w}_1,\, \ldots,\, \mathbf{w}_K,\, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X}) d\mathbf{w}_1 \ldots d\mathbf{w}_K d\boldsymbol{\pi}.$$

Оценка максимума апостериорной вероятности для параметров и весов мультимодели

$$[\boldsymbol{\pi},\, \mathbf{w}_1,\, \ldots,\, \mathbf{w}_K] = \operatorname*{arg\,max}_{\boldsymbol{\pi},\, \mathbf{w}_1,\, \ldots,\, \mathbf{w}_K} p(\boldsymbol{\pi},\, \mathbf{w}_1,\, \ldots,\, \mathbf{w}_K|\mathbf{X},\, \mathbf{y}).$$

EM-алгоритм для смеси логистических моделей

Совместное распределение для смеси моделей

Введем скрытые переменные $\{z_{ik}\}$, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{K} z_{ik} = 1$ и $z_{ik} = 1$ означает, что объект $(\mathbf{x}_i,\, y_i)$ относится к модели k.

$$p(\boldsymbol{\pi}|\alpha) = \begin{cases} 0, \ \min\limits_k \pi_k = 0, \\ \dfrac{\Gamma(K\alpha)}{\Gamma^K(\alpha)} \prod\limits_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha-1}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$p(\mathbf{y},\, \mathbf{Z},\, \boldsymbol{\pi},\, \mathbf{w}_1,\, \dots,\, \mathbf{w}_K|\mathbf{X},\, \mathbf{A}_1,\, \dots,\, \mathbf{A}_K) = \prod_{k=1}^{K} p_k(\mathbf{w}_k|\mathbf{0},\, \mathbf{A}_k^{-1})$$
$$\frac{\Gamma(K\alpha)}{\Gamma^K(\alpha)} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{K} \{\pi_k f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_k)^{y_i}(1 - f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_k))^{1-y_i}\}^{z_{ik}}.$$

Е-шаг

$$\gamma_{ik} = \mathsf{E} z_{ik} = \frac{\pi_k f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_k)^{y_i}(1 - f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_k))^{1-y_i}}{\sum_{j=1}^{K} \pi_j f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_j)^{y_i}(1 - f(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{w}_j))^{1-y_i}}.$$

M-шаг

$$\tilde{l}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K|\mathbf{X}) = \mathsf{E}_{\mathbf{Z}}[-\log L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Z}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K|\mathbf{X})] =$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K}\gamma_{ik}\{\log\pi_k + y_i\log(f(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{w}_k)) + (1-y_i)\log(1-f(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{w}_k))\}$$

$$+\sum_{k=1}^{K}(\alpha-1)\log\pi_k + \sum_{k=1}^{K}\log N(\mathbf{w}_k|\mathbf{0},\ \mathbf{A}_k^{-1}) + \text{const}.$$

$$\pi_k = \begin{cases} 0,\ \sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik} + \alpha - 1 < 0, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} + \alpha - 1}{\sum_{l:\gamma_{il}+\alpha-1>0}\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_{il} + \alpha - 1\right)}, \text{ иначе.} \end{cases}.$$

$$\tilde{l}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X}, \mathbf{y}) = -\sum_{k=1}^{K}\{\log\pi_k\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}\} + \sum_{k=1}^{K}\tilde{l}_k(\mathbf{w}_k|\mathbf{X},\ \mathbf{y}).$$

$$\frac{\partial\tilde{l}_k}{\partial\mathbf{w}_k} = \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Gamma}_k(\mathbf{f}-\mathbf{y}) + \mathbf{A}_k\mathbf{w}_k,$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_k\mathbf{X} + \mathbf{A}_k,$$

$$\mathbf{R}_k = \operatorname{diag}(\gamma_{ik}f(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_k)f(-\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_k)).$$

Постановка задачи сравнения моделей

- Пусть f_1 и f_2 две модели, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ – векторы параметров моделей f_1 и f_2;
- Выборки $(\mathbf{X}_1, \mathbf{y}_1)$ и $(\mathbf{X}_2, \mathbf{y}_2)$, $y_{1,i} = f_1(\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{w}_1)$, $y_{2,i} = f_2(\mathbf{x}_{2,i}, \mathbf{w}_2)$;
- Априорные распределения на параметры моделей $\mathbf{w}_1 \sim p_1(\mathbf{w})$, $\mathbf{w}_2 \sim p_2(\mathbf{w})$;
- Апостериорные распределения $p(\mathbf{w}_1|\mathbf{X}_1, \mathbf{y}_1)$ и $p(\mathbf{w}_2|\mathbf{X}_2, \mathbf{y}_2)$ есть $g_1(\mathbf{w})$ и $g_2(\mathbf{w})$ соответственно.

