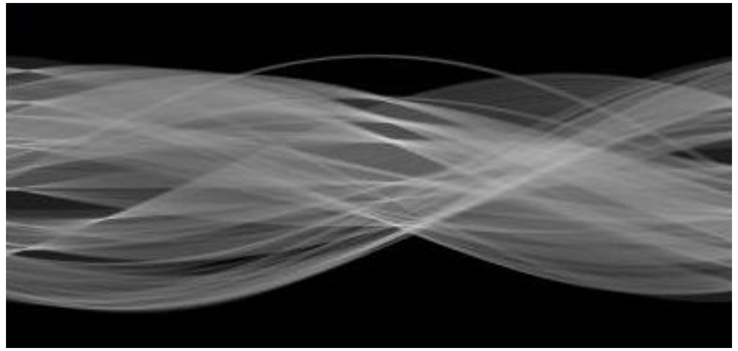
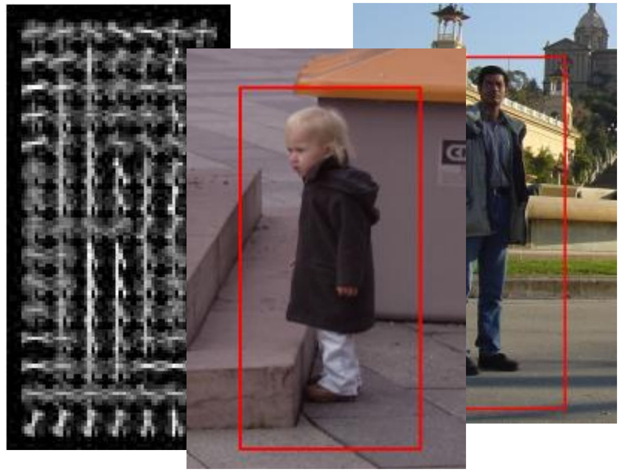
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

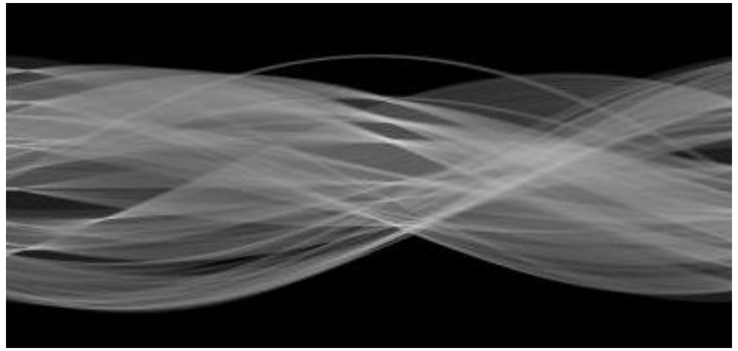


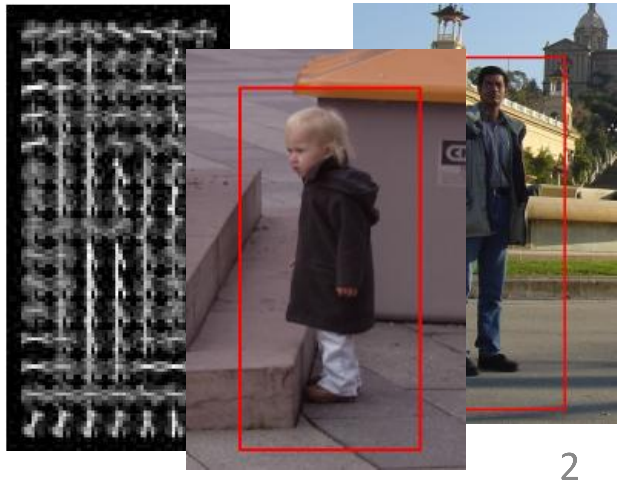


Алгебраические методы реконструкции изображений

Тема 7

20.03.2026





Алгебраический подход к фильтрации

Векторное представление изображения

Пусть

вектор: N

$$\mathbf{v}_n = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N \end{array} \end{array}$$

Блочная матрица: $MN \times M$

$$\mathbf{U}_n = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{M\times M} \\ \vdots \\ \mathbf{0}^{M\times M} \\ \mathbf{I}^{M\times M} \\ \mathbf{0}^{M\times M} \\ \vdots \\ \mathbf{0}^{M\times M} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N \end{array} \end{array}$$

Операция перестановки, **развертка матрицы $\mathbf{F}$ по столбцам (Image2Col)**:

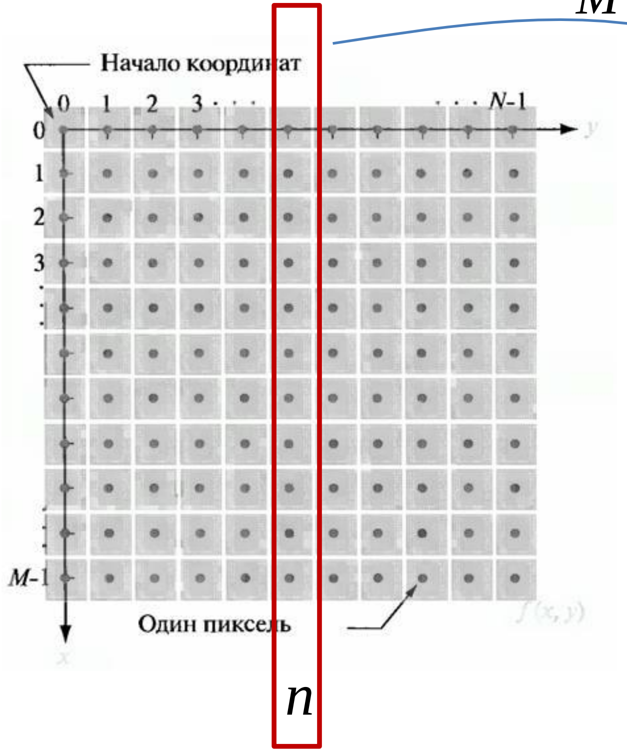
$$\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{U}_n \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{v}_n} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{U}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{f} \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}$$

Вертикальное смещение столбца на позицию n.

Выделение столбца

Изображение-матрица $\mathbf{F}^{M\times N}$

$\mathbf{F}^{M\times N}$ $\xrightarrow{\mathbf{v}_n}$



$M \times 1$

$\xrightarrow{\mathbf{U}_n}$

$\mathbf{f}$

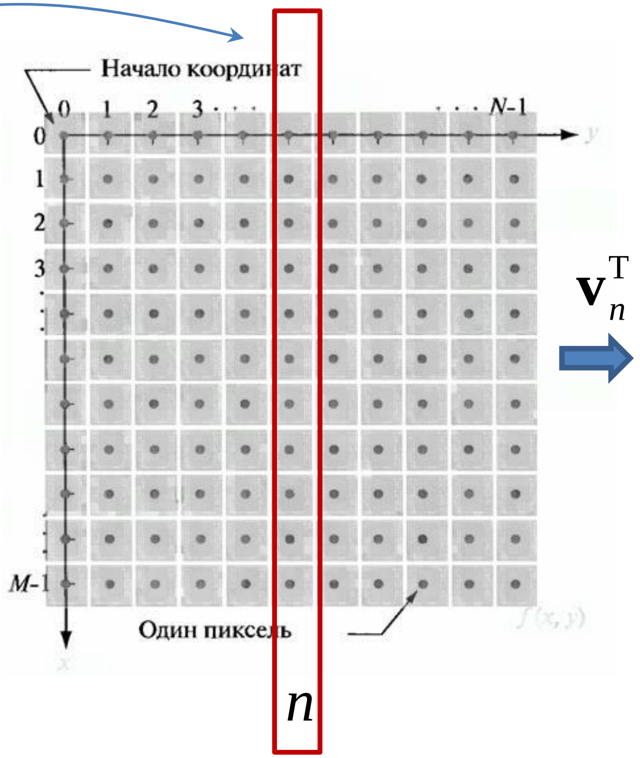
nM

NM

$M \times 1$

$\xrightarrow{\mathbf{U}_n^{\mathrm{T}}}$

$\mathbf{F}$



$\xrightarrow{\mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}}$ $\mathbf{F}^{M\times N}$

Линейная и циклическая свертки. Реализация.

Линейная одномерная свертка

Одномерный случай.

Свертка через матричное представление

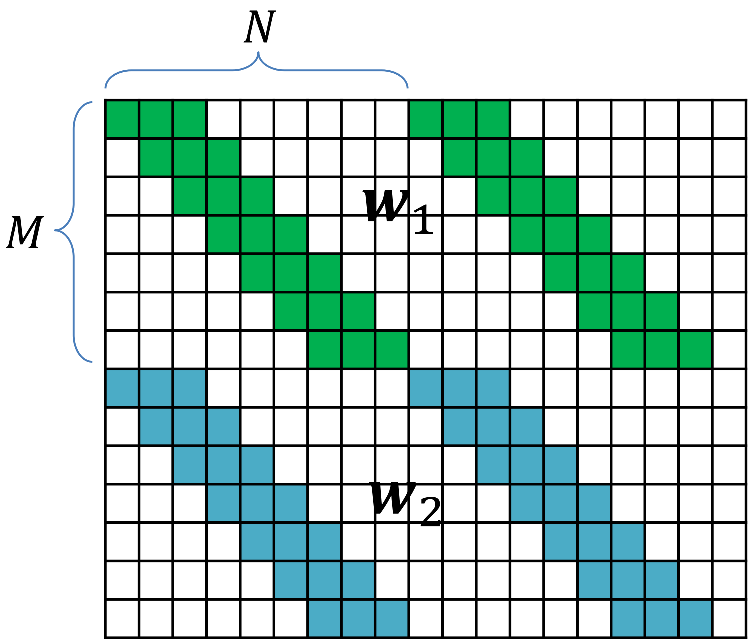
матрица Теплица

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$A_{i,j}=A_{i+1,j+1}=a_{i-j}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{bmatrix}$$

Блочно-теплицево представление двумерной двуканальной свертки:



$$\begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ \cdots \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ \cdots \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{f}$

Image2Row

$$\mathbf{F}^{M\times N}\to \boldsymbol{f}$$

$$\mathbf{Image2Row}(\boldsymbol{F} * \boldsymbol{w}_i)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$$

Линейная и циклическая свертки. Реализация.

Одномерный случай.

Свертка через матричное представление

Циклическая свертка двух последовательностей

$$c(n) = a(n) \circledast b(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m) b(n-m)_{\bmod N}, \quad n = 0 \ldots N.$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b(0) & b(N-1) & b(N-2) & \ldots & b(2) & b(1) \\ b(1) & b(0) & b(N-1) & \ldots & b(3) & b(2) \\ b(2) & b(1) & b(0) & \ldots & b(4) & b(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b(N-2) & b(N-3) & b(N-4) & \ldots & b(0) & b(N-1) \\ b(N-1) & b(N-2) & b(N-3) & \ldots & b(1) & b(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(N-2) \\ a(N-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ - циклическая (циркулярная) матрица.

Каждый столбец матрицы $\mathbf{B}$ циклически задержан на один отсчет относительно предыдущего столбца.

