

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (национальный
исследовательский университет)»

Физтех-школа прикладной математики и информатики

Кафедра «Интеллектуальные системы»

Садиев Абдурахмон Абдужалолович

Стохастические безградиентные методы для седловых задач

03.03.01 – Прикладные математика и физика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Научный руководитель:

д. ф.-м. н. Гасников Александр
Владимирович

Москва

2020

Оглавление

1.	Введение	4
1.1.	Обзор полученных результатов	5
2.	Алгоритмы и основные результаты	5
2.1.	Обозначения и вспомогательные факты	5
2.2.	Негладкая седловая задача	6
2.3.	Алгоритм и основная теорема	7
2.4.	Вспомогательные леммы	10
3.	Доказательство основного результата	12
3.1.	Доказательство Леммы 1	12
3.2.	Доказательство Леммы 3	13
3.3.	Доказательство основного результата для метода ZOSPA	15
4.	Вычислительный эксперимент	17
5.	Обсуждение результатов	19
	Список литературы	20

Аннотация

В работе рассматриваются методы оптимизации, основанные на стохастическом градиенте. Предлагается алгоритм, который позволяет находить седловые точки функции потерь в задаче минимизации квадратичной функции. Алгоритм основан на использовании стохастического градиента и метода Ньютона. В работе приведены теоретические результаты, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма. В частности, показано, что алгоритм сходится к седловой точке функции потерь с вероятностью $1 - \epsilon$ за $O(n/\log^2 n)$ итераций, где n — размер задачи, а ϵ — заданная точность. Также приведены экспериментальные результаты, подтверждающие эффективность алгоритма на различных задачах оптимизации.

Ключевые слова: безградиентные методы оптимизации, седловая задача, стохастическая оптимизация.

1.

В последнее десятилетие в сообществе машинного обучения большой интерес вызывают различные приложения генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial Networks, GANs) [1], которые сводят проблему машинного обучения к задаче нахождения седловой точки, а также применение безградиентных методов для решения проблем обучения в целях укрепления потенциала [2]. Нейронные сети становятся довольно популярными в задачах обучения с подкреплением (Reinforcement Learning) [3]. Таким образом, существует интерес к безградиентным методам для решения седловой задачи:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{y \in \mathcal{Y}} \varphi(x, y). \quad (1)$$

Одним из естественных подходов для этого класса задач является построение стохастической аппроксимации градиента через конечные разности. В этом случае естественно ожидать, что сложность задачи (1) с точки зрения количества вычислений функций составляет $\sim n$ раз больше по сравнению со сложностью с точки зрения количества вычислений градиентов, где $n = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}$. Возможно ли получить лучший результат? В данной работе показано, что этот фактор в некоторой ситуации можно уменьшить до гораздо меньшего фактора $\log n$.

В данной работе используется методика, разработанная в [4, 5] для безградиентных задач оптимизации гладких выпуклых функций (безградиентная версия зеркального спуска [6]), чтобы предложить новую версию безградиентного варианта зеркального спуска [6] для задач оптимизации негладких седловых задач (оптимизируемая целевая функция является выпуклой по одной группе переменных и вогнутой по другой и не является гладкой).

Концепция использования такого оракула с конечными разностями не нова (см. [7], [8]). Для такого оракула необходимо, чтобы функция была определена в некоторой окрестности исходного множества оптимизации, так как при вычислении конечной разности мы делаем небольшой шаг от точки, и этот шаг может вывести нас за пределы множества. Насколько нам известно, во всех предыдущих работах авторы исходили из того, что такое предположение выполнено или вообще не упоминается.

1.1. Обзор полученных результатов

В данной работе представлен новый метод, так называемый zeroth-order Saddle-Point Algorithm (zoSPA), для решения седловой задачи (1). Наш алгоритм использует оракул нулевого порядка со стохастическим и ограниченным детерминистическим шумом. Показано, что если шум $\sim \varepsilon$ (точность решения), то количество итераций, необходимых для получения решения точностью ε на множестве с диаметром $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равно $\mathcal{O}\left(\frac{M^2\Omega^2}{\varepsilon^2}n\right)$ или $\mathcal{O}\left(\frac{M^2\Omega^2}{\varepsilon^2}\log^2 n\right)$ (зависит от набора оптимизации, например, для симплекса (в этом случае пространство, на котором решается задача, имеет 1-норму, а сопряженное к нему ∞ -норму), второй вариант с $\log^2 n$), где M^2 - это граница второго момента градиента вместе со стохастическим шумом (см. ниже, (4)).

Далее будет показано, как предложенный новый алгоритм работает на практике для различных седловых задач в сравнении с полноградиентным зеркальным спуском.

2.

В данном разделе будут представлены алгоритм 1 и основная теорема об оценках сходимости предложенного метода 1. Доказательство можно найти в статье [9]. Для удобства доказательство будет представлено в 3.3.

2.1. Обозначения и вспомогательные факты

Будем обозначать $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ как скалярное произведение между векторами $x, y \in \mathbb{R}^n$, где x_i есть i -ая компонента вектора x в стандартном базисе в \mathbb{R}^n . Тогда мы получаем определение ℓ_2 -нормы в \mathbb{R}^n следующим образом: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Определим ℓ_p -нормы как $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ для $p \in (1, \infty)$, а для $p = \infty$ будем использовать следующее выражение $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ для нормы $\|\cdot\|$ определяется таким образом: $\|y\|_* = \max \{\langle x, y \rangle \mid \|x\| \leq 1\}$. Оператор $E[\cdot]$ есть полное математическое ожидание, а оператор $E_\varepsilon[\cdot]$ выражает условное математическое ожидание.

