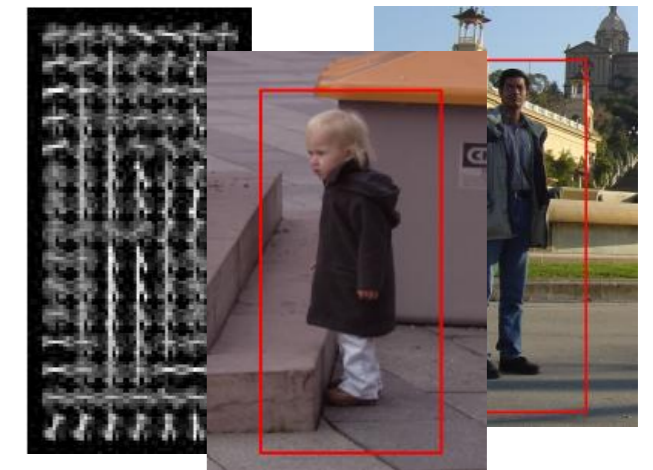
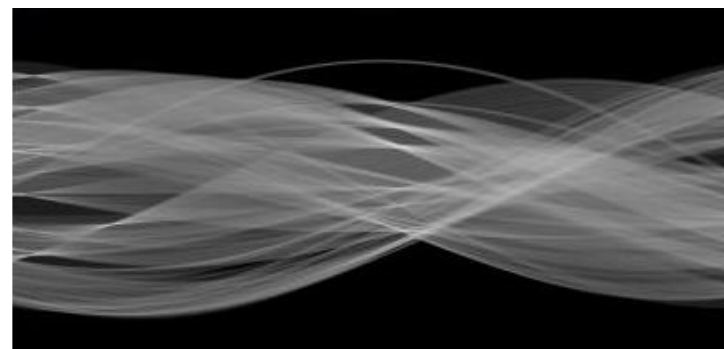
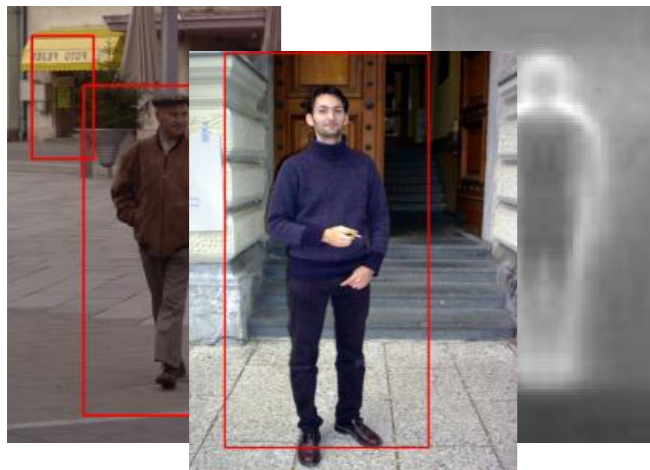


Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

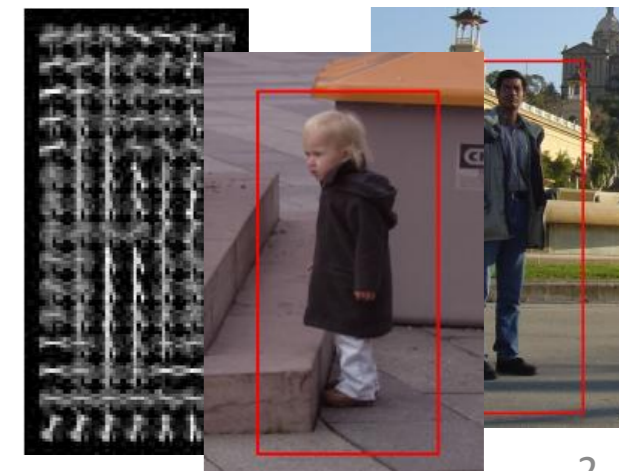
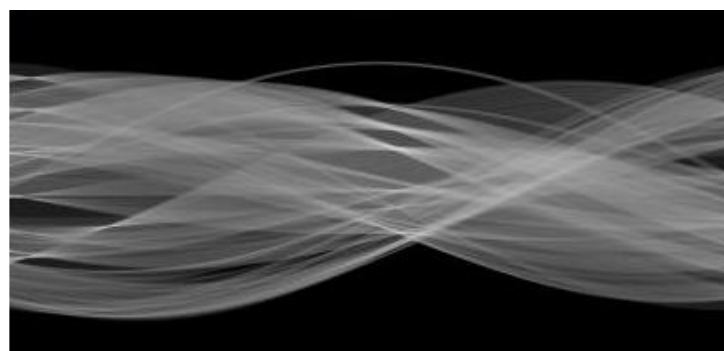
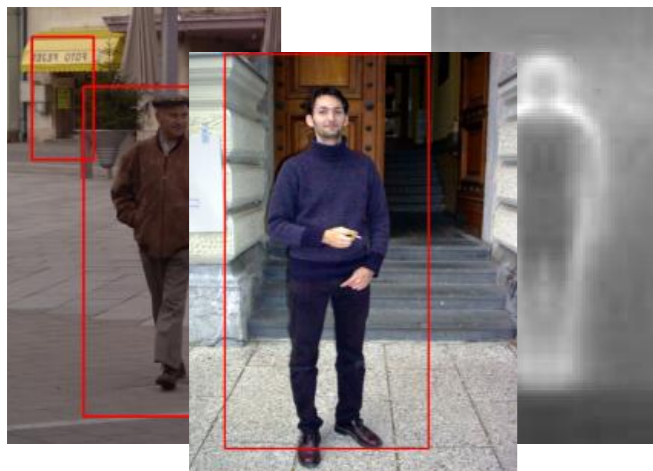
Гнеушев Александр Николаевич 