Циркулярная матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

Алгебраический подход к фильтрации

Векторное представление изображения

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \dots & \mathbf{T}_{1N} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \dots & \mathbf{T}_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{T}_{M1} & \mathbf{T}_{M2} & \dots & \mathbf{T}_{MN} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{T}\mathbf{N}_n \mathbf{F} \mathbf{v}_n.$$

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{M}_m^T \mathbf{p} \mathbf{u}_m^T.$$

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{M}_m^T \mathbf{T} \mathbf{N}_n)\, \mathbf{F}\, (\mathbf{v}_n \mathbf{u}_m^T).$$

$$\mathbf{P} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{T}_{mn} \mathbf{F}\, (\mathbf{v}_n \mathbf{u}_m^T).$$

блок

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_C \otimes \mathbf{T}_R$$ - разделимое

$$\mathbf{T}_{mn} = \mathbf{T}_R(m,\ n)\, \mathbf{T}_C.$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_C \mathbf{F} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} T_R(m,\ n)\, \mathbf{v}_n \mathbf{u}_m^T = \mathbf{T}_C \mathbf{F} \mathbf{T}_R^T.$$

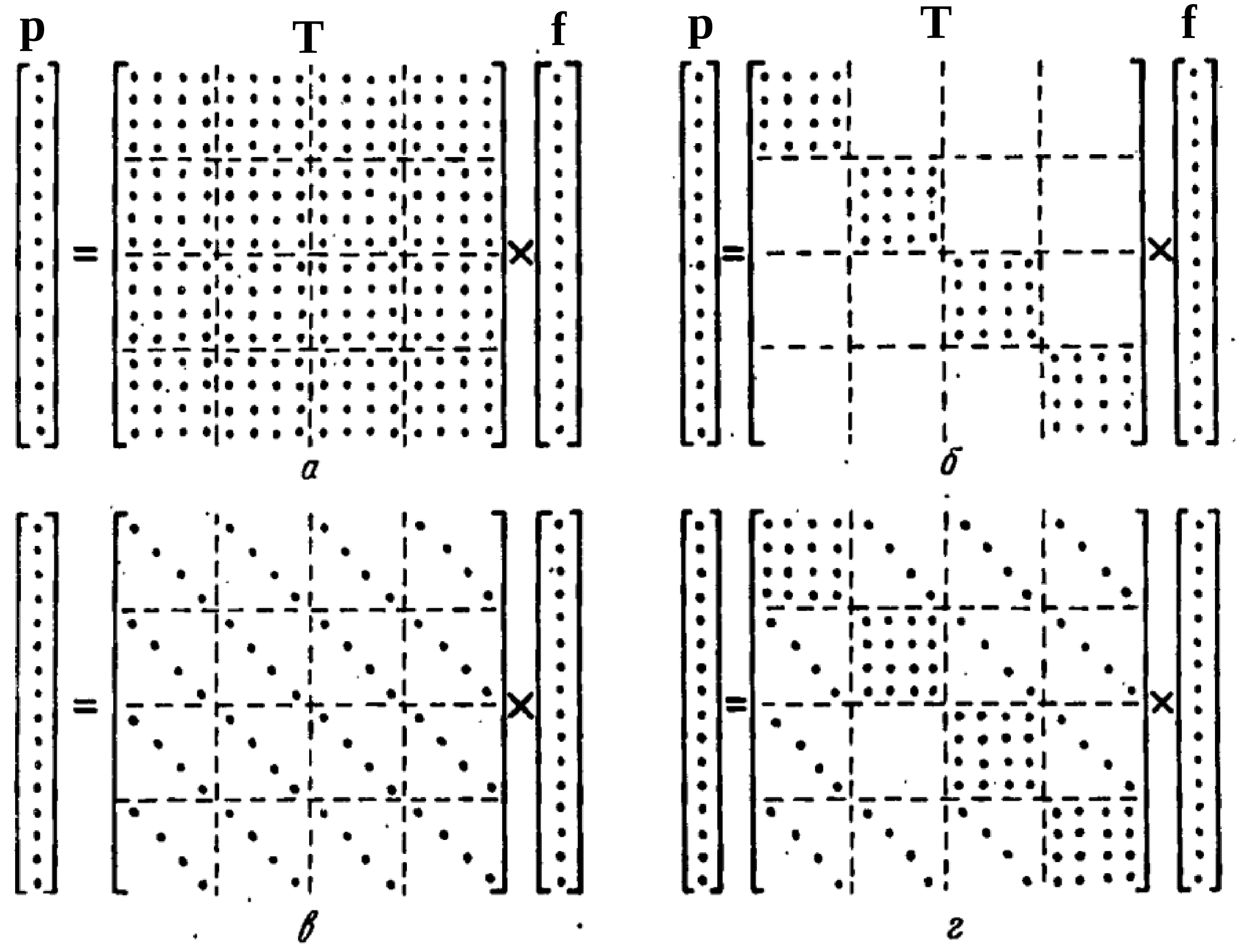


Рис. Структура матриц линейного оператора.
а — общий случай; б — обработка только по столбцам; в — обработка только по строкам; г — обработка только по строкам и столбцам.

Матричное представление ДПФ

Прямое преобразование

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

Обратное преобразование

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{A}^*\right)^T \hat{\mathbf{f}}$$

унитарная матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\right)^T$$

$\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{f}$ - векторы, полученные разверткой изображения – матрицы по столбцам

Разложение матрицы на прямое произведение - $\mathbf{A} = \mathbf{A}_c \otimes \mathbf{A}_R$

Левое прямое произведение матрицы **A** размера $P \times Q$ на матрицу **B** размера $M \times N$ представляет собой матрицу размера $PM \times QN$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B(1,\,1)\,\mathbf{A} & B(1,\,2)\,\mathbf{A} & \ldots & B(1,\,N)\,\mathbf{A} \\ B(2,\,1)\,\mathbf{A} & B(2,\,2)\,\mathbf{A} & \ldots & B(2,\,N)\,\mathbf{A} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \ldots & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ B(M,\,1)\,\mathbf{A} & B(M,\,2)\,\mathbf{A} & \ldots & B(M,\,N)\,\mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_R = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & \ldots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & \ldots & W^{(N-1)} \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & \ldots & W^{2(N-1)} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & \ldots & W^{3(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W^0 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \ldots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{A}_c \mathbf{F} \mathbf{A}_R^T$ - Прямое преобразование через разделимую матрицу

$\mathbf{F} = \left(\mathbf{A}_c^*\right)^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{A}_R^*$ - Обратное преобразование через разделимую матрицу

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} - ?$

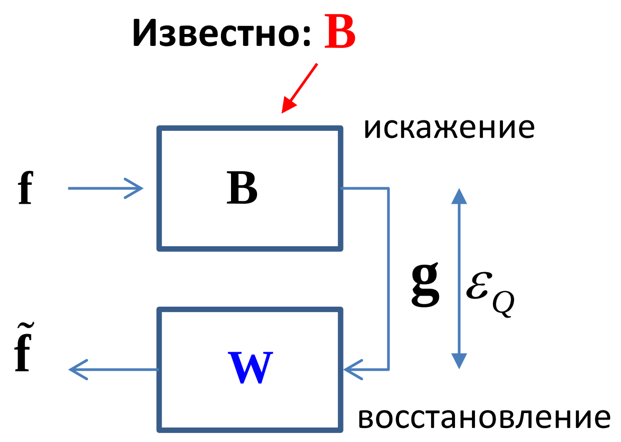
$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

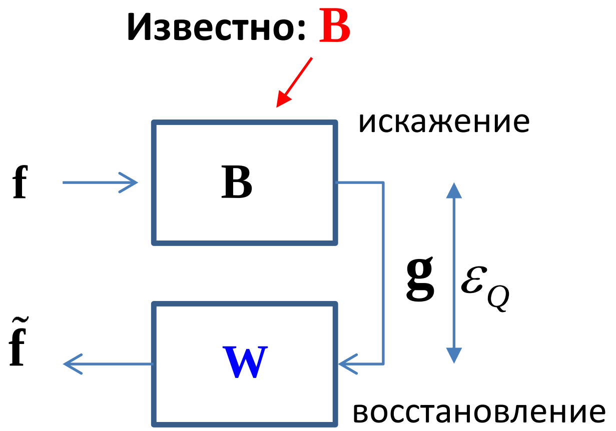
Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g}$



Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай **переопределенной** системы: $\boxed{P \geq Q, \ \operatorname{rank}(\mathbf{B}) = Q}$:

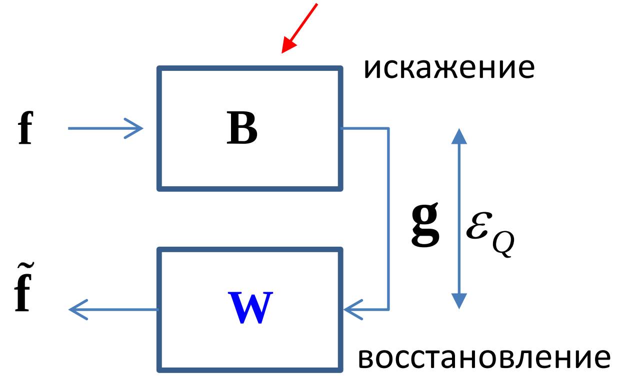
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай **переопределенной** системы: $\boxed{P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

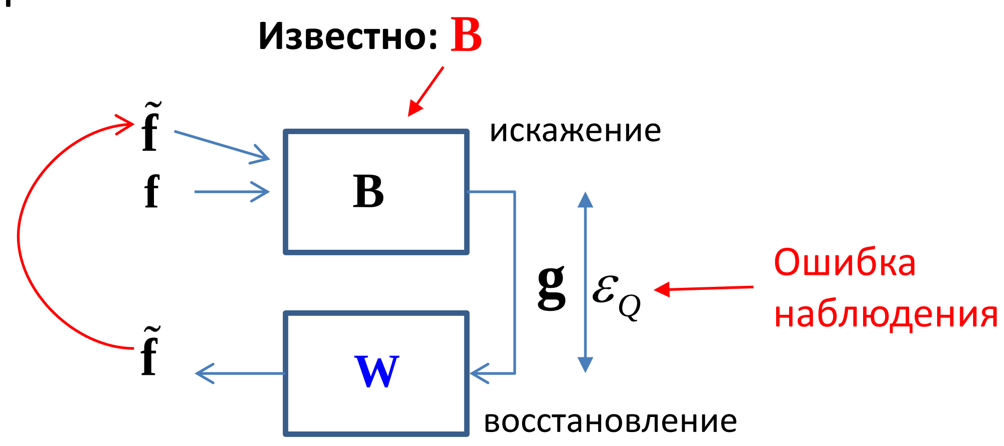
Построим проекцию вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$,

т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g}$

1. Случай **переопределенной** системы: $\boxed{P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.
Построим проекцию вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{f}$,

т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

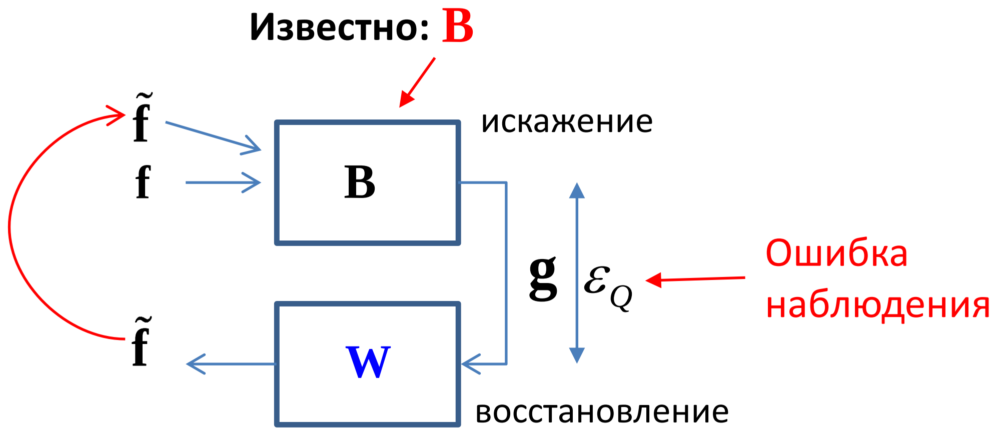
б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом **МНК**:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} - ?$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$ - ошибка наблюдения

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай **переопределенной** системы: $\boxed{P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Построим проекцию вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$,

т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} - ?$

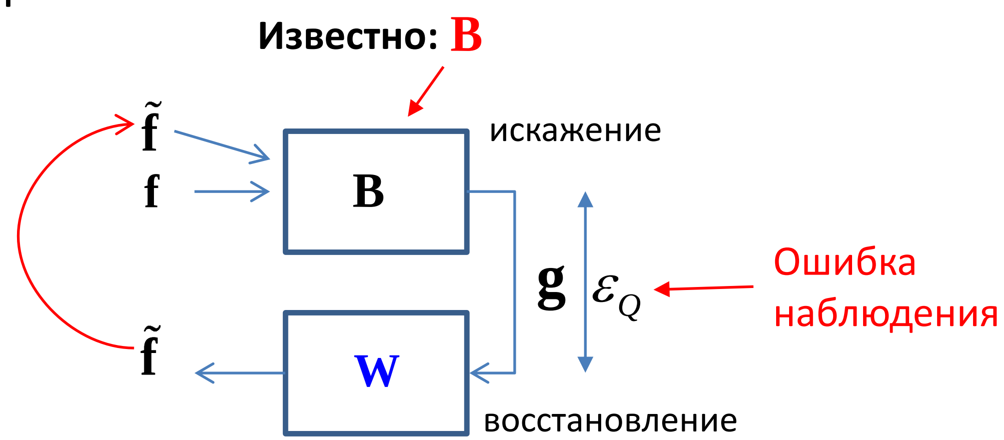
$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf},\ \ \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай **переопределенной** системы: $\boxed{P \geq Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Построим проекцию вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$,