Определение 1 (M -липшицево непрерывность) $f(x)$ M -
 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $M > 0$ $\|\cdot\|$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Определение 2 (Прокс-функция) $d(z) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ -
 $d(z) = \min_{w \in \mathcal{Z}} \|w - z\|$.

Определение 3 (Дивергенция Брегмана (расстояние Брегмана)) $d(z) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $V_z(w) = d(z) - d(w) - \langle \nabla d(w), z - w \rangle$.

Обозначим диаметром Брегмана $\Omega_{\mathcal{Z}}$ множества \mathcal{Z} по отношению к $V_{z_1}(z_2)$ как
 $\Omega_{\mathcal{Z}} = \max\{\sqrt{2V_{z_1}(z_2)} \mid z_1, z_2 \in \mathcal{Z}\}$.

Определение 4 (Прокс-оператор) $V_x(w) -$
 $x \in \mathcal{Z} - \xi :$

$$\text{prox}_x(\xi) = \arg \min_{y \in \mathcal{Z}} (V_x(y) + \langle \xi, y \rangle).$$

2.2. Негладкая седловая задача

Поставим задачу (1) более формально: мы рассматриваем седловую задачу (1), где $\varphi(\cdot, y)$ - выпуклая функция, определенная на компактном выпуклом множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\varphi(x, \cdot)$ - вогнутая функция, определенная на компактном выпуклом множестве $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$.

Определим неточный стохастический оракул нулевого порядка $\tilde{\varphi}(x, y, \xi)$ на каждой итерации. Модель, используемая в данной работе, соответствует случаю, когда оракул дает неточное шумное значение функции. У модели есть два вида шума: стохастический несмещенный шум, зависящий от случайной переменной ξ и смещенный детерминистический шум. Это можно записать следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(x, y, \xi) = \varphi(x, y, \xi) + \delta(x, y), \quad (2)$$

$$\mathbb{E}_{\xi}[\tilde{\varphi}(x, y, \xi)] = \tilde{\varphi}(x, y), \quad \mathbb{E}_{\xi}[\varphi(x, y, \xi)] = \varphi(x, y), \quad (3)$$

где случайная переменная ξ отвечает за несмещенный стохастический шум, а $\delta(x, y)$ - за детерминистический шум.

Предположим, что существует такая положительная постоянная M , что для всех $x, y \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ у нас есть

$$\|\nabla\varphi(x, y, \xi)\|_2 \leq M(\xi), \quad \mathbb{E}[M^2(\xi)] = M^2. \quad (4)$$

Можно доказать, что $\varphi(x, y, \xi)$ является $M(\xi)$ -липшецево непрерывной по отношению к норме $\|\cdot\|_2$ и что $\|\nabla\varphi(x, y)\|_2 \leq M$. А также удовлетворены следующие предположения:

$$|\tilde{\varphi}(x, y, \xi) - \varphi(x, y, \xi)| = |\delta(x, y)| \leq \Delta. \quad (5)$$

Для удобства обозначим $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, тогда $z \in \mathcal{Z}$ означает $z = (x, y)$, где $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Когда мы используем $\varphi(z)$, мы имеем в виду $\varphi(z) = \varphi(x, y)$, и $\varphi(z, \xi) = \varphi(x, y, \xi)$.

Для $\mathbf{e} \in \mathcal{RS}_2^n(1)$ и некоторой константы τ пусть $\tilde{\varphi}(z + \tau\mathbf{e}, \xi) = \tilde{\varphi}(x + \tau\mathbf{e}_x, y + \tau\mathbf{e}_y, \xi)$, где \mathbf{e}_x - первая часть размерности $n_x = \dim(x)$, а \mathbf{e}_y - вторая часть размерности $n_y = \dim(y)$. И $n = n_x + n_y$. Затем определяем оценку градиента через разность функций (безградиентная аппроксимация):

$$g(z, \xi, \mathbf{e}) = \frac{n}{2\tau} (\tilde{\varphi}(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \tilde{\varphi}(z - \tau\mathbf{e}, \xi)) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$g(z, \xi, \mathbf{e})$ - блочный вектор, состоящий из двух векторов.

Далее определим важный объект для дальнейшего обсуждения - сглаженный вариант функции φ (см. [10], [7]).

Определение 5. $\hat{\varphi}(x, y) = \hat{\varphi}(z) \quad \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

:

$$\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}_{\mathbf{e}} [\varphi(z + \tau\mathbf{e})]. \quad (7)$$

Обратите внимание, что мы вводим сглаженную версию функции только для доказательства; в алгоритме мы используем только оракул нулевого порядка (6).

2.3. Алгоритм и основная теорема

Теперь представим новый алгоритм в терминах, введенных выше:

Algorithm 1 Zeroth-Order Saddle-Point Algorithm (zoSPA)

Вход: Максимальное число итераций N .

Пусть $z_1 = \operatorname{argmin}_{z \in \mathcal{Z}} d(z)$.

for $k = 1, 2, \dots, N$ **do**

1. Сэмплируем \mathbf{e}_k, ξ_k независимо.

2. Инициализируем γ_k .

3. $z_{k+1} = \operatorname{prox}_{z_k}(\gamma_k g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k))$.

end for

Выход: \bar{z}_N .