Требуется: построить функцию близости, определенную на паре распределений $g_1(\mathbf{w})$ и $g_2(\mathbf{w})$. Требования к функции близости изложены далее.

Требования к функии сходства s

Требования

1. Определена в случае несовпадения носителей.
2. $s(g_1, g_2) \leq s(g_1, g_1)$.
3. $s \in [0, 1]$.
4. $s(g_1, g_1) = 1$.
5. Близка к 1, если $g_2(\mathbf{w})$ малоинформативное распределение.
6. Симметрична: $s(g_1, g_2) = s(g_2, g_1)$.

Теорема

Расстояния Кульбака-Лейблера, Хеллингера, Дженсона-Шеннона, Бхаттачарайа не удовлетворяют требованиям к функции сходства распределений.

Расстояние Кульбака-Лейблера и Дженсона-Шеннона

Случай 1, 2

Расстояние Кульбака-Лейблера и Дженсона-Шеннона

$$D_{KL}(g_1,\, g_2) = \int g_1(\mathbf{w}) \log \frac{g_1(\mathbf{w})}{g_2(\mathbf{w})} d\mathbf{w}$$

$D_{JS}(g_1,\, g_2) = \frac{1}{2} D_{KL}(g_1,\, \frac{1}{2}(g_1 + g_2)) + \frac{1}{2} D_{KL}(g_2,\, \frac{1}{2}(g_1 + g_2))$ не удовлетворяют требованиям к функции сходства.

Доказательство

1. $D_{KL} = \infty$, если $g_1(x) \neq 0,\ g_2(x) = 0$ на множестве ненулевой меры относительно g_1.
2. $D_{KL}(g_1,\, g_2) \neq D_{KL}(g_2,\, g_1)$.
3. $D_{KL} \to \infty$, например, для пары нормальных распределений $N(0,\, 1)$ и $N(0,\, \sigma^2)$ при $\sigma^2 \to \infty$.
4. $D_{JS} \not\to 0$, например, для пары нормальных распределений $N(0,\, 1)$ и $N(0,\, \sigma^2)$ при $\sigma^2 \to \infty$.

Случай 3, 4

Расстояние Хеллингера и Бхаттачарайа

$$D_H(g_1,\ g_2) = 1 - \int \sqrt{g_1(\mathbf{w})g_2(\mathbf{w})}d\mathbf{w}$$

$D_B(g_1,\ g_2) = -\log \int \sqrt{g_1(\mathbf{w})g_2(\mathbf{w})}d\mathbf{w}$ не удовлетворяют требованиям к функции сходства.

Доказательство

Обе меры не имеют требуемого свойства для малоинформативных распределений:

$$D_H(g_1,\ g_2) \to 1,\ D_B(g_1,\ g_2) \to \infty.$$

В качестве меры сходства распределения предлагается мера сходства s-score:

$$s(g_1,\ g_2) = \frac{\int_{\mathbf{w}} g_1(\mathbf{w})g_2(\mathbf{w})d\mathbf{w}}{\max_{\mathbf{b}} \int_{\mathbf{w}} g_1(\mathbf{w}-\mathbf{b})g_2(\mathbf{w})d\mathbf{w}}.$$

Теорема 1 (Адуенко, 2014). Предлагаемая функция сходства удовлетворяет всем требованиям к функции сходства.

Примеры:

$g_1(\mathbf{w})$	$g_2(\mathbf{w})$	$s(g_1,\ g_2)$
$U[0,\ 1]$	$U[0.5,\ 1.5]$	0.5
$U[0,\ 1]$	$U[0.,\ 1.]$	1
$N(0,\ 1)$	$N(10, 10^{10})$	1

Выражение для $s(g_1,\ g_2)$ для пары нормальных распределений

Теорема 2 (Адуенко, 2014)
Пусть $g_1 = N(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{\Sigma}_1)$, $g_2 = N(\mathbf{v}_2,\ \mathbf{\Sigma}_2)$. Тогда выражение для $s(g_1,\ g_2)$ имеет вид

$$s(g_1,\ g_2) =$$
$$\exp\Big[\tfrac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{v}_2)^{\mathsf{T}}(\mathbf{\Sigma}_1^{-1} + \mathbf{\Sigma}_2^{-1})^{-1}(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{v}_2) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{v}_2\Big].$$

Следствие 1 В случае $\mathbf{\Sigma}_2 = \mathbf{0}$ выражение для s-score

$$s(g_1,\ g_2) = \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\right].$$

Следствие 2 (упрощение выражения для s-score).
Для случае пары нормальных распределений параметров выражение для s-score имеет следующий вид

$$s(g_1,\ g_2) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^{\mathsf{T}}(\mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_2)^{-1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right).$$

Распределение s-score в условии истинности гипотезы о совпадении моделей

Теорема 3 (Адуенко, 2014) Пусть

- Модели f_1 и f_2 совпадают, то есть $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$.
- Апостериорное распределение $\mathbf{w}_1$, полученное по $(\mathbf{X}_1,\, \mathbf{y}_1)$, есть $\hat{\mathbf{w}}_1 \sim N(\mathbf{w}_1|\mathbf{w},\, \mathbf{\Sigma}_1)$
- $m_2 = \infty$, откуда $\hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{w}$.