т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}},\ \ \tilde{\mathbf{f}} - ?$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g},\ \ \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$$

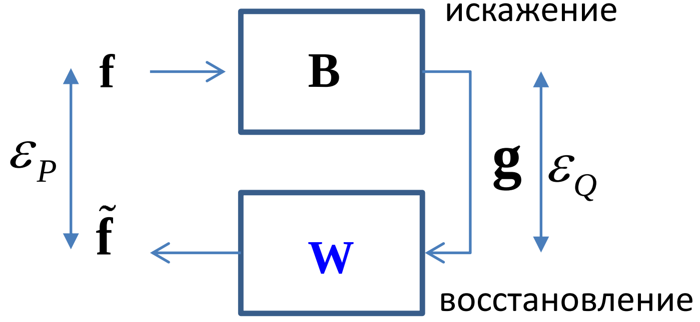
$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$ - обобщенно-обратная матрица $\left(\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{B}^{+} = \mathbf{B}^{+},\ \mathbf{B}\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{B}\right)$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай переопределенной системы: $P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=Q$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Проекция вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$, т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} - ?$$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$ - обобщенно-обратная матрица

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=P}$:

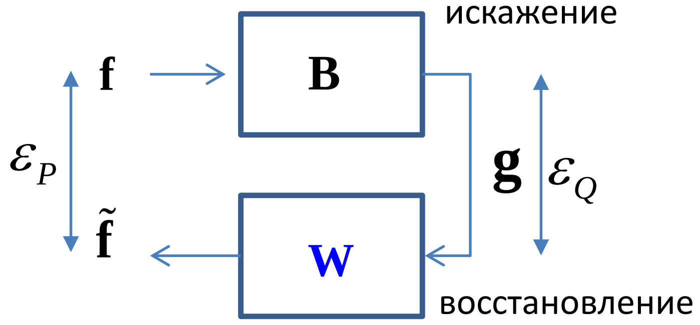
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай переопределенной системы: $P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=Q$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Проекция вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$, т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} - ?$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$ - обобщенно-обратная матрица

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B})=P}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

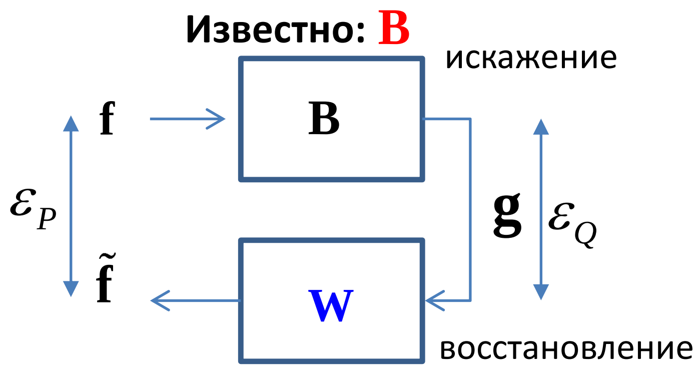
а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $v - ?$

$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$ т.к. строки линейно независимы:

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай переопределенной системы: $P \geq Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q:$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Проекция вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bf}$, т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} - ?$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right) \neq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$ - обобщенно-обратная матрица

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{P}}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $v - ?$

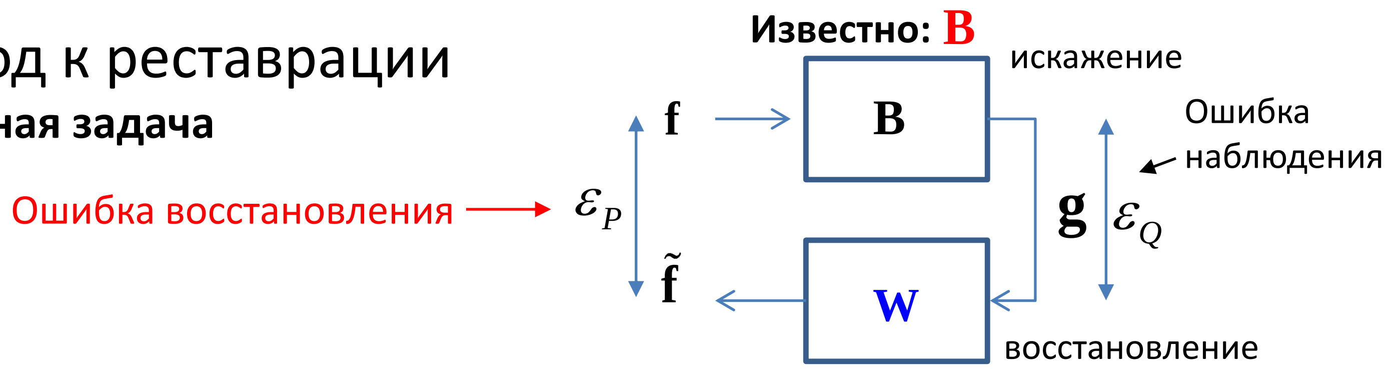
$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}$, $\mathbf{f}$ – ?

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай переопределенной системы: $P \geq Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Проекция вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^T\mathbf{g} = \mathbf{B}^T\mathbf{Bf}$, т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ – ?

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial\tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^T\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^T\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^T\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{g},\ \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}$ - обобщенно-обратная матрица

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = P}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения v – ?

$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{v},\ \Rightarrow v = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{g},\quad \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right) \neq 0$$

т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

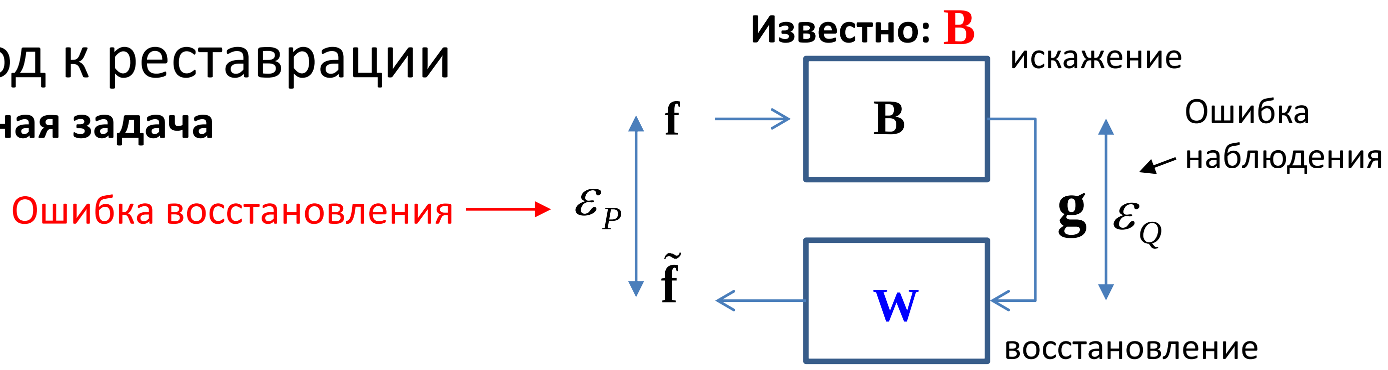
$$\varepsilon_P\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right)^T\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right) \to \min_{\mathbf{v}}$$

- ошибка восстановления

$$\frac{\partial\varepsilon_P\left(\mathbf{v}\right)}{\partial\mathbf{v}} = -2\mathbf{B}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right) = -2\mathbf{Bf} + 2\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{v} = 0$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}$, $\mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f}: Q \times 1,$

$\mathbf{g}: P \times 1,$

$\mathbf{B}: P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

1. Случай переопределенной системы: $P \geq Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит Q линейно-независимых столбцов, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является линейной комбинацией этих независимых столбцов.

Проекция вектора на множество линейно-независимых столбцов: $\mathbf{B}^T\mathbf{g} = \mathbf{B}^T\mathbf{Bf}$, т.к. столбцы линейно независимы:

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{g} = \mathbf{B}^+\mathbf{g}, \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{f}} - ?$

$$\varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^T\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^T\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^T\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^T\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \underbrace{\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}\mathbf{g} = \mathbf{B}^+\mathbf{g}$$

$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T}$ - обобщенно-обратная матрица

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = P}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $\mathbf{v} - ?$

$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right) \neq 0$$

т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^-\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$$\varepsilon_P\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right)^T\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right) \to \min_{\mathbf{v}}$$

- ошибка восстановления

$$\frac{\partial \varepsilon_P(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -2\mathbf{B}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T\mathbf{v}\right) = -2\mathbf{Bf} + 2\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{v} = 0$$

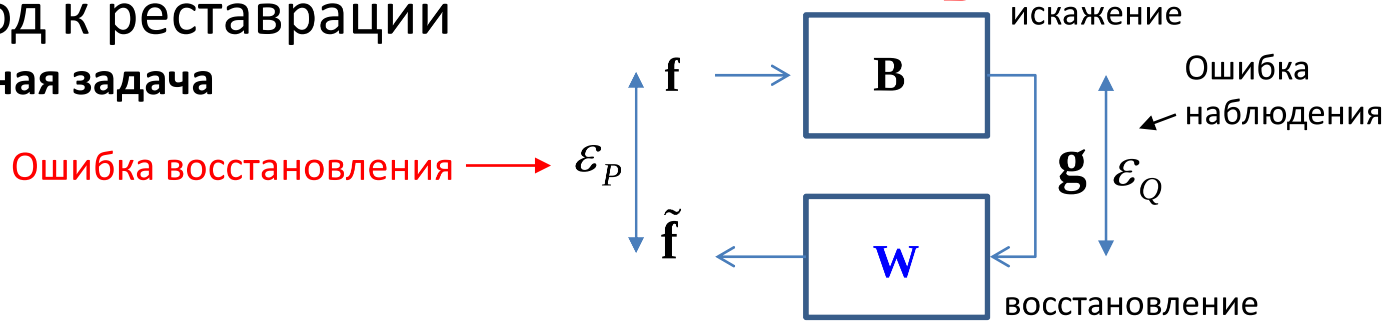
$$\Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{v} = \mathbf{Bf} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{Bf} = \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right) \neq 0$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^T\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^-\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q, \ \operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{P}}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $v - ?$

$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$$\varepsilon_P\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) \to \min_{\mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_P(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -2\mathbf{B}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) = -2\mathbf{Bf} + 2\mathbf{BB}^{\mathbf{T}}\mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{Bf} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{Bf} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

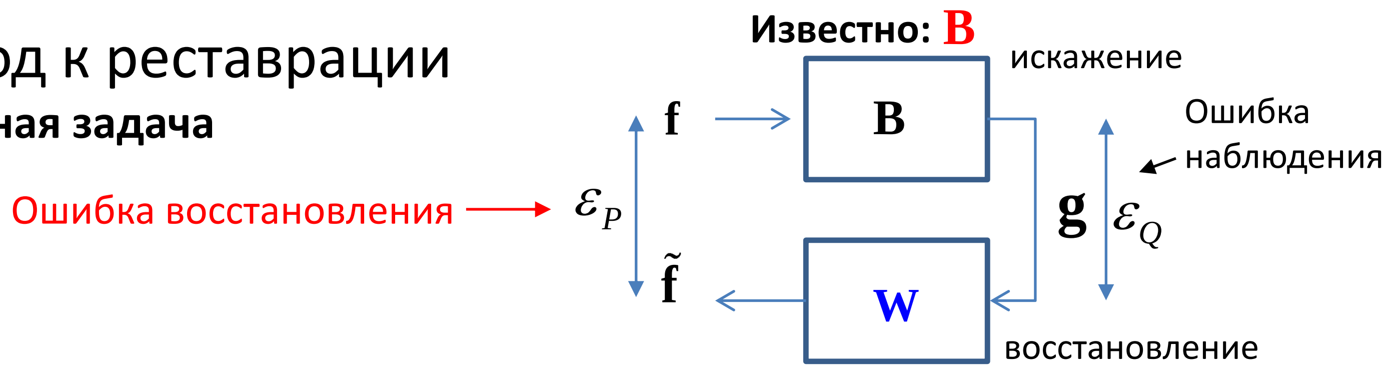
$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