где

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\Gamma_N} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k z_k \right), \quad \Gamma_N = \sum_{k=1}^N \gamma_k. \quad (8)$$

Проанализируем сходимость данного алгоритма 1. Для этого необходимо привести вспомогательные леммы. Обратите внимание, что мы работаем только с нормами $\|\cdot\|_p$, где p от 1 до 2 (q от 2 до ∞). В остальных частях работы, включая основные теоремы, мы предполагаем, что p - это от 1 до 2.

Лемма 1 (см. Лемма 2 от [11]) . $g(z, \xi, \mathbf{e}),$ (6),

:

$$\mathbb{E} [\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2] \leq 2 \left(cnM^2 + \frac{n^2 \Delta^2}{\tau^2} \right) a_q^2, \quad (9)$$

$$c = \left(\frac{1}{n} \right), \quad a_q = \sqrt{\mathbb{E}[\|e\|_q^4]} \leq a_q^2.$$

$$a_q^2 = \min\{2q - 1, 32 \log n - 8\} n^{\frac{2}{q}-1}, \quad \forall n \geq 3. \quad (10)$$

Доказательство будет представлено в разделе 3.1.

Стоит отметить, что в случае с $p = 2, q = 2$ у нас $a_q = 1$, это следует не из (10), а из самой простой оценки. А с (10) мы получаем это с $p = 1, q = \infty$ - $a_q = \mathcal{O}(\log n/n)$ (см. также Лемма 4 с [7]).

Лемма 2 (см. Лемма 8 с [7]) . $\mathbf{e} \in \mathcal{RS}_2^n(1).$ $\hat{\varphi}(z, \xi)$

-

:

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}} |\hat{\varphi}(z) - \varphi(z)| \leq \tau M + \Delta. \quad (11)$$

Доказательство: Используя определение (7) функции $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(z) - \varphi(z)| &= |E_{\mathbf{e}}[\varphi(z + \tau\mathbf{e})] - \varphi(z)| \\ &= |E_{\mathbf{e}}[\varphi(z + \tau\mathbf{e}) - \varphi(z)]|. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\nabla\varphi(z)\|_2 \leq M$, тогда $\varphi(z)$ является M -липшицево непрерывной:

$$|E_{\mathbf{e}}[\varphi(z + \tau\mathbf{e}) - \varphi(z)]| \leq |E_{\mathbf{e}}[M\|\tau\mathbf{e}\|_2]| \leq M\tau.$$

Лемма 3 (см. Лемма 5.3.2 [6])

$$\Delta_k = g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z_k).$$

$$D(u) =$$

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k, u - z_k \rangle.$$

$$E \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] \leq \Omega^2 + \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau} \sum_{k=1}^N \gamma_k + M_{all}^2 \sum_{k=1}^N \gamma_k^2, \quad (12)$$

$$M_{all}^2 = 2 \left(cnM^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2} \right) a_q^2, \quad a_q \quad 1.$$

Доказательство Леммы 3 будет приведено в разделе 3.2

Лемма 4 (Лемма 10 с [7] и Лемма 2 из [11])

$$\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z) = E_{\mathbf{e}} \left[\frac{n}{2\tau} (\varphi(z + \tau\mathbf{e}) - \varphi(z - \tau\mathbf{e})) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y \end{pmatrix} \right], \quad (13)$$

$$\|E_{\mathbf{e}}[g(z, \mathbf{e})] - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z)\|_q \leq \frac{\Delta n a_q}{\tau}, \quad (14)$$

$$g(z, \mathbf{e}) = E_{\xi} [g(z, \xi, \mathbf{e})] = \frac{n}{2\tau} (\tilde{\varphi}(z + \tau\mathbf{e}) - \tilde{\varphi}(z - \tau\mathbf{e})) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z) \quad \left(\quad \right),$$

$$\nabla_x \hat{\varphi}(x, y) \quad -\nabla_y \hat{\varphi}(x, y).$$

Доказательство: Доказательство (13) следует из [7] и теоремы Стокса. Тогда

$$E_{\mathbf{e}}[g(z, \mathbf{e})] - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z) = E_{\mathbf{e}} \left[\frac{n}{2\tau} (\delta(z + \tau\mathbf{e}) - \delta(z - \tau\mathbf{e})) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y \end{pmatrix} \right].$$

Используя (5) и определение a_q из Леммы 1, мы завершаем доказательство.

Мы готовы сформулировать главную теорему. Её доказательство будет приведено в 3.3.

Теорема 1. (1) $\varphi(x, y)$ 1

$$g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) \quad (6). \quad , \quad \varphi(x, y)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y) \quad (3), (4), (5). \quad N$$

$$1 \quad \gamma_k = \frac{\Omega}{M_{all}\sqrt{N}}. \quad T$$

1:

$$\mathbb{E} [\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N)] \leq \frac{3M_{all}\Omega}{\sqrt{N}} + \frac{\Delta\Omega na_q}{\tau} + 2\tau M,$$

$$\bar{z}_N \quad (8), \quad \Omega \quad \mathcal{Z}, \quad M_{all}^2 = 2 \left(cnM^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2} \right) a_q^2$$

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) = \max_{y' \in \mathcal{Y}} \varphi(\bar{x}_N, y') - \min_{x' \in \mathcal{X}} \varphi(x', \bar{y}_N), \quad (15)$$

$$\bar{x}_N, \bar{y}_N \quad , \quad \bar{z}_N \quad (8).$$

2.4. Вспомогательные леммы

Лемма 5 (см. неравенство 5.3.18 с [6]) . $d(z) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ - ,

$$V_z(w) \quad , \quad d(z).$$

$$x, y, u \in X:$$

$$\langle \nabla d(x) - \nabla d(y), u - x \rangle = V_y(u) - V_x(u) - V_y(x). \quad (16)$$