Тогда выражение для s-score двух моделей имеет вид

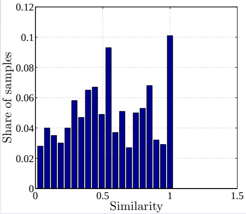
$$s(g_1,\, g_2) = \exp\left[-1/2(\hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w})^{\mathsf{T}} \mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w})\right],$$

причем $s \sim \exp\left[-1/2\xi\right]$, где $\xi \sim \chi^2(n)$, n – число признаков.
Следствие 1. Для случая $n = 2$ s-score имеет равномерное распределение на отрезке $[0,\, 1]$.

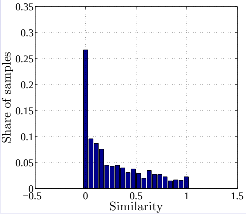
Иллюстрация применения s-score для сравнения двух моделей, $\rho = 0.9$

Рассмотрим две близкие в терминах $\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|$ модели, $\|\mathbf{w}_1\| = \|\mathbf{w}_2\| = 1$, $\mathrm{corr}(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2) = \rho$.

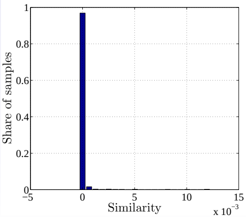
$N_1 = 10000,\ N_2 = 10$



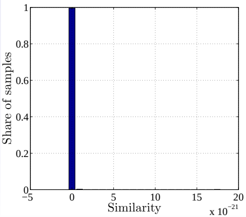
$N_1 = 10000,\ N_2 = 100$



$N_1 = 10000,\ N_2 = 1000$



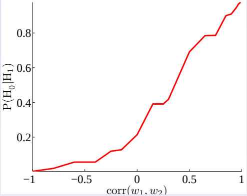
$N_1 = 10000,\ N_2 = 10000$



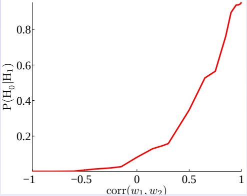
Зависимость $\mathsf{P}(H_0|H_1)$ от корреляции между истинными параметрами двух моделей.

Рассмотрим две близкие в терминах $\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|$ модели, $\|\mathbf{w}_1\| = \|\mathbf{w}_2\| = 1,\ \mathrm{corr}(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2) = \rho$.

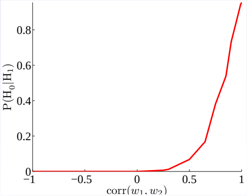
$N_1 = 10000,\ N_2 = 30$



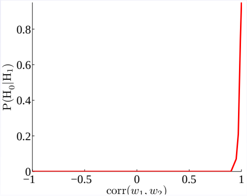
$N_1 = 10000,\ N_2 = 50$



$N_1 = 10000,\ N_2 = 100$



$N_1 = 10000,\ N_2 = 1000$



Обобщение теоремы о распределении s-score на случай двух конечных выборок

Теорема 4 (Адуенко, 2014). Пусть для ковариационных матриц параметров моделей имеем $\mathbf{\Sigma}_2 \ll \mathbf{\Sigma}_1$, то есть $\|\mathbf{\Sigma}_2\| \cdot \|\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\| \ll 1$. Тогда

$$2\log(s(g_1,\, g_2)) \xrightarrow{\text{с.к.}} -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}) \ \text{ при } \|\mathbf{\Sigma}_2\| \to 0,$$

$$s(g_1,\, g_2) \xrightarrow{p} \exp(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})) \ \text{ при } \|\mathbf{\Sigma}_2\| \to 0.$$

Следствие 1. При выполнении условий теоремы выполнено

$$2\log(s(g_1,\, g_2)) \xrightarrow{p} -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w})^{\mathsf{T}}\mathbf{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}) \ \text{ при } \|\mathbf{\Sigma}_2\| \to 0.$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы выполнено

$$-2\log(s(g_1,\, g_2)) \xrightarrow{d} \chi^2(n) \ \text{ при } \|\mathbf{\Sigma}_2\| \to 0, \text{ где}$$

n – число признаков в модели.