В общем случае, решение не единственно т.к. $\mathbf{g}$ - проекция из пространства $Q \times 1$ в пространство меньшей размерности $P \times 1$:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p}} \leftarrow \text{произвольный вектор}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q,\ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{P}}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $v - ?$

$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$ т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$$\varepsilon_P\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) \to \min_{\mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_P(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -2\mathbf{B}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) = -2\mathbf{Bf} + 2\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{Bf} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{Bf} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

В общем случае, решение не единственно т.к. $\mathbf{g}$ - проекция из пространства $Q \times 1$ в пространство меньшей размерности $P \times 1$:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p}} \leftarrow \text{произвольный вектор}$$

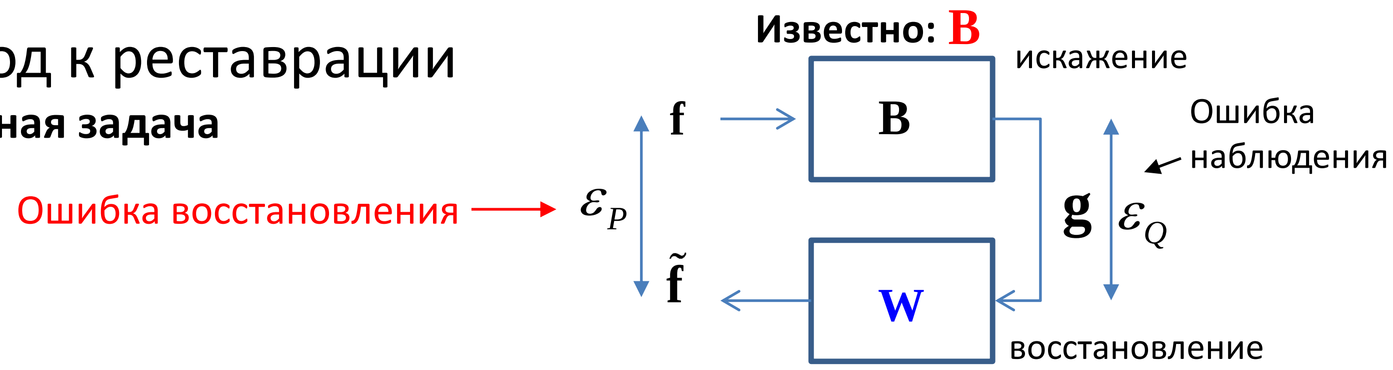
Действительно:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{-}\mathbf{g} + \mathbf{B}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p} = \mathbf{g} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{BB}^{-}\mathbf{B}\right) = \mathbf{g} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{B}\right) = \mathbf{g}$$

т.к. $\mathbf{BB}^{-} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{I}$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

2. Случай **недоопределённой** системы: $\boxed{P < Q, \ \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = P}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк, а вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки.

Пусть $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ - линейная комбинация независимых строк матрицы $\mathbf{B}$ с весами разложения $v - ?$

$$\Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}, \ \Rightarrow v = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

т.к. строки линейно независимы:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

б) Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, методом МНК:

$$\varepsilon_P\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) \to \min_{\mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_P(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = -2\mathbf{B}\left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\right) = -2\mathbf{Bf} + 2\mathbf{BB}^{\mathbf{T}}\mathbf{v} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{Bf} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{Bf} = \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{g}, \quad \left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right) \neq 0$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}$$

В общем случае, решение не единственно т.к. $\mathbf{g}$ - проекция из пространства $Q \times 1$ в пространство меньшей размерности $P \times 1$:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p}} \longleftarrow \text{произвольный вектор}$$

Действительно:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{BB}^{-}\mathbf{g} + \mathbf{B}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p} = \mathbf{g} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{BB}^{-}\mathbf{B}\right) = \mathbf{g} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{B}\right) = \mathbf{g}$$

т.к. $\mathbf{BB}^{-} = \mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{I}$

Обратно:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{g} \to \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g}$$

$$0 = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B}\right)\mathbf{p}$$

Решение с минимальной нормой: $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g}$

Для ***переопределенной*** системы решение единственно:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\right)\mathbf{p} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g} + \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)\mathbf{p} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$

Модель реставрации: $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

$P < Q, \ rank(\mathbf{B}) = P$

Для **недоопределённой** системы решение не единственное, оно выбираются с **минимальной** нормой $\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^T(\mathbf{BB}^T)^{-1}$.

Переформулируем задачу МНК для решения **недоопределённой** системы с **минимальной** нормой (со штрафом на норму решения). Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк ($\det(\mathbf{BB}^T) \neq 0$) , вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки. Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, с минимальной нормой $\|\tilde{\mathbf{f}}\|$ методом МНК:

$$\varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + \lambda\tilde{\mathbf{f}}^T\tilde{\mathbf{f}} \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}})}{\partial\tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} = \mathbf{B}_\lambda^+\mathbf{g}, \quad \mathbf{B}_\lambda^+ = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}$$

\- регуляризация, т.к. $\det(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) = 0$

Как найденное решение $\mathbf{B}_\lambda^+ = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}$ связано с решением $\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T(\mathbf{BB}^T)^{-1}$?

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$

Модель реставрации: $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

$P < Q, \ rank(\mathbf{B}) = P$

Для **недоопределённой** системы решение не единственное, оно выбираются с **минимальной** нормой $\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$.

Переформулируем задачу МНК для решения **недоопределённой** системы с **минимальной** нормой (со штрафом на норму решения). Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк ($\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) \neq 0$) , вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки. Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, с минимальной нормой $\|\tilde{\mathbf{f}}\|$ методом МНК:

$$\varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + \lambda \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{f}} \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}})}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{f}} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{g} = \mathbf{B}_\lambda^+\mathbf{g}, \quad \mathbf{B}_\lambda^+ = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}$$

- регуляризация, т.к. $\det(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) = 0$

Как найденное решение $\mathbf{B}_\lambda^+ = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}$ связано с решением $\mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$?

Докажем матричное тождество проталкивания (push-through identity, частная формула Вудбери):

$$\lambda\mathbf{U} + \mathbf{UVU} = \mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU}) = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})\mathbf{U}$$

$$(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})^{-1}\mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})^{-1} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})^{-1}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})\mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})^{-1}$$

Алгебраический подход к реставрации

Обратная линейная задача

Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \;\; \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \;\; \mathbf{g} : P \times 1, \;\; \mathbf{B} : P \times Q$

Модель реставрации: $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{bmatrix}$$

$P < Q, \;\; rank(\mathbf{B}) = P$

Для **недоопределённой** системы решение не единственное, оно выбираются с **минимальной** нормой $\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{T}(\mathbf{BB}^{T})^{-1}$.

Переформулируем задачу МНК для решения **недоопределённой** системы с **минимальной** нормой (со штрафом на норму решения). Матрица $\mathbf{B}$ содержит P линейно-независимых строк ($\det(\mathbf{BB}^T) \neq 0$) , вектор наблюдения $\mathbf{g}$ является проекцией эти строки. Найти решение $\tilde{\mathbf{f}}$, удовлетворяющее уравнению, с минимальной нормой $\|\tilde{\mathbf{f}}\|$ методом МНК:

$$\varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + \lambda \tilde{\mathbf{f}}^T\tilde{\mathbf{f}} \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_Q(\tilde{\mathbf{f}})}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = -2\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + 2\lambda\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{g} \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{\mathbf{f}} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{g} = \mathbf{B}_{\lambda}^{+}\mathbf{g}, \quad \mathbf{B}_{\lambda}^{+} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$$

- регуляризация, т.к. $\det(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) = 0$

Как найденное решение $\mathbf{B}_{\lambda}^{+} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ связано с решением $\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{T}(\mathbf{BB}^{T})^{-1}$?

Докажем матричное тождество проталкивания (push-through identity, частная формула Вудбери):

$$\lambda\mathbf{U} + \mathbf{UVU} = \mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU}) = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})\mathbf{U}$$

$$(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})^{-1}\mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})^{-1} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})^{-1}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})\mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})^{-1}$$

$\boxed{(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{UV})^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{VU})^{-1}}$ - push-through identity

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{U} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{V} = \mathbf{B} \end{matrix}\right] \Rightarrow (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{BB}^{\mathbf{T}})^{-1} = \mathbf{B}_{\lambda}^{-}$$

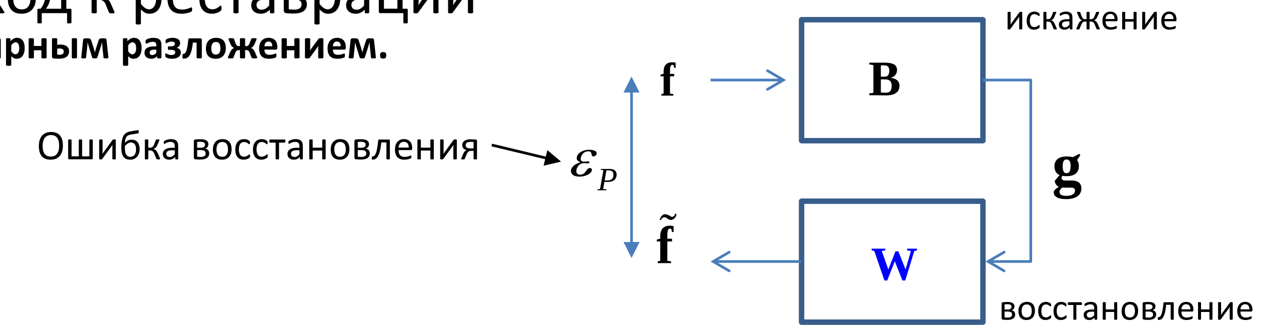
$\Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to0} \mathbf{B}_{\lambda}^{+} = \lim\limits_{\lambda\to0}\left[(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\right] = \lim\limits_{\lambda\to0}\left[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{BB}^{\mathbf{T}})^{-1}\right] = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}(\mathbf{BB}^{\mathbf{T}})^{-1} = \mathbf{B}^{-}$- решение существует, т.к. $\det(\mathbf{BB}^T) \neq 0$

- Решение для **недоопределённой** системы может быть найдено через регуляризированную обобщенно-обратную матрицу $\mathbf{B}_{\lambda}^{+}$ для **переопределенной** задачи.
- Используя регуляризацию, находится решения $\mathbf{B}_{\lambda}^{+}$ или $\mathbf{B}_{\lambda}^{-}$ для матрицы $\mathbf{B}$ с **неполным** рангом: $\det(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) = \det(\mathbf{BB}^T) = 0$.

Алгебраический подход к реставрации

Реставрация с сингулярным разложением.

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

3. Случай **неполного ранга**: $\boxed{\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{R}, \;\; \mathrm{R} < P, \;\; \mathrm{R} < Q :}$

$$\exists \quad \begin{array}{l} \mathbf{U} : P \times Q, \\ \mathbf{V} : Q \times P, : \\ \mathbf{\Lambda} : P \times Q \end{array} \quad \boxed{\mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \Lambda^{1/2}}$$

Унитарные матрицы:

$\mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \;\; \mathbf{VV}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

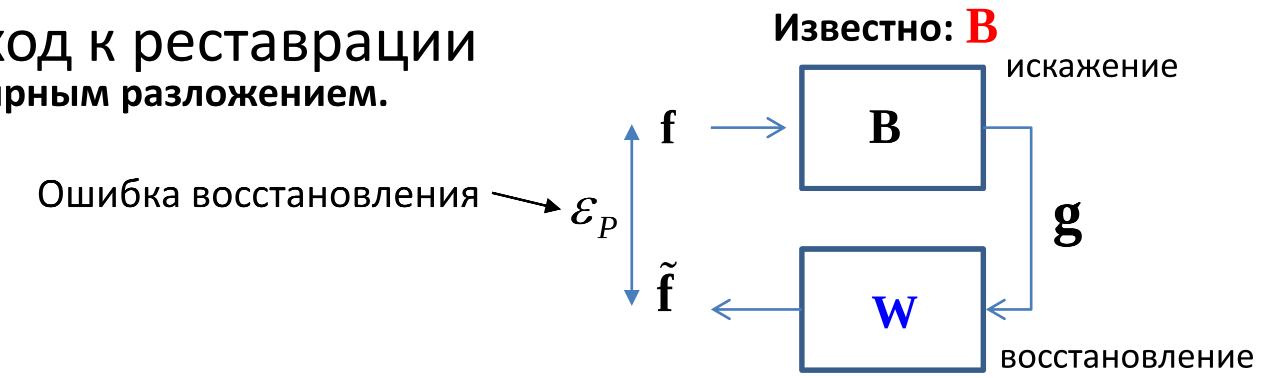
Диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$
состоит из **сингулярных** значений $\lambda^{1/2}$
матрицы $\mathbf{B}$. $\quad \mathrm{rank}(\Lambda^{1/2}) = \mathrm{R}$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{\lambda^{1/2}(1) \;\; \lambda^{1/2}(R)}}^{R} \; \overbrace{}^{Q-R} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda^{1/2}(1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \lambda^{1/2}(R) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right\} R \\ \} \; P-R \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T}$ **- сингулярное разложение**