Лемма 6 (ФАКТ 5.3.2 от [6]) $\| \cdot \|$ \mathcal{Z} -

$$d(z), \quad z \in \mathcal{Z}, \quad w \in \mathbb{R}^n \quad z_+ = \text{prox}_z(w). \quad u \in \mathcal{Z}.$$

$$\langle w, z_+ - u \rangle \leq V_z(u) - V_{z_+}(u) - V_z(z_+). \quad (17)$$

Лемма 7. $n \geq 1$

$$a_1, \dots, a_n$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right)^2 \leq m \sum_{i=1}^m a_i^2. \quad (18)$$

Лемма 8 (Лемма 9 от [7])

$g,$

$L-$

ℓ_2- , e

$$\sqrt{\mathbb{E}[(g(e) - \mathbb{E}g(e))^4]} \leq c \frac{L^2}{n}$$

$c.$

$c \leq 3.$

Теперь проведем анализ основного результата:

Следствие 1.

1 ε

(1),

$1.$

$$\tau = \Theta\left(\frac{\varepsilon}{M}\right), \quad \Delta = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{M\Omega n a_q}\right), \quad (19)$$

N

$\varepsilon-$

$$N = \mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2} C^2(n, q)\right),$$

$$C(n, q) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{2q - 1, 32 \log n - 8\}.$$

Доказательство: Из условий следствия мы имеем:

$$M_{all}^2 = \Theta(n M^2 a_q^2) = \Theta(n^{2/q} M^2 C(n, q)).$$

Это сразу же дает нам утверждение следствия.

Рассмотрим отдельно случаи с $p = 1$ и $p = 2$.

$p, (1 \leq p \leq 2)$	$q, (2 \leq q \leq \infty)$	$N, \text{ Количество итераций}$
$p = 2$	$q = 2$	$\mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2}{\varepsilon^2} n\right)$
$p = 1$	$q = \infty$	$\mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2}{\varepsilon^2} \log^2(n)\right)$

1.

: $p = 2$ $p = 1.$

Отметим, что в случае с $p = 2$ количество итераций увеличивается в n раз по сравнению с [6], а в случае с $p = 1$ – только $\log^2 n$ раз.

3.

В данном разделе сначала приведены доказательства для основных вспомогательных лемм 1,3, после представлено доказательство основной теоремы 1.

3.1. Доказательство Леммы 1

Доказательство: Рассмотрим следующую цепочку неравенств, где мы используем простой факт (18):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2] &= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{n}{2\tau} (\tilde{\varphi}(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \tilde{\varphi}(z - \tau\mathbf{e}, \xi)) \mathbf{e} \right\|_q^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left\| \frac{n}{2\tau} (\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) + \delta(z + \tau\mathbf{e}) - \varphi(z - \tau\mathbf{e}, \xi) - \delta(z - \tau\mathbf{e})) \mathbf{e} \right\|_q^2 \right] \\
&\leq \frac{n^2}{2\tau^2} \mathbb{E} \left[\left\| (\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \varphi(z - \tau\mathbf{e}, \xi)) \mathbf{e} \right\|_q^2 \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{2\tau^2} \mathbb{E} \left[\left\| (\delta(z + \tau\mathbf{e}) - \delta(z - \tau\mathbf{e})) \mathbf{e} \right\|_q^2 \right] \\
&\leq \frac{n^2}{2\tau^2} \mathbb{E} \left[(\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \varphi(z - \tau\mathbf{e}, \xi))^2 \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{\tau^2} \mathbb{E} \left[(\delta^2(z + \tau\mathbf{e}) + \delta^2(z - \tau\mathbf{e})) \|\mathbf{e}\|_q^2 \right]
\end{aligned}$$

По независимости ξ, \mathbf{e} и снова (18) мы имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2] &\leq \frac{n^2}{2\tau^2} \mathbb{E}_\xi \left[\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[(\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha - \varphi(z - \tau\mathbf{e}, \xi) + \alpha)^2 \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{\tau^2} \mathbb{E} \left[(\delta^2(z + \tau\mathbf{e}) + \delta^2(z - \tau\mathbf{e})) \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \\
&\leq \frac{n^2}{\tau^2} \mathbb{E}_\xi \left[\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[((\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha)^2 + (\varphi(z - \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha)^2) \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{\tau^2} \mathbb{E} \left[(\delta^2(z + \tau\mathbf{e}) + \delta^2(z - \tau\mathbf{e})) \|\mathbf{e}\|_q^2 \right]
\end{aligned}$$