Теорема 5 (Адуенко, 2014). Пусть модели, задаваемые $(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ считаются разными, если

$$s\left(N(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1), N(\mathbf{v}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)\right) \leq C \in (0, 1).$$

Тогда, если указанные модели разные по приведенному критерию, то

- Модели, задаваемые $(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \mathbf{O})$ будут разными согласно приведенному критерию.
- Модели, задаваемые $(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \lambda\boldsymbol{\Sigma}_2)$, $\lambda \in [0, 1]$ будут разными согласно приведенному критерию.

Теорема 6 (Адуенко, 2014). Пусть рассматриваются K моделей с $\|\mathbf{v}_1\| = \ldots = \|\mathbf{v}_K\| = \lambda_1 > 0$ и $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \ldots = \boldsymbol{\Sigma}_K = \lambda_2\mathbf{I}$. В качестве критерия отличимости моделей рассматривается следующий: модели с номерами $i \neq j$ разные, если

$$s\left(N(\mathbf{v}_i,\, \boldsymbol{\Sigma}_i),\, N(\mathbf{v}_j,\, \boldsymbol{\Sigma}_j)\right) \leq C \in (0,\, 1).$$

Тогда максимальное число попарно различимых моделей, которое может быть в наборе, есть

$$K_{\max} = \sqrt{\pi}\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{1}{\int_0^{\theta/2}\sin^{n-2}\varphi d\varphi},$$

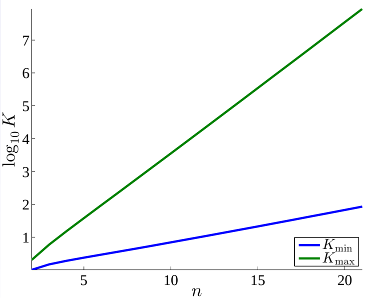
Здесь $\theta \in [0,\, \pi]$, $\cos\theta = \rho = \max(-1,\, 1 + 2\lambda_2/\lambda_1^2 \ln C)$, n – размерность признакового пространства. При этом можно построить K_{min} попарно различимых моделей, где

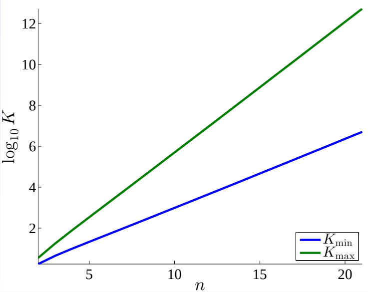
$$K_{\min} = \sqrt{\pi}\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{1}{\int_0^{\theta}\sin^{n-2}\varphi d\varphi},$$

Теорема 6 (продолжение) При C, близком к 1, имеем

$$K_{\max} \approx \sqrt{\pi}\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

$$K_{\min} \approx \sqrt{\pi}\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}.$$





Публикации по теме

1. Адуенко А. А. Выбор признаков и шаговая логистическая регрессия для задачи кредитного скоринга // Машинное обучение и анализ данных, 2012. № 3. С. 279–291.
2. Адуенко А. А., Кузьмин А. А., Стрижов В. В. Выбор признаков и оптимизация метрики при кластеризации коллекции документов // Известия ТулГУ, 2012. № 3. С. 119–131.
3. Адуенко А. А., Стрижов В. В. Алгоритм оптимального расположения названий коллекции документов // Программная инженерия, 2013. № 3. С. 21–25.
4. Иванова А. В., Адуенко А. А., Стрижов В. В. Алгоритм построения логических правил при разметке текстов // Программная инженерия, 2013. № 6. С. 41–45.
5. Адуенко А. А., Стрижов В. В. Совместный выбор объектов и признаков в задачах многоклассовой классификации коллекции документов // Инфокоммуникационные технологии, 2014. № 1. С. 47–53.
6. А. А. Кузьмин, А. А. Адуенко, В. В. Стрижов Тематическая классификация тезисов крупной конференции с использованием экспертной модели // Информационные технологии, 2014. № 6.

Заключение

- Предложен метод отбора объектов и его эффективное обобщение на случай смесей и многоуровневых моделей.
- Предложен алгоритм отбора признаков, основанный на оценке ковариационной матрицы параметров с помощью максимизации обоснованности модели.
- Построена функция s-score, которая позволяет оценить близость двух моделей. Доказаны асимптотические свойства сходимости $s(g_1, g_2)$ и $\log(s(g_1, g_2))$.
- С помощью введенной s-score получены верхняя и нижняя оценка на число попарно различимых моделей.

Дальнейшие планы

- Рассмотреть структурные ограничения на ковариационную матрицу в алгоритме отбора признаков.
- Обобщить отбор признаков на многоклассовый случай
- Доказать свойства асимптотической сходимости при условии неизвестных Σ_1 и Σ_2
- Получить оценки на число моделей в случае недиагональных ковариационных матриц моделей.