Алгебраический подход к реставрации

Реставрация с сингулярным разложением.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}$, $\mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

3. Случай **неполного ранга**: $\boxed{\mathrm{rank}(\mathbf{B})=\mathrm{R},\ \mathrm{R} < P,\ \ \mathrm{R} < Q:}$

$$\exists \quad \begin{array}{l} \mathbf{U} : P \times Q, \\ \mathbf{V} : Q \times P, : \quad \boxed{\mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \Lambda^{1/2}} \\ \mathbf{\Lambda} : P \times Q \end{array}$$

Унитарные матрицы:

$\mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I},\ \mathbf{VV}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

Диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$
состоит из сингулярных значений $\lambda^{1/2}$
матрицы $\mathbf{B}$. $\quad \mathrm{rank}(\Lambda^{1/2})=\mathrm{R}$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda^{1/2}(1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \lambda^{1/2}(R) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} R \\ \} \ P-R \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T}$ **- сингулярное разложение**

$\mathbf{u}_n$ - столбцы матрицы $\mathbf{U}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{BB}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{BB}^T\mathbf{U} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} R \\ \} \ Q-R \end{array} \end{array}$$

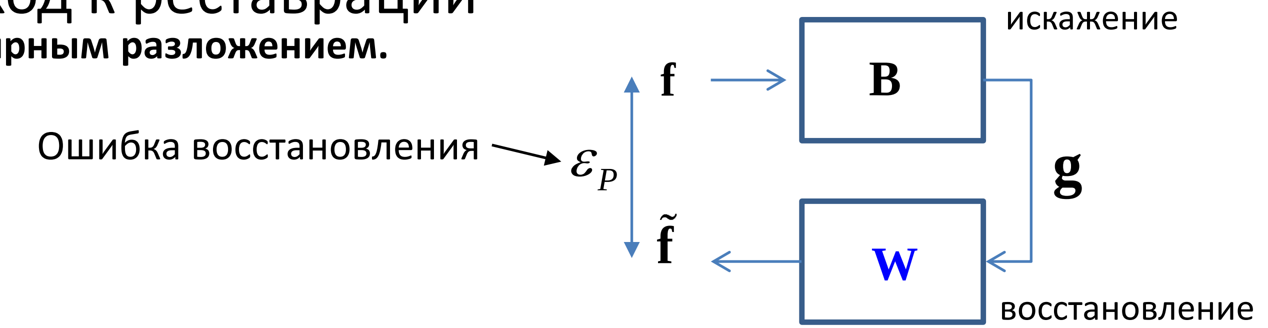
$\mathbf{v}_n$ - строки матрицы $\mathbf{V}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{BV} = \mathbf{V}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{BV} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{P-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} R \\ \} \ P-R \end{array} \end{array}$$

Алгебраический подход к реставрации

Реставрация с сингулярным разложением.

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

3. Случай **неполного ранга**: $\boxed{\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{R}, \ \mathrm{R} < P, \ \ \mathrm{R} < Q :}$

$$\exists \quad \begin{array}{l} \mathbf{U} : P \times Q, \\ \mathbf{V} : Q \times P, : \quad \boxed{\mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \Lambda^{1/2}} \\ \mathbf{\Lambda} : P \times Q \end{array}$$

Унитарные матрицы:

$\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \ \mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

Диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$ состоит из сингулярных значений $\lambda^{1/2}$ матрицы $\mathbf{B}$. $\quad \mathrm{rank}(\Lambda^{1/2}) = \mathrm{R}$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda^{1/2}(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda^{1/2}(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T}$ - сингулярное разложение

$\mathbf{u}_n$ - столбцы матрицы $\mathbf{U}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{U} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}R \\ \}Q-R \end{array} \end{array}$$

$\mathbf{v}_n$ - строки матрицы $\mathbf{V}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{P-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array} \end{array}$$

Сингулярное разложение – ряд матриц единичного ранга с весами сингулярных чисел:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \qquad \Rightarrow \Lambda^{1/2} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2} \underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{u}_i}_{} \underbrace{\mathbf{v}_i^T\mathbf{V}}_{}$$

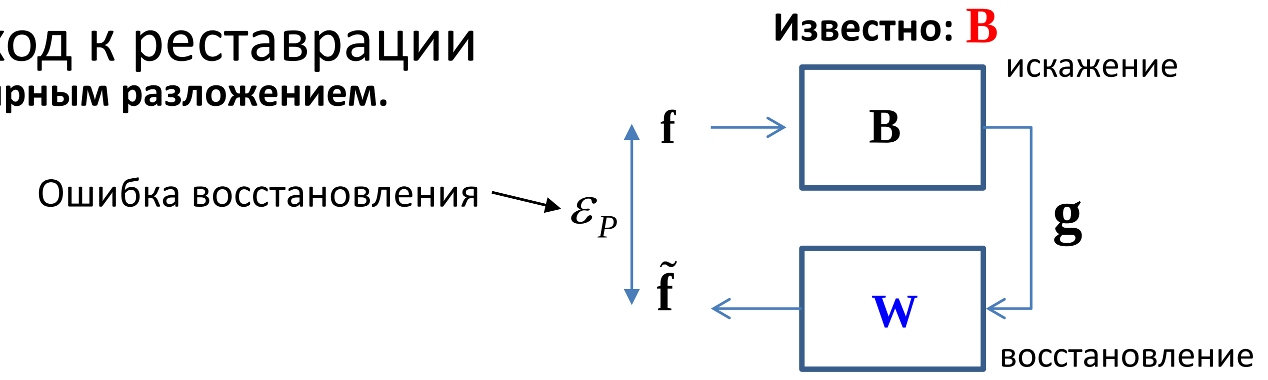
Вектор-строка

Вектор-столбец, i-элементы которых единица, остальные нули

Гнеушев А.Н. Обработка изображений в системах искусственного интеллекта. МФТИ, ИС. 2025.

Алгебраический подход к реставрации

Реставрация с сингулярным разложением.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf}$, $\mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg}$

3. Случай **неполного ранга**: $\boxed{\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{R},\ \mathrm{R} < P,\ \mathrm{R} < Q:}$

$$\exists \quad \begin{matrix} \mathbf{U} : P \times Q, \\ \mathbf{V} : Q \times P, : \\ \mathbf{\Lambda} : P \times Q \end{matrix} \quad \boxed{\mathbf{U}^T\mathbf{BV} = \Lambda^{1/2}}$$

Унитарные матрицы:

$\mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I},\ \mathbf{VV}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

Диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$ состоит из сингулярных значений $\lambda^{1/2}$ матрицы $\mathbf{B}$. $\mathrm{rank}(\Lambda^{1/2}) = \mathrm{R}$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} \lambda^{1/2}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{1/2}(R) \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T}$ - сингулярное разложение

$\mathbf{u}_n$ - столбцы матрицы $\mathbf{U}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{BB}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{BB}^T\mathbf{U} = \Lambda = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{Q-R} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} \lambda(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda(R) \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}R \\ \}Q-R \end{array} \end{array}$$

$\mathbf{v}_n$ - строки матрицы $\mathbf{V}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{BV} = \mathbf{V}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{BV} = \Lambda = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{R} & \overbrace{\qquad}^{P-R} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} \lambda(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda(R) \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array} \end{array}$$

Сингулярное разложение – ряд матриц единичного ранга с весами сингулярных чисел:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2}\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T, \qquad \Rightarrow \Lambda^{1/2} = \mathbf{U}^T\mathbf{BV} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2}\underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{u}_i}\underbrace{\mathbf{v}_i^T\mathbf{V}}$$

Вектор-строка

Вектор-столбец, i-элементы которых единица, остальные нули

Обратная матрица:

$$\mathbf{g} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{V}\Lambda^{-1/2}\mathbf{U}^T\mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{V}\Lambda^{-1/2}\mathbf{U}^T} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^T$$

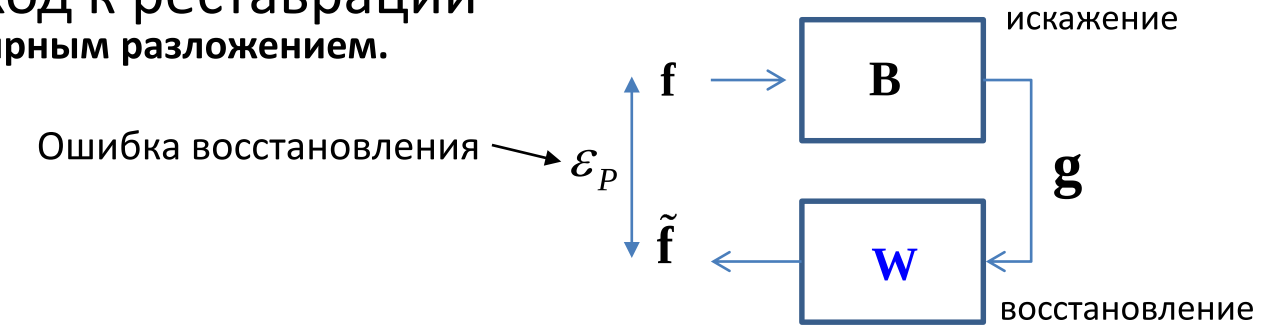
$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^- g = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2}\left(\mathbf{u}_i^T\mathbf{g}\right)\mathbf{v}_i$$

скаляр

Алгебраический подход к реставрации

Реставрация с сингулярным разложением.

Известно: $\mathbf{B}$



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,$

$\mathbf{g} : P \times 1,$

$\mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

Модель реставрации:

$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g}$

3. Случай **неполного ранга**: $\boxed{\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{R}, \;\; \mathrm{R} < P, \;\; \mathrm{R} < Q :}$

$$\exists \quad \begin{array}{l} \mathbf{U} : P \times Q, \\ \mathbf{V} : Q \times P, : \\ \mathbf{\Lambda} : P \times Q \end{array} \quad \boxed{\mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \Lambda^{1/2}}$$

Унитарные матрицы:

$\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \;\; \mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$

Диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$ состоит из сингулярных значений $\lambda^{1/2}$ матрицы $\mathbf{B}$. $\quad \mathrm{rank}(\Lambda^{1/2}) = \mathrm{R}$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\lambda^{1/2}(1) \;\; \lambda^{1/2}(R)}}^{R} & \overbrace{\hphantom{0}}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda^{1/2}(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda^{1/2}(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T}$ - сингулярное разложение

$\mathbf{u}_n$ - столбцы матрицы $\mathbf{U}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{U} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\lambda(1) \;\; \lambda(R)}}^{R} & \overbrace{\hphantom{0}}^{Q-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}R \\ \}Q-R \end{array}$$

$\mathbf{v}_n$ - строки матрицы $\mathbf{V}$, собственные вектора матрицы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda, \quad \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\lambda(1) \;\; \lambda(R)}}^{R} & \overbrace{\hphantom{0}}^{P-R} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda(1) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda(R) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}R \\ \}P-R \end{array}$$

Сингулярное разложение – ряд матриц единичного ранга с весами сингулярных чисел:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \qquad \Rightarrow \Lambda^{1/2} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{1/2} \underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{u}_i}_{\text{Вектор-столбец, i-элементы которых единица, остальные нули}} \underbrace{\mathbf{v}_i^T\mathbf{V}}_{\text{Вектор-строка}}$$

Обратная матрица:

$$\mathbf{g} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{V}^T\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{V}\Lambda^{-1/2}\mathbf{U}^T\mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{V}\Lambda^{-1/2}\mathbf{U}^T} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^- g = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{g} = \sum_{i=1}^{R} \lambda_i^{-1/2} \underbrace{\left(\mathbf{u}_i^T\mathbf{g}\right)}_{\text{скаляр}} \mathbf{v}_i$$

Алгоритм последовательного оценивания:

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = \lambda_1^{-1/2}\left(\mathbf{u}_1^T\mathbf{g}\right)\mathbf{v}_1$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \tilde{\mathbf{f}}_{k-1} + \lambda_k^{-1/2}\left(\mathbf{u}_k^T\mathbf{g}\right)\mathbf{v}_k$$

Алгебраический подход к реставрации

Регрессионная оценка. Модель с аддитивным шумом.