С учетом симметричного распределения неравенства \mathbf{e} и неравенства Коши-Шварца:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2] &\leq \frac{2n^2}{\tau^2} \mathbb{E}_\xi \left[\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[(\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha)^2 \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{\tau^2} \mathbb{E} \left[(\delta^2(z + \tau\mathbf{e}) + \delta^2(z - \tau\mathbf{e})) \|\mathbf{e}\|_q^2 \right] \\
&\leq \frac{2n^2}{\tau^2} \mathbb{E}_\xi \left[\sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[(\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha)^4 \right]} \sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[\|\mathbf{e}\|_q^4 \right]} \right] \\
&\quad + \frac{n^2}{\tau^2} \sqrt{\mathbb{E} \left[(\delta^2(z + \tau\mathbf{e}) + \delta^2(z - \tau\mathbf{e}))^2 \right]} \sqrt{\mathbb{E} \left[\|\mathbf{e}\|_q^4 \right]} \\
&\leq \frac{2n^2 a_q^2}{\tau^2} \mathbb{E}_\xi \left[\sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e} \left[(\varphi(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \alpha)^4 \right]} \right] + \frac{2n^2 a_q^2 \Delta^2}{\tau^2}
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы используем (5) и (10). Замена $\alpha = \mathbb{E}_{\mathbf{e}} [\varphi(z + \tau \mathbf{e}, \xi)]$, применяя Лемму 8 с тем, что $\varphi(z + \tau \mathbf{e}, \xi)$ - это $\tau M(\xi)$ -липшецево непрерывная функция от \mathbf{e} , в пересчете на $\|\cdot\|_2$ -норму мы получаем

$$\mathbb{E} [\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2] \leq 2cna_q^2 \cdot \mathbb{E}_{\xi} [M^2(\xi)] + \frac{2n^2a_q^2\Delta^2}{\tau^2} = 2a_q^2 \left(cn \cdot M^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2} \right)$$

3.2. Доказательство Леммы 3

Приведем полное доказательство Леммы 3:

Доказательство: Определим последовательность v : $v_1 \stackrel{\text{def}}{=} z_1$, $v_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{prox}_{v_k}(-\rho\gamma_k\Delta_k)$ за $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} D(u) &= \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle -\Delta_k, z_k - u \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle -\Delta_k, z_k - z_1 \rangle + \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle -\Delta_k, z_1 - v_k \rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle -\Delta_k, v_k - u \rangle \end{aligned} \tag{20}$$

По определению v и оптимальному состоянию для прокси-оператора, мы имеем для всех u в Z .

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k - \nabla d(v_{k+1}) + \nabla d(v_k), u - v_{k+1} \rangle \geq 0.$$

Переписывая это неравенство, мы получаем

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u \rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1} \rangle + \langle \nabla d(v_{k+1}) - \nabla d(v_k), u - v_{k+1} \rangle.$$

Используя (16):

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u \rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1} \rangle + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - V_{v_k}(v_{k+1}).$$

Принимая во внимание свойство дивергенции Брегмана $2V_x(y) \geq \|x - y\|_p^2$:

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u \rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1} \rangle + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|v_{k+1} - v_k\|_p^2.$$

Используя определение двойственной нормы:

$$\begin{aligned} \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u \rangle &\leq \|\gamma_k\rho\Delta_k\|_q \cdot \|v_k - v_{k+1}\|_p + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|v_{k+1} - v_k\|_p^2 \\ &\leq \frac{\rho^2\gamma_k^2}{2}\|\Delta_k\|_q^2 + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u). \end{aligned}$$

Сумма по всем k от 1 до N :

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \rho \langle -\Delta_k, v_k - u \rangle \leq V_{v_1}(u) - V_{v_{N+1}}(u) + \frac{\rho^2}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Заметим, что $V_x(y) \geq 0$ и $V_{v_1}(u) \leq \Omega^2/2$:

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle -\Delta_k, v_k - u \rangle \leq \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20):

$$D(u) \leq \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Правая часть не зависит от u , тогда

$$\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \leq \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Беря полное математическое ожидание и вводя новое обозначение $\tilde{\Delta}_k \stackrel{\text{def}}{=} g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) - g(z_k, \mathbf{e}_k)$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle \right] + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k - \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle \right] \\ &\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2 \right]. \end{aligned}$$

Используя независимость $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N, \xi_1, \dots, \xi_N$, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \mathbb{E}_{\xi_k} \left[\langle \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle \right] \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k} \left[\langle \Delta_k - \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle \right] \right] \\ &\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2 \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что $v_k - z_k$ не зависит от \mathbf{e}_k, ξ_k и $\mathbb{E}_{\xi_k} \tilde{\Delta}_k = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\xi_k} [\tilde{\Delta}_k], v_k - z_k \rangle \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k} [\Delta_k - \tilde{\Delta}_k], v_k - z_k \rangle \right] \\ &\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k} [\Delta_k - \tilde{\Delta}_k], v_k - z_k \rangle \right] + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2 \right]. \end{aligned}$$

Согласно (14) и определению диаметра Ω мы получаем

$$\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] \leq \frac{\Delta \Omega n a_q}{\tau} \sum_{k=1}^N \gamma_k + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \mathbb{E} [\|\Delta_k\|_q^2].$$

Чтобы доказать лемму, нам следует оценить $\mathbb{E} [\|\Delta_k\|_q^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|\Delta_k\|_q^2] &\leq \mathbb{E} \left[\|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) - \tilde{\nabla} \hat{\varphi}(z_k)\|_q^2 \right] \\ &\leq 2\mathbb{E} [\|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2] + 2\mathbb{E} [\|\tilde{\nabla} \hat{\varphi}(z_k)\|_q^2] \\ &\leq 2\mathbb{E} [\|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2] + 2\mathbb{E} \left[\left\| \frac{n(\varphi(z + \tau \mathbf{e}) - \varphi(z - \tau \mathbf{e}))}{2\tau} \mathbf{e} \right\|_q^2 \right]. \end{aligned}$$

Используя Лемму 2, мы имеем $\mathbb{E} [\|\Delta_k\|_q^2] \leq 4M_{all}^2$, таким образом

$$\mathbb{E} \left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \right] \leq \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\Delta \Omega n a_q}{\tau} \sum_{k=1}^N \gamma_k + 2\rho \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 M_{all}^2.$$

Приравнявая $\rho = 1/2$, мы завершаем доказательство.