Модели линейных систем обработки изображения

Тема 4

25.03.2026



Пространственная обработка изображения

Введение в пространственную фильтрацию. Свертка.

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \langle f(x-n, y-m), h(n, m) \rangle_{n,m} = \sum_{n=-a}^a \sum_{m=-b}^b h_{n,m} f(x-n, y-m) = \sum_{n=-a}^a \sum_{m=-b}^b f(x-n, y-m) h(n, m) =$$

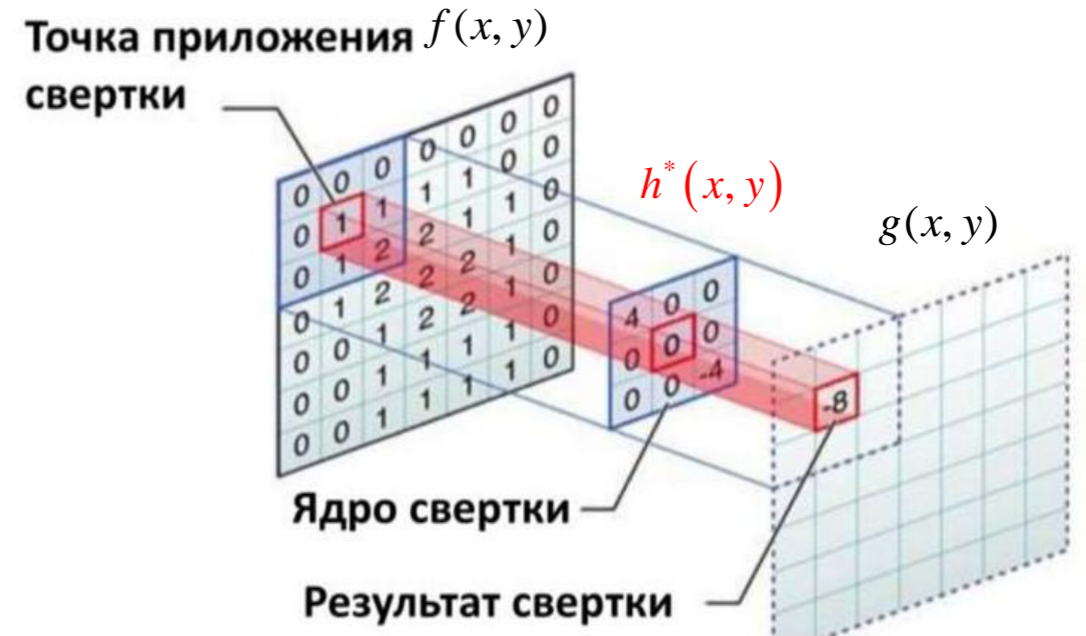
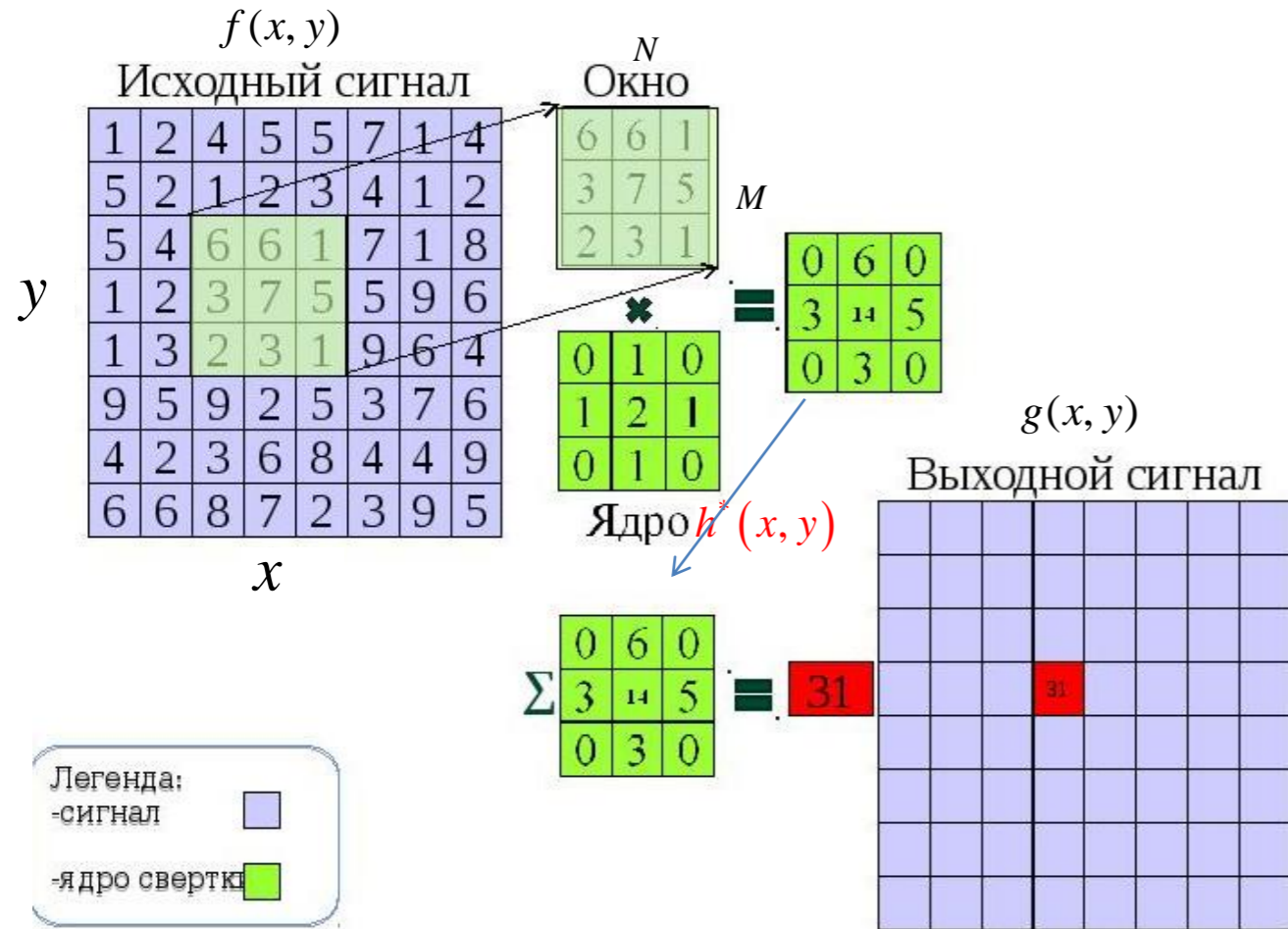
$$= \sum_{n=-a}^a \sum_{m=-b}^b f(x+n, y+m) h(-n, -m) = \sum_{n=-a}^a \sum_{m=-b}^b f(x+n, y+m) h^*(n, m)$$

Взвешенная сумма – использование контекста для каждой точки (x, y)

Ядро, центрированное в окне $N \times M$:

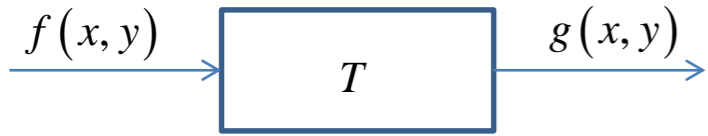
$$a = (N-1)/2,$$

$$b = (M-1)/2$$



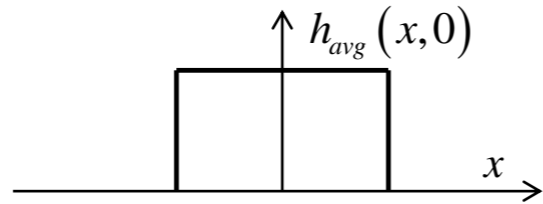
Пространственная обработка изображения

Сглаживание через усреднение

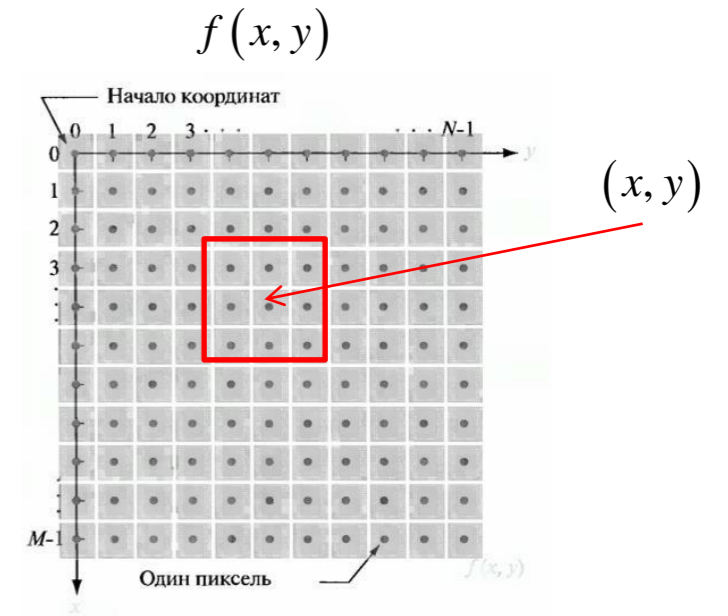


$$T: g(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{avg}(n, m) =$$
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}(-n, -m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}^*(n, m)$$

$$h_{avg}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

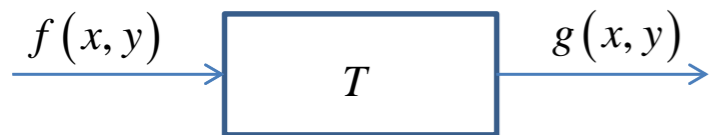


$$h_{avg}(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Пространственная обработка изображения

Сглаживание через усреднение

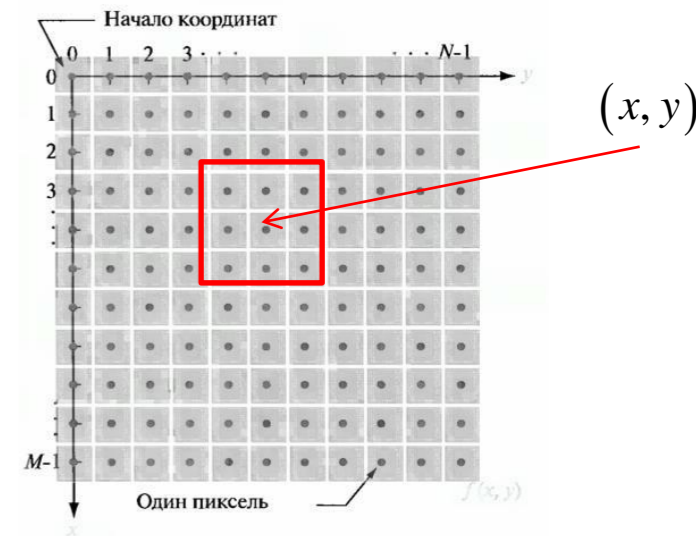
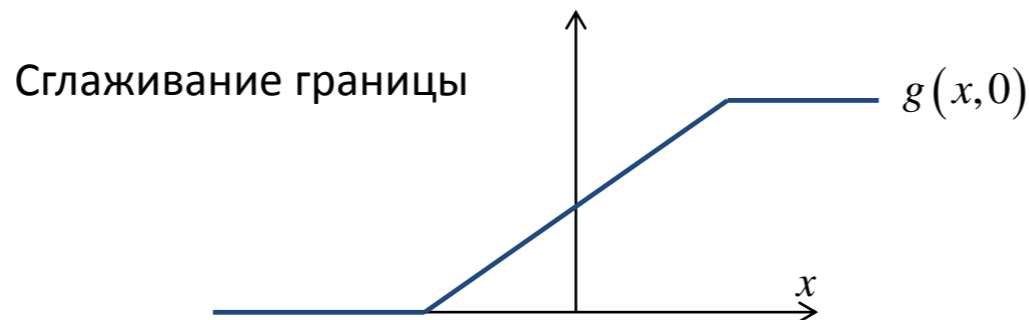
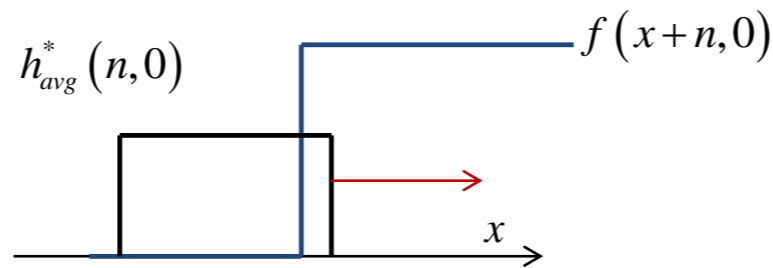
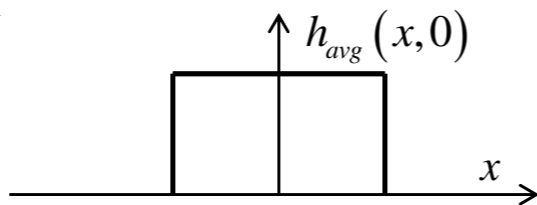