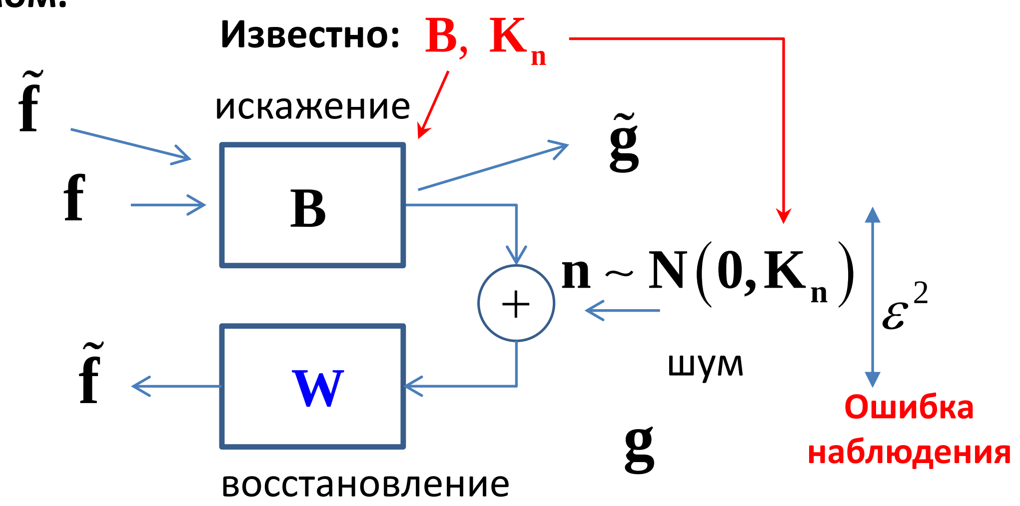
Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{K}_\mathbf{n}\right), \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g},}$ $\mathbf{W} - ?$



1. Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\varepsilon\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1} \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad \left(\max_{\tilde{\mathbf{f}}} e^{-\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1} \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{K}_\mathbf{n}\right) \right)$$

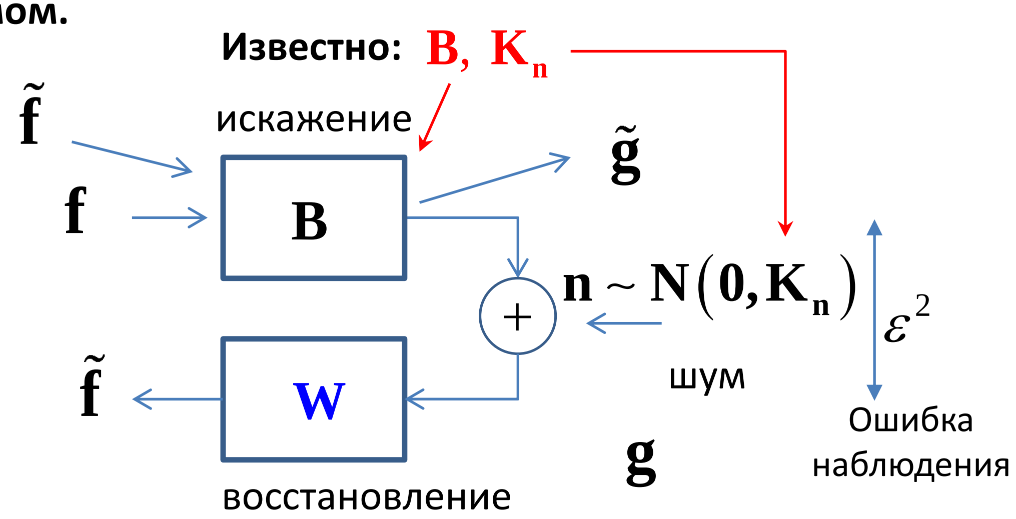
Максимизация правдоподобия

$$\frac{\partial \varepsilon\left(\tilde{\mathbf{f}}\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{g}$$

Алгебраический подход к реставрации

Регрессионная оценка. Модель с аддитивным шумом.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n},\quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(\mathbf{0},\mathbf{K_n}),\quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q\times 1,\ \mathbf{g} : P\times 1,\ \mathbf{B} : P\times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg},}\ \mathbf{W} - ?$

1. Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{K_n^{-1}} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad \left(\max_{\tilde{\mathbf{f}}} e^{-(\mathbf{g}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{K_n^{-1}} (\mathbf{g}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0},\mathbf{K_n}) \right)$$

Максимизация правдоподобия

$$\frac{\partial \varepsilon(\tilde{\mathbf{f}})}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B^T K_n^{-1}}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) = -2\mathbf{B^T K_n^{-1} g} + 2\mathbf{B^T K_n^{-1} B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B^T K_n^{-1} B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B^T K_n^{-1} g}, \quad \text{при } (\mathbf{B^T K_n^{-1} B}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{B^T K_n^{-1} B})^{-1} \mathbf{B^T K_n^{-1} g} = \mathbf{B^+ g}$$

$$\mathbf{B^+} = \boxed{(\mathbf{B^T K_n^{-1} B})^{-1} \mathbf{B^T K_n^{-1}}}$$

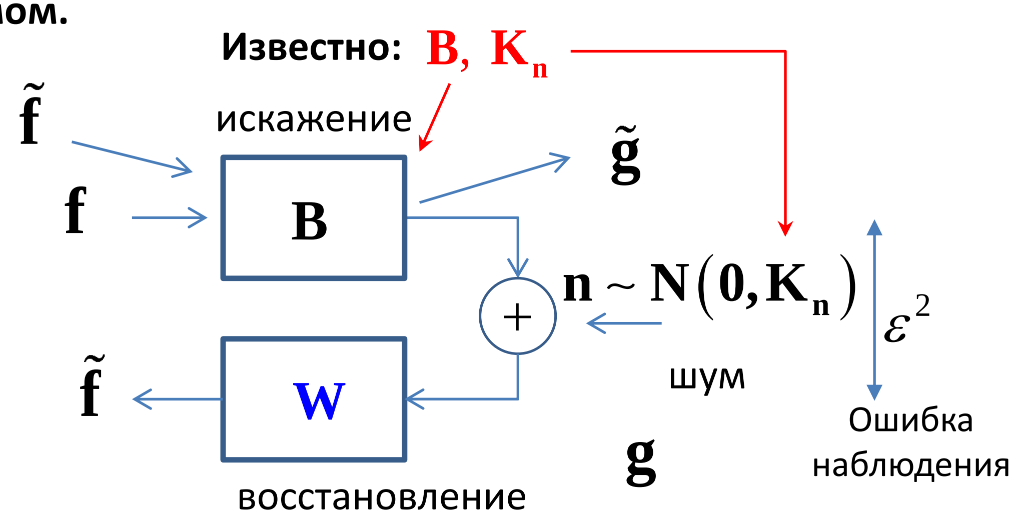
2. Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\boxed{\mathbf{B^-} = \mathbf{B}^T (\mathbf{BB}^T + \mathbf{K}_n)^{-1}} \qquad (\mathbf{BB}^T + \mathbf{K}_n) \neq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B^- g} + (\mathbf{I} - \mathbf{B^- B})\mathbf{p}$$

Алгебраический подход к реставрации

Регрессионная оценка. Модель с аддитивным шумом.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_\mathbf{n}), \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g},}$ $\mathbf{W} - ?$

1. Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad \left(\max_{\tilde{\mathbf{f}}} e^{-(\mathbf{g}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1} (\mathbf{g}-\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_\mathbf{n}) \right)$$

Максимизация правдоподобия

$$\frac{\partial \varepsilon(\tilde{\mathbf{f}})}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) = -2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{g}, \quad \text{при } (\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{g}$$

$$\mathbf{W} = \boxed{\mathbf{B}^{+} = (\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\mathbf{n}^{-1}}$$

2. Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\boxed{\mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n)^{-1}} \quad \text{при } (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n) \neq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{g} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-}\mathbf{B})\mathbf{p}$$

при $\mathbf{K}_\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}^2\mathbf{I}$ (белый шум)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{B}^{+} = (\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}^2\mathbf{I})^{-1} \end{array}$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{B}^{+}\mathbf{n} = \mathbf{f} + \mathbf{B}^{+}\mathbf{n}$$

$$\triangle\mathbf{f} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{n}$$

Число обусловленности

$$\longrightarrow \frac{\|\triangle\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} = \frac{\|\mathbf{B}^{+}\mathbf{n}\|}{\|\mathbf{f}\|} \leq \overbrace{\|\mathbf{B}^{+}\|\|\mathbf{B}\|}^{\text{Число обусловленности}} \frac{\|\mathbf{n}\|}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{\lambda_{\max}^{1/2}}{\lambda_{\min}^{1/2}} \frac{\|\mathbf{n}\|}{\|\mathbf{g}\|}$$

Винеровская оценка.

Модель наблюдения:

$\boxed{\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n},}\quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n}), \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,\ \mathbf{g} : P \times 1,\ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

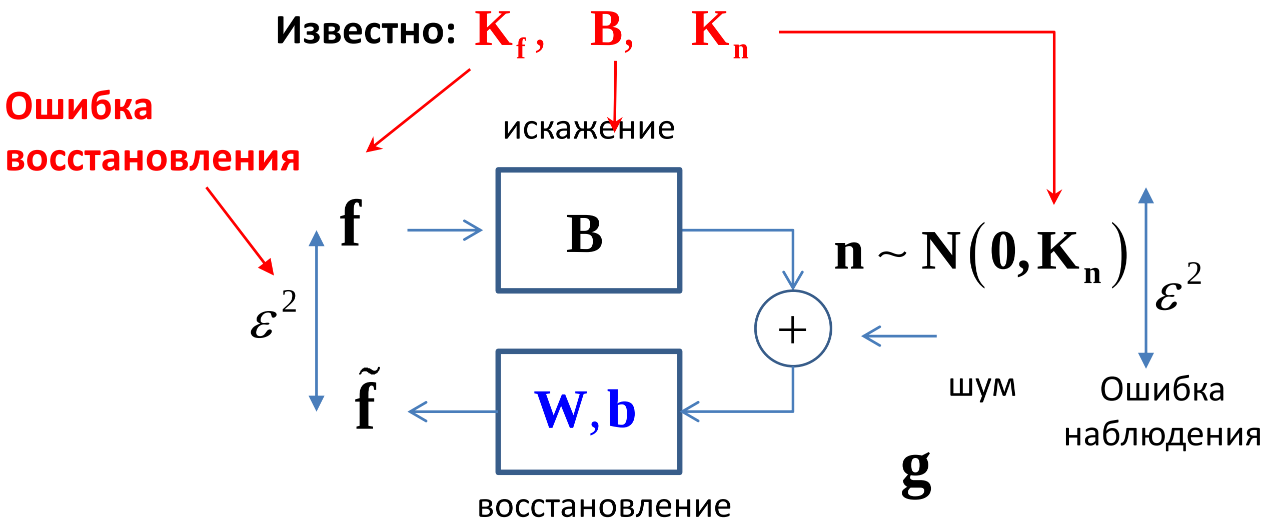
Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg} + \mathbf{b},}\quad \mathbf{W}, \mathbf{b} - ?$

1. Для **недоопределенной** системы:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)\right] \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

1. $M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] = M\left[\mathbf{f}\right]$ - условие сохранения среднего

2. $M\left[\left(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$ - условие ортогональности



Алгебраический подход к фильтрации.
Винеровская оценка.