3.3. Доказательство основного результата для метода zoSPA

Доказательство будет разбито на три шага.

Шаг 1. Пусть $g_k \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_k g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)$. Согласно шагу алгоритма 1, $z_{k+1} = \text{prox}_{z_k}(g_k)$.

Принимая во внимание (17), мы получаем, что для всех $u \in \mathcal{Z}$

$$\langle g_k, z_{k+1} - u \rangle = \langle g_k, z_{k+1} - z_k + z_k - u \rangle \leq V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - V_{z_k}(z_{k+1}).$$

Производя простые преобразования:

$$\begin{aligned} \langle g_k, z_k - u \rangle &\leq \langle g_k, z_k - z_{k+1} \rangle + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - V_{z_k}(z_{k+1}) \\ &\leq \langle g_k, z_k - z_{k+1} \rangle + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - \frac{1}{2} \|z_{k+1} - z_k\|_p^2. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве цепочки выше мы используем свойство дивергенции Брегмана : $V_x(y) \geq \frac{1}{2} \|x - y\|_p^2$. Используя неравенство Гёльдера и факт, что : $ab - b^2/2 \leq a^2/2$, имеем

$$\begin{aligned} \langle g_k, z_k - u \rangle &\leq \|g_k\|_q \|z_k - z_{k+1}\|_p + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - \frac{1}{2} \|z_{k+1} - z_k\|_p^2 \\ &\leq V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) + \frac{1}{2} \|g_k\|_q^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Суммируя (22) по всем k от 1 до N и по определению g_k и Ω (диаметра множества \mathcal{Z}):

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k \langle g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k), z_k - u \rangle \leq \frac{\Omega^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2, \quad \forall u \in \mathcal{Z}. \quad (23)$$

Подставляя определение $D(u)$ из Леммы 3 в (23), мы получаем для всех $u \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle g(z_k, \mathbf{e}_k), z_k - u \rangle &\leq \frac{\Omega^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2 + D(u) \\ &\leq \frac{\Omega^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2 + \max_{u \in \mathcal{Z}} D(u). \end{aligned} \quad (24)$$

Шаг 2. Рассмотрим связь между функциями $\hat{\varphi}(z)$ и $\varphi(z)$. Объединяя (15) и (11) получаем:

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \leq \max_{y' \in \mathcal{Y}} \hat{\varphi}(\bar{x}_N, y') - \min_{x' \in \mathcal{X}} \hat{\varphi}(x', \bar{y}_N) + 2\tau M.$$

Таким образом, по определению \bar{x}_N и \bar{y}_N (см. (15)), неравенству Йенсена и выпуклости-вогнутости $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) &\leq \max_{y' \in \mathcal{Y}} \hat{\varphi} \left(\frac{1}{\Gamma_N} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k x_k \right), y' \right) - \min_{x' \in \mathcal{X}} \hat{\varphi} \left(x', \frac{1}{\Gamma_N} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k y_k \right) \right) \\ &\quad + 2\tau M \\ &\leq \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \left(\max_{y' \in \mathcal{Y}} \hat{\varphi}(x_k, y') - \min_{x' \in \mathcal{X}} \hat{\varphi}(x', y_k) \right) + 2\tau M. \end{aligned}$$

Используя факт линейной независимости x' и y' :

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \leq \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \max_{(x', y') \in \mathcal{Z}} (\hat{\varphi}(x_k, y') - \hat{\varphi}(x', y_k)) + 2\tau M.$$

Используя выуклость по одной группе переменных и вогнутость по другой группе переменных функции $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) &\leq \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \max_{(x', y') \in \mathcal{Z}} (\hat{\varphi}(x_k, y') - \hat{\varphi}(x', y_k)) + 2\tau M \\ &= \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \max_{(x', y') \in \mathcal{Z}} (\hat{\varphi}(x_k, y') - \hat{\varphi}(x_k, y_k) + \hat{\varphi}(x_k, y_k) - \hat{\varphi}(x', y_k)) \\ &\quad + 2\tau M \\ &\leq \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \max_{(x', y') \in \mathcal{Z}} (\langle \nabla_y \hat{\varphi}(x_k, y_k), y' - y_k \rangle + \langle \nabla_x \hat{\varphi}(x_k, y_k), x_k - x' \rangle) \\ &\quad + 2\tau M \\ &\leq \frac{1}{\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \max_{u \in \mathcal{Z}} \langle \tilde{\nabla} \hat{\varphi}(z_k), z_k - u \rangle + 2\tau M. \end{aligned} \quad (25)$$

Под $\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z)$ имеем в виду блочный вектор, состоящий из двух векторов $\nabla_x\hat{\varphi}(x, y)$ и $-\nabla_y\hat{\varphi}(x, y)$.

Шаг 3. Объединяя выражения (24), (25), мы получаем

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \leq \frac{\Omega^2}{2\Gamma_N} + \frac{1}{2\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \mathbb{E} [\|g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k)\|_q^2] + \frac{1}{\Gamma_N} \max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) + 2\tau M.$$

Беря полное математическое ожидание и используя (12) и (9), мы имеем

$$\mathbb{E} [\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N)] \leq \frac{3\Omega^2}{2\Gamma_N} + \frac{3M_{all}^2}{2\Gamma_N} \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 + \frac{\Delta\Omega na_q}{\tau} + 2\tau M.$$

Подставляя значение $\gamma_k = \frac{\Omega}{M_{all}\sqrt{N}}$, завершаем доказательство теоремы.