$$T: g(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{avg}(n, m) =$$

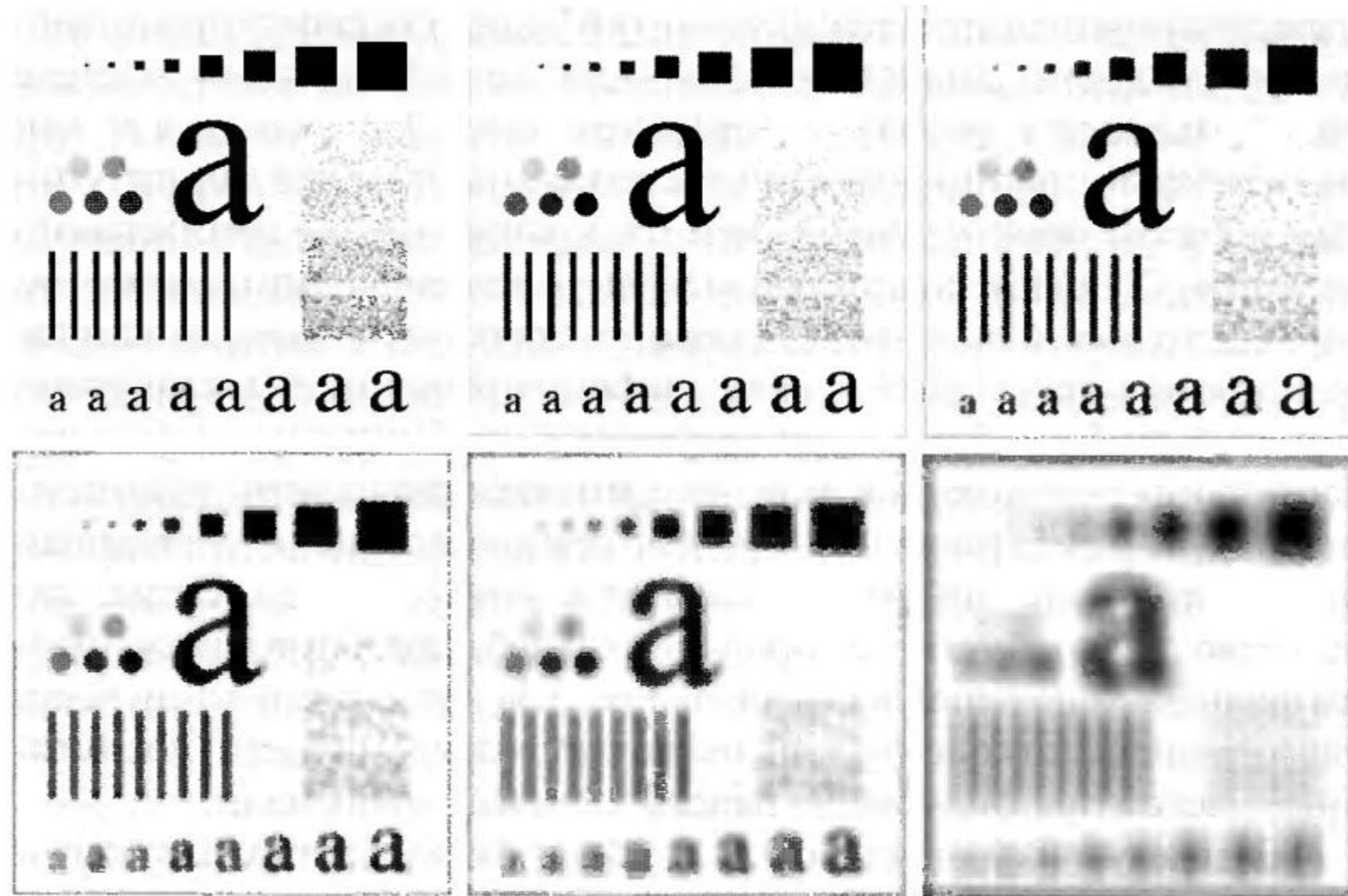
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}(-n, -m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}^*(n, m)$$