Модель наблюдения:

$\boxed{\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{n},}\quad \mathbf{n} : \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{\mathbf{n}}\right),\quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q\times 1,\ \mathbf{g} : P\times 1,\ \mathbf{B} : P\times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \mathbf{b},}\quad \mathbf{W}, \mathbf{b} - ?$

1. Для **недоопределенной** системы:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)\right] \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

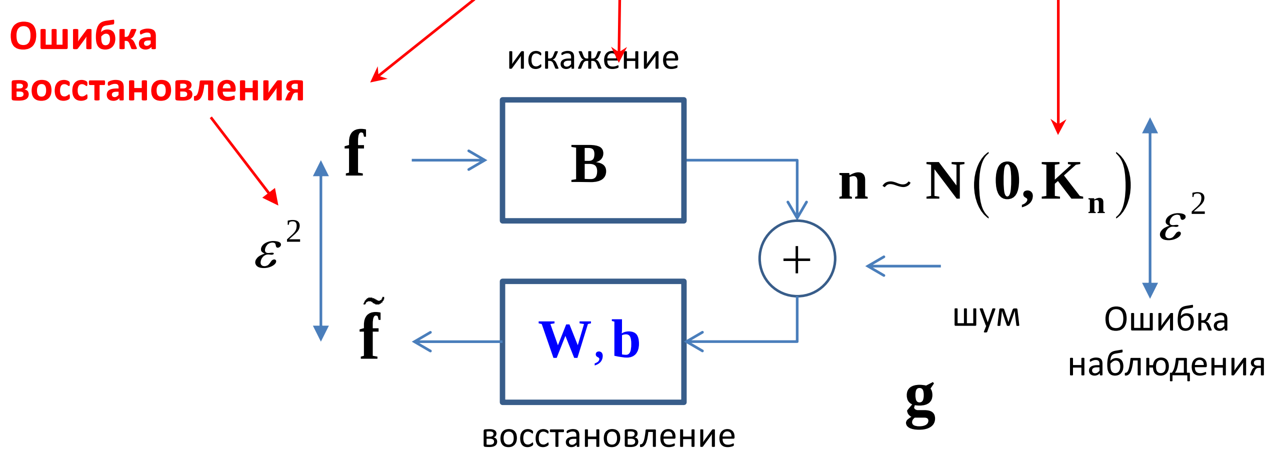
1. $M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] = M\left[\mathbf{f}\right]$ - условие сохранения среднего

2. $M\left[\left(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$ - условие ортогональности

$$\Rightarrow \mathbf{b} = M\left[\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{W}\mathbf{g}\right] = M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] - M\left[\mathbf{W}\mathbf{g}\right] = M\left[\mathbf{f}\right] - \mathbf{W}M\left[\mathbf{g}\right]$$

$$\Rightarrow M\left[\left(\mathbf{W}\mathbf{g} + \mathbf{b} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

Известно: $\mathbf{K}_{\mathbf{f}}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}_{\mathbf{n}}$



Алгебраический подход к фильтрации.
Винеровская оценка.

Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(0, \mathbf{K_n}), \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg} + \mathbf{b},}$ $\quad \mathbf{W}, \mathbf{b} - ?$

1. Для **недоопределенной** системы:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)\right] \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

1. $M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] = M\left[\mathbf{f}\right]$ - условие сохранения среднего

2. $M\left[\left(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$ - условие ортогональности

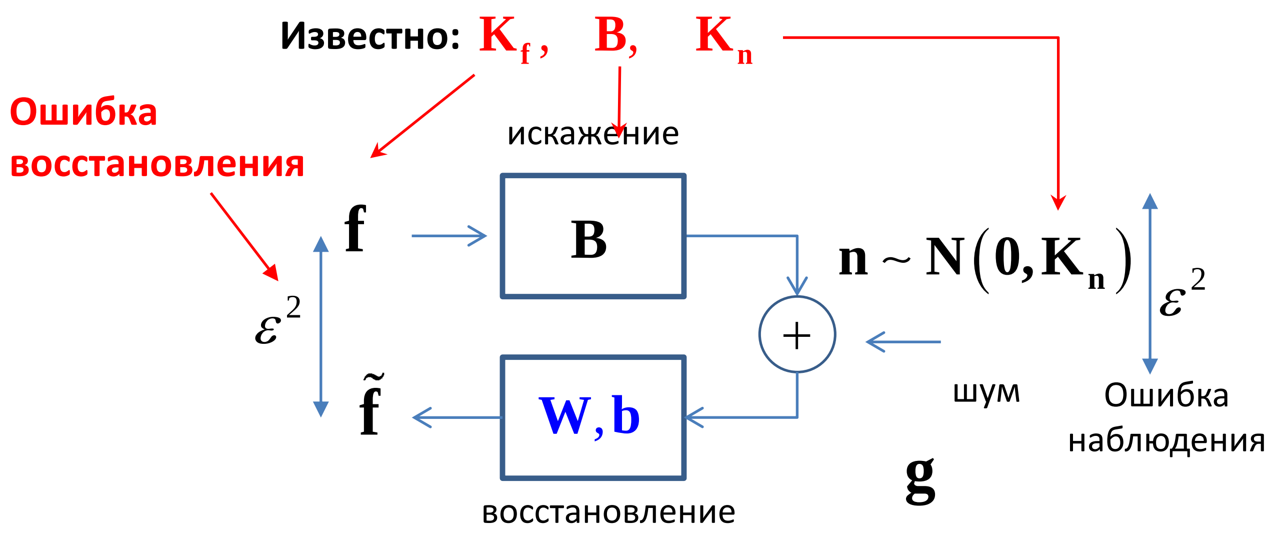
$$\Rightarrow \mathbf{b} = M\left[\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{Wg}\right] = M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] - M\left[\mathbf{Wg}\right] = M\left[\mathbf{f}\right] - \mathbf{W}M\left[\mathbf{g}\right]$$

$$\Rightarrow M\left[\left(\mathbf{Wg} + \mathbf{b} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$$M\left[\left(\mathbf{Wg} + M\left[\mathbf{f}\right] - \mathbf{W}M\left[\mathbf{g}\right] - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

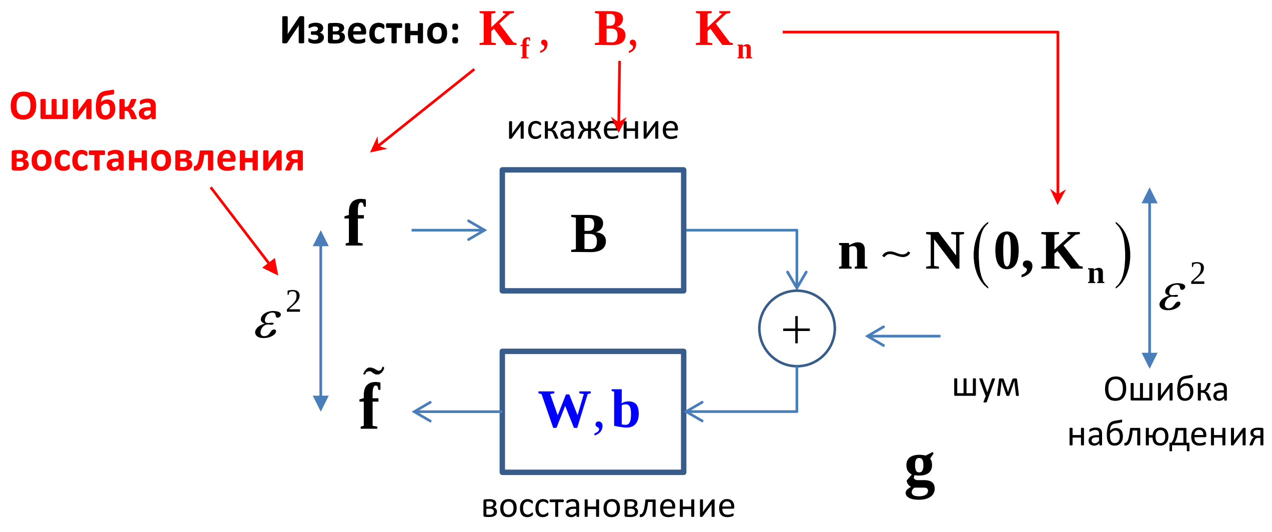
$$M\left[\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right) - \left(\mathbf{f} - M\left[\mathbf{f}\right]\right)\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$$\mathbf{W}M\left[\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] - M\left[\left(\mathbf{f} - M\left[\mathbf{f}\right]\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$



Алгебраический подход к фильтрации.

Винеровская оценка.



Модель наблюдения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{K_n}), \quad \mathbf{f} - ?$$

$\mathbf{f} : Q \times 1,\ \mathbf{g} : P \times 1,\ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg} + \mathbf{b},}$ $\quad \mathbf{W},\mathbf{b} - ?$

1. Для **недоопределенной** системы:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)^T \left(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\right)\right] \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$$

1. $M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] = M\left[\mathbf{f}\right]$ - условие сохранения среднего

2. $M\left[\left(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$ - условие ортогональности

$$\Rightarrow \mathbf{b} = M\left[\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{Wg}\right] = M\left[\tilde{\mathbf{f}}\right] - M\left[\mathbf{Wg}\right] = M\left[\mathbf{f}\right] - \mathbf{W}M\left[\mathbf{g}\right]$$

$$\Rightarrow M\left[\left(\mathbf{Wg} + \mathbf{b} - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$$M\left[\left(\mathbf{Wg} + M\left[\mathbf{f}\right] - \mathbf{W}M\left[\mathbf{g}\right] - \mathbf{f}\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$$M\left[\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right) - \left(\mathbf{f} - M\left[\mathbf{f}\right]\right)\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$$\mathbf{W}M\left[\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] - M\left[\left(\mathbf{f} - M\left[\mathbf{f}\right]\right)\left(\mathbf{g} - M\left[\mathbf{g}\right]\right)^T\right] = 0$$

$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{K}_{fg}\mathbf{K}_{gg}^{-1}}$ - Винеровская оценка

$$\mathbf{K}_{gg} = M\left[\left(\mathbf{Bf} + \mathbf{n} - \mathbf{B}M\left[\mathbf{f}\right]\right)\left(\mathbf{Bf} + \mathbf{n} - \mathbf{B}M\left[\mathbf{f}\right]\right)^T\right] = \mathbf{BK}_f\mathbf{B}^T + \mathbf{K_n}$$

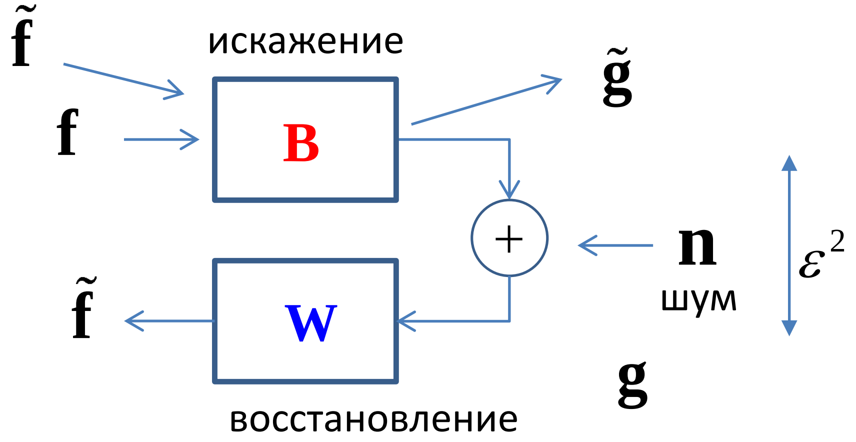
$$\mathbf{K}_{fg} = M\left[\left(\mathbf{f} - M\left[\mathbf{f}\right]\right)\left(\mathbf{Bf} + \mathbf{n} - \mathbf{B}M\left[\mathbf{f}\right]\right)^T\right] = \mathbf{K}_f\mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{B}^- = \mathbf{K}_{fg}\mathbf{K}_{gg}^{-1} = \boxed{\mathbf{K}_f\mathbf{B}^T\left(\mathbf{BK}_f\mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n\right)^{-1}}$$

2. Для **переопределенной** системы:

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{K}_{fg}\mathbf{K}_{gg}^{-1} = \boxed{\left(\mathbf{B}^T\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{K}_f^{-1}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_n^{-1}}$$

Реставрация со сглаживанием. Регуляризация по Тихонову.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n}), \quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{M} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \text{ при ограничении } \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{f}} = d$$ - фиксированный показатель гладкости/ВЧ изображения

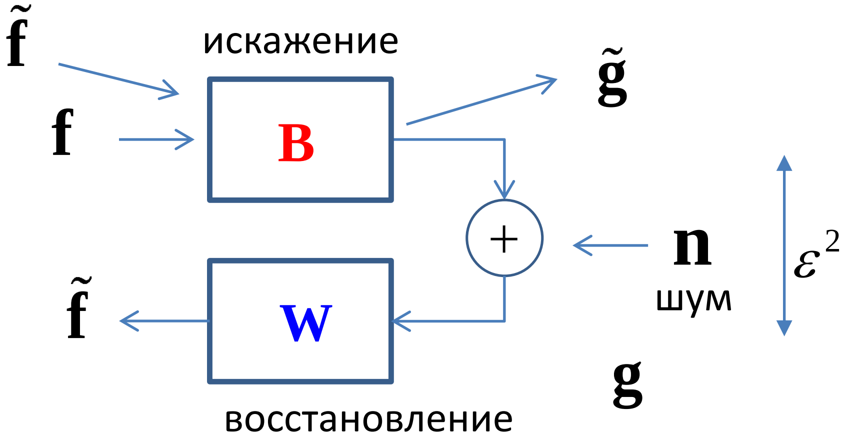
ВЧ фильтр

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Модель системы обработки изображения

Реставрация со сглаживанием.
Регуляризация по Тихонову.