4.

В серии наших экспериментов мы сравниваем алгоритм нулевого порядка 1 (ZOSPA), предложенный в данной работе, с алгоритмом Зеркального спуска [6], использующим оракул первого порядка. Рассматривается классическая седловая задача на вероятностном симплексе:

$$\min_{x \in \Delta_n} \max_{y \in \Delta_k} [y^T C x], \quad (26)$$

Эта проблема имеет много различных приложений и интерпретаций, одна из основных - матричная игра (см. Часть 5 на [6]), т.е. элемент c_{ij} матрицы интерпретируется как выигрыш, при условии, что игрок X выбрал i -ую стратегию, а игрок Y выбрал j -стратегию, задача одного из игроков - максимизировать выигрыш, а задача оппонента - свести к минимуму.

Кратко опишем, как должен выглядеть шаг алгоритма для этого случая. Прокс-функция $d(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$ (энтропия) и $V_y(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i/y_i$ (расстояние (дивергенция) Кульбака — Лейблера). Результат проксимального оператора

$$u = \text{прох}_{z_k}(\gamma_k g(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)) = z_k \exp(-\gamma_k g(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)),$$

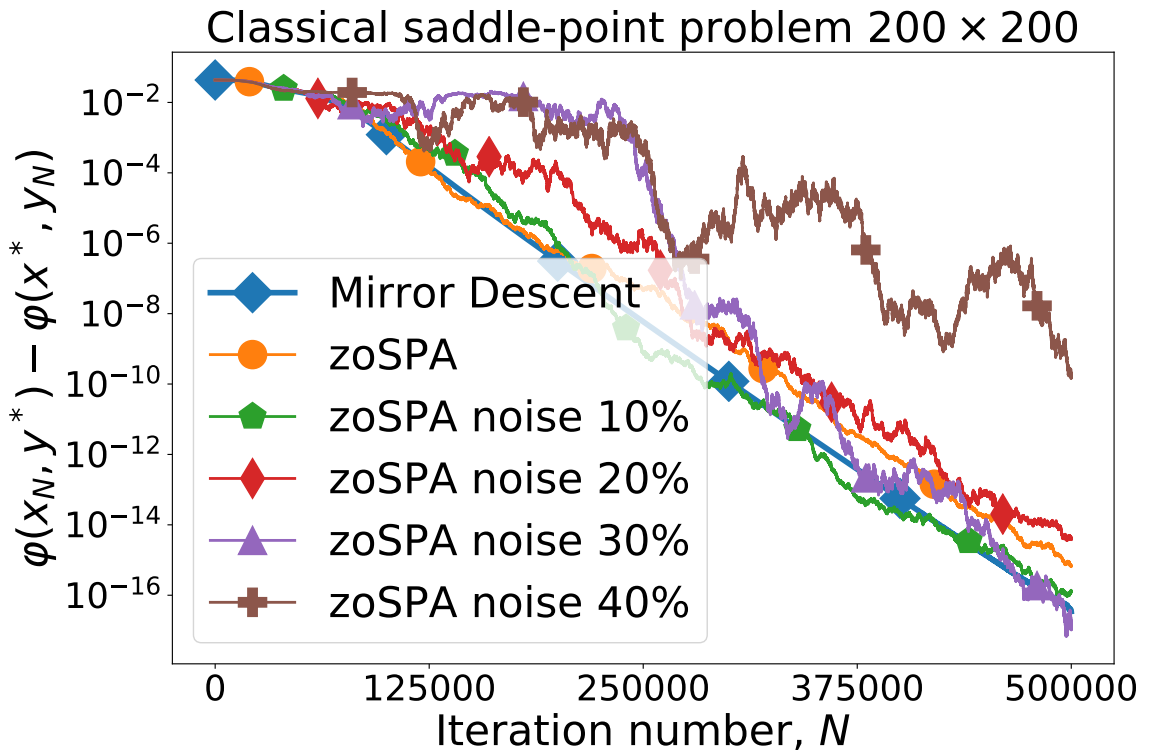
под этой записью мы имеем в виду: $u_i = [z_k]_i \exp(-\gamma_k [g(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)]_i)$. Используя проекцию Брегмана на симплекс следующим образом $P(x) = x/\|x\|_1$, у нас есть

$$[x_{k+1}]_i = \frac{[x_k]_i \exp(-\gamma_k [g_x(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)]_i)}{\sum_{j=1}^n [x_k]_j \exp(-\gamma_k [g_x(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)]_j)},$$

$$[y_{k+1}]_i = \frac{[y_k]_i \exp(\gamma_k [g_y(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)]_i)}{\sum_{j=1}^n [y_k]_j \exp(\gamma_k [g_y(z_k, \xi_k^\pm, \mathbf{e}_k)]_j)},$$

где под g_x, g_y подразумеваются части g , которые отвечают за x и за y . Из теоретических результатов видно, что в нашем случае один и тот же шаг должен быть использован в Алгоритме 1 и Зеркальном спуске с [6], так как $n^{1/q} = 1$ для $q = \infty$.