Модель наблюдения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n},\quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_\mathbf{n}),\quad \mathbf{f} - ?$$

$\mathbf{f} : Q \times 1,\ \mathbf{g} : P \times 1,\ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{M} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \text{ при ограничении } \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{f}} = d$$

- фиксированный показатель гладкости/ВЧ изображения

$$G(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{M} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + \gamma (\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{f}} - d) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}, \gamma}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) = -2\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + \gamma \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

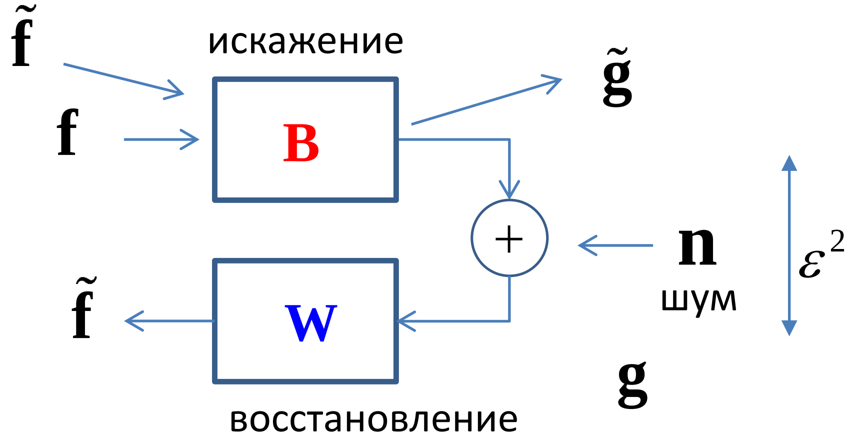
$$\Rightarrow (\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma\mathbf{S})\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{g},\quad \text{при } (\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma\mathbf{S}) \neq 0$$

ВЧ фильтр

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Реставрация со сглаживанием. Регуляризация по Тихонову.



Модель наблюдения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} : \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{f} - ?$$

$\mathbf{f} : Q \times 1, \ \mathbf{g} : P \times 1, \ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{f}}) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{M} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \text{ при ограничении } \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{f}} = d$$

- фиксированный показатель гладкости/ВЧ изображения

$$G(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma) = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}})^T \mathbf{M} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) + \gamma (\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{f}} - d) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}, \gamma}$$

$$\frac{\partial G(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}) = -2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{g} + 2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} + \gamma \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma \mathbf{S})\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{g}, \quad \text{при } (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma \mathbf{S}) \neq 0$$

ВЧ фильтр

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma \mathbf{S})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M} g, \quad \boxed{\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T\mathbf{M}\mathbf{B} + \gamma \mathbf{S})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}}$$

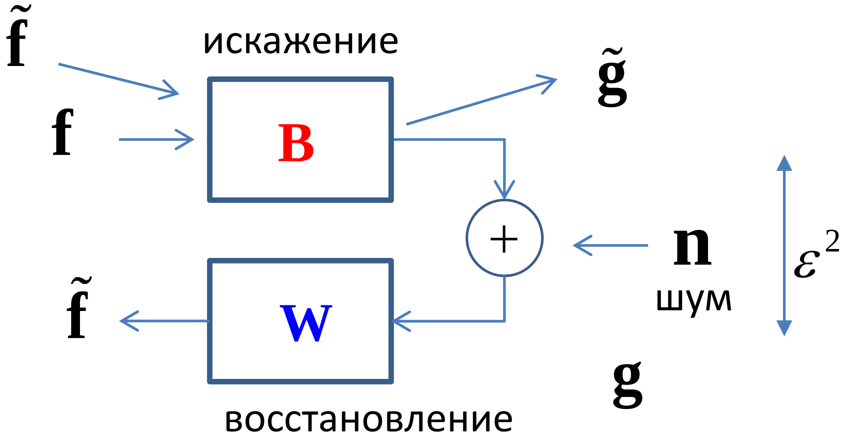
Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T + \gamma \mathbf{M}^{-1})^{-1} g, \quad \boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T + \gamma \mathbf{M}^{-1})^{-1}}$$

При $\gamma = 0, \ \mathbf{S} = \mathbf{I}, \ \mathbf{M} = \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1} \Rightarrow \ \mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1}, \ \mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$ - модель **регрессии**

При $\gamma = 1, \ \mathbf{S} = \mathbf{K}_f^{-1}, \ \mathbf{M} = \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1} \Rightarrow \ \mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{K}_f^{-1})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1}, \ \mathbf{B}^- = \mathbf{K}_f \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{K}_f \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n)^{-1} = \boxed{\dfrac{\mathbf{K}_f \mathbf{B}^T}{\mathbf{B}\mathbf{K}_f \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n}}$ - **Винеровская** оценка

Реставрация со сглаживанием. Регуляризация по Тихонову.



Модель наблюдения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n},\quad \mathbf{n} : \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{K_n}\right),\quad \mathbf{f} - ?$$

$\mathbf{f} : Q \times 1,\ \mathbf{g} : P \times 1,\ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекци $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

$$\varepsilon\left(\tilde{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \text{ при ограничении } \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = d$$

- фиксированный показатель гладкости/ВЧ изображения

$$G\left(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma\right) = \left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) + \gamma\left(\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} - d\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}, \gamma}$$

$$\frac{\partial G\left(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma\right)}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{B^T M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = -2\mathbf{B^T Mg} + 2\mathbf{B^T MB}\tilde{\mathbf{f}} + \gamma \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{B^T MB} + \gamma \mathbf{S}\right)\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B^T Mg},\quad \text{при } \left(\mathbf{B^T MB} + \gamma \mathbf{S}\right) \neq 0$$

Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{MB} + \gamma \mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M} g,\ \boxed{\mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{MB} + \gamma \mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}}$$

Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BS}^{-1}\mathbf{B}^T + \gamma \mathbf{M}^{-1}\right)^{-1} g,\ \boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BS}^{-1}\mathbf{B}^T + \gamma \mathbf{M}^{-1}\right)^{-1}}$$

При $\gamma = 0,\ \mathbf{S} = \mathbf{I},\ \mathbf{M} = \mathbf{K_n^{-1}} \Rightarrow\ \mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{K_n^{-1}} \mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K_n^{-1}},\ \ \mathbf{B}^- = \mathbf{B}^T \left(\mathbf{BB}^T\right)^{-1}$ - модель **регрессии**

При $\gamma = 1,\ \mathbf{S} = \mathbf{K}_f^{-1},\ \mathbf{M} = \mathbf{K_n^{-1}} \Rightarrow\ \mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{K_n^{-1}} \mathbf{B} + \mathbf{K}_f^{-1}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K_n^{-1}},\ \ \mathbf{B}^- = \mathbf{K}_f \mathbf{B}^T \left(\mathbf{BK}_f \mathbf{B}^T + \mathbf{K}_n\right)^{-1}$ - **Винеровская** оценка

Двойственная задача:

$\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}}$ - минимизация ВЧ, максимизация гладкости

при ограничении $\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = e$ - остаточная ошибка

$$G\left(\tilde{\mathbf{f}}, \gamma\right) = \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} + \gamma\left(\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^T \mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) - e\right) \to \min_{\tilde{\mathbf{f}}, \gamma}$$

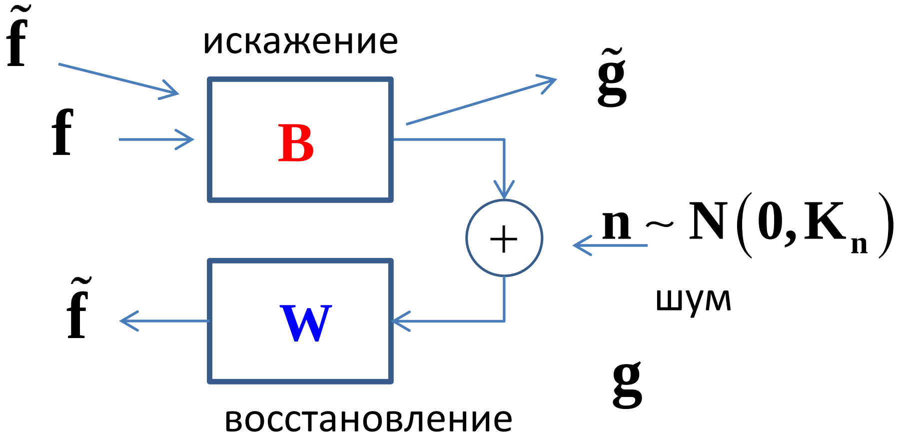
Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{MB} + (1/\gamma)\mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M} g,\ \boxed{\mathbf{B}^+ = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{MB} + (1/\gamma)\mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}}$$

Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BS}^{-1}\mathbf{B}^T + (1/\gamma)\mathbf{M}^{-1}\right)^{-1} g,\ \boxed{\mathbf{B}^- = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{BS}^{-1}\mathbf{B}^T + (1/\gamma)\mathbf{M}^{-1}\right)^{-1}}$$

Алгебраический подход к фильтрации.



Модель наблюдения:

$\mathbf{g} = \mathbf{Bf} + \mathbf{n},\quad \mathbf{n} : \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}_n),\quad \mathbf{f} - ?$

$\mathbf{f} : Q \times 1,\ \mathbf{g} : P \times 1,\ \mathbf{B} : P \times Q$ - модель искажения известна

$\mathbf{g}$ – зашумленный результат проекции $\mathbf{f}$ на строчки матирицы $\mathbf{B}$

Модель реставрации: $\boxed{\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Wg},}$ $\mathbf{W} - ?$

1. Случай **переопределенной** системы: $P \geq Q$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Модель без шума, **обобщенно-обратная матрица**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{Q}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}_{\lambda}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}) < \mathrm{Q}$$

б) Модель с шумом $\mathbf{n} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n})$, **регрессионная оценка**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{B}) = \mathrm{Q}$$

в) Модель с шумом $\mathbf{n} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n})$ и автокорреляцией $\mathbf{K_f}$,
Винеровская оценка:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{T}\mathbf{K}_{n}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{K}_{f}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{K}_{n}^{-1}$$

г) Модель с заданным показателем гладкости решения d или с дисперсией шума e, оценка с **регуляризацией по Тихонову**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{+} = \left(\mathbf{B}^{T}\mathbf{MB} + \gamma\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{M}$$

при условии: $\tilde{\mathbf{f}}^{T}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = d$ или $\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^{T}\mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = e$

2. Случай **недоопределенной** системы: $P < Q$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{bmatrix}$$

а) Модель без шума, **обобщенно-обратная матрица**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{P}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}_{\lambda}^{-} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}) < \mathrm{P}$$

б) Модель с шумом $\mathbf{n} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n})$, **регрессионная оценка**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{B}^{T}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{T} + \mathbf{K}_{n}\right)^{-1} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{T} + \mathbf{K}_{n}) = \mathrm{P}$$

в) Модель с шумом $\mathbf{n} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K_n})$ и автокорреляцией $\mathbf{K_f}$,
Винеровская оценка:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{K}_{f}\mathbf{B}^{T}\left(\mathbf{B}\mathbf{K}_{f}\mathbf{B}^{T} + \mathbf{K}_{n}\right)^{-1}$$

г) Модель с заданным показателем гладкости решения d или с дисперсией шума e, оценка с **регуляризацией по Тихонову**:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^{T}\left(\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^{T} + \gamma\mathbf{M}^{-1}\right)^{-1}$$

при условии: $\tilde{\mathbf{f}}^{T}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{f}} = d$ или $\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right)^{T}\mathbf{M}\left(\mathbf{g} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}\right) = e$