В первой части эксперимента берем матрицу 200×200 . Все элементы матрицы генерируются из равномерного распределения от 0 до 1. Далее выбираем одну строку матрицы и генерируем ее элементы из равномерного распределения от 5 до 10. Наконец, берем один элемент из этой строки и генерируем его равномерно от 1 до 5. Затем берём ту же матрицу, но теперь на каждой итерации добавляем к элементам матрицы нормальный шум с нулевым ожиданием и дисперсией 10, 20, 30, 40 % от значения матричного элемента. Результаты эксперимента приведены на рисунке 1.



1. zoSPA 0 - 40 % Mirror Descent,

(26).

По результатам экспериментов видно, что для рассматриваемых задач методы с одним и тем же шагом работают либо так, как это описано в теории (более медленные n или $\log^2 n$ раз), либо идентично методу, использующему полный градиент.

5.

В этой работе мы рассматриваем негладкий случай. Наши результаты можно обобщить для случая сильно выпуклых функций, используя технику рестартов (см., например, [12]). Похоже, что это можно сделать аналогичным образом. Точнее говоря, это можно сделать аналогичным образом для детерминистической установки. Что касается стохастической установки, то в данной работе мы должны улучшить оценки, изменив диаметры Брегмана из рассматриваемых выпуклых множеств Ω на расхождение Брегмана между начальной точкой и решением. Это требует более точных расчетов (как в [13]) и не рассмотрено в данной работе. Обратите внимание, что все константы, характеризующие стохастичность, липшивость во всех оценках в данной работе можно определить на пересечении рассматриваемых выпуклых множеств и шаров Брегмана вокруг решения радиуса, равного (до логарифмических факторов) расхождению Брегмана между начальной точкой и решением. Если попробовать перенести результаты на гладкий случай, то оценка количества итераций, необходимых для нахождения решения седловой задачи 1 с точность ε , будет порядка $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. Однако известен алгоритм [6] (Mirror Prox), использующий оракул первого порядка. Для него оценка количества итераций, необходимых для нахождения решения седловой задачи $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Видимо, для гладкого случая нужно использовать уже другую идею. Обобщение результатов [13, 14] и [15, 16] для безградиентной установки точки седла является более сложной задачей. Также, на основе комбинаций идей из [15, 17] было бы интересно разработать смешанный метод с градиентным оракулом за x (внешняя минимизация) и безградиентным оракулом за y (внутренняя максимизация).

Список литературы

1. Goodfellow I. NIPS 2016 tutorial: Generative adversarial networks // arXiv preprint arXiv:1701.00160. 2016.
2. Sutton R. S., Barto A. G. Reinforcement learning: An introduction. MIT press, 2018.
3. Langley P. Crafting Papers on Machine Learning // Proceedings of the 17th International Conference on Machine Learning (ICML 2000) / Ed. by P. Langley. Stanford, CA: Morgan Kaufmann, 2000. P. 1207–1216.
4. Gasnikov A. V., Krymova E. A., Lagunovskaya A. A. et al. Stochastic online optimization. Single-point and multi-point non-linear multi-armed bandits. Convex and strongly-convex case // Automation and remote control. 2017. Vol. 78, no. 2. P. 224–234.
5. Gasnikov A. V., Lagunovskaya A. A., Usmanova I. N., Fedorenko F. A. Gradient-free proximal methods with inexact oracle for convex stochastic nonsmooth optimization problems on the simplex // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, no. 11. P. 2018–2034.
6. Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. 2019.
7. Shamir O. An Optimal Algorithm for Bandit and Zero-Order Convex Optimization with Two-Point Feedback. // Journal of Machine Learning Research. 2017. Vol. 18, no. 52. P. 1–11.
8. Duchi J. C., Jordan M. I., Wainwright M. J., Wibisono A. Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations. 2013. [arXiv:math.OA/1312.2139](https://arxiv.org/abs/math/1312.2139).
9. Beznosikov A., Sadiev A., Gasnikov A. Gradient-Free Methods with Inexact Oracle for Convex-Concave Stochastic Saddle-Point Problem // arXiv preprint arXiv:2005.05913. 2020.
10. Nesterov Y., Spokoiny V. G. Random Gradient-Free Minimization of Convex Functions // Foundations of Computational Mathematics. 2017. Vol. 17, no. 2. P. 527–566.
11. Beznosikov A., Gorbunov E., Gasnikov A. Derivative-Free Method For Composite Optimization With Applications To Decentralized Distributed Optimization // arXiv preprint arXiv:1911.10645. 2019.
12. Gasnikov A. Universal gradient descent // arXiv preprint arXiv:1711.00394. 2017.

13. Gorbunov E., Dvurechensky P., Gasnikov A. An accelerated method for derivative-free smooth stochastic convex optimization // arXiv preprint arXiv:1802.09022. 2018.
14. Dvurechensky P., Gorbunov E., Gasnikov A. An accelerated directional derivative method for smooth stochastic convex optimization // arXiv preprint arXiv:1804.02394. 2018.
15. Alkousa M., Dvinskikh D., Stonyakin F. et al. Accelerated methods for composite non-bilinear saddle point problem // arXiv preprint arXiv:1906.03620. 2019. [arXiv:math.OC/1906.03620](https://arxiv.org/abs/math/1906.03620).
16. Lin T., Jin C., Jordan M. et al. Near-Optimal Algorithms for Minimax Optimization // arXiv preprint arXiv:2002.02417. 2020.
17. Ivanova A., Gasnikov A., Dvurechensky P. et al. Oracle Complexity Separation in Convex Optimization // arXiv preprint arXiv:2002.02706. 2020.