$$h_{avg}(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_{avg}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



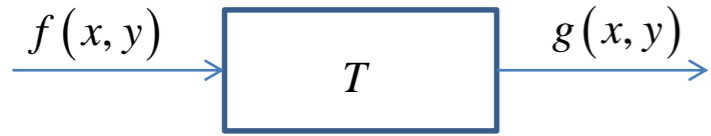
Сглаживание через усреднение
Влияние размера фильтра



Конструирование элементарных фильтров

Улучшение изображений

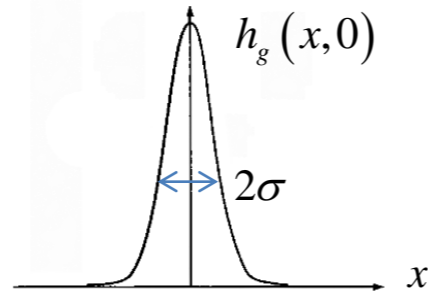
Сглаживание через взвешенное усреднение



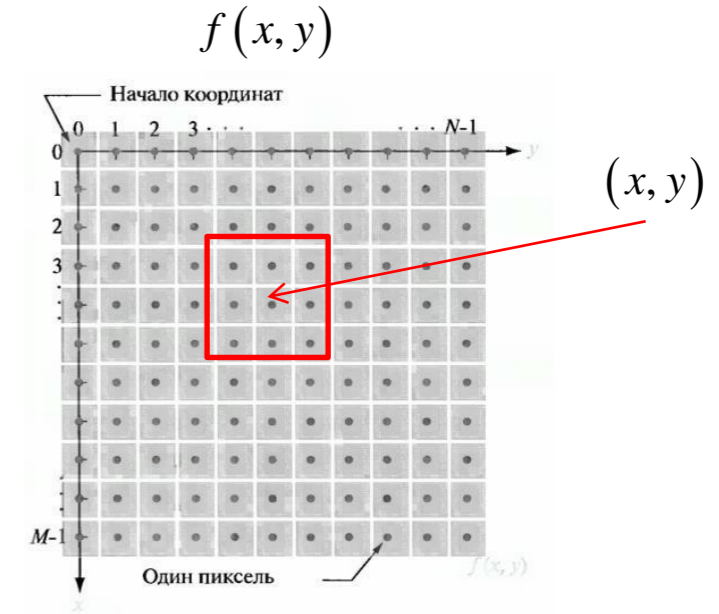
$$g(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_g(n, m) =$$
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_g^*(n, m)$$

Ядро - отсчеты функции:

$$h_g(x, y) = A e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



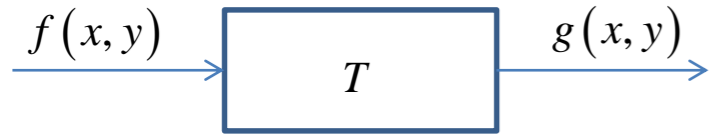
$$h_g(x, y) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Конструирование элементарных фильтров

Улучшение изображений

Сглаживание через взвешенное усреднение

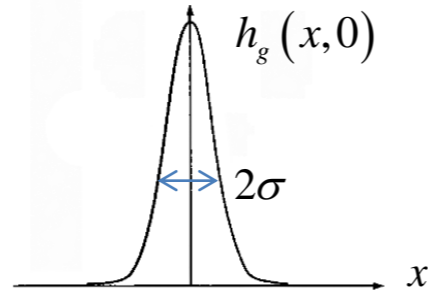


$$g(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_g(n, m) =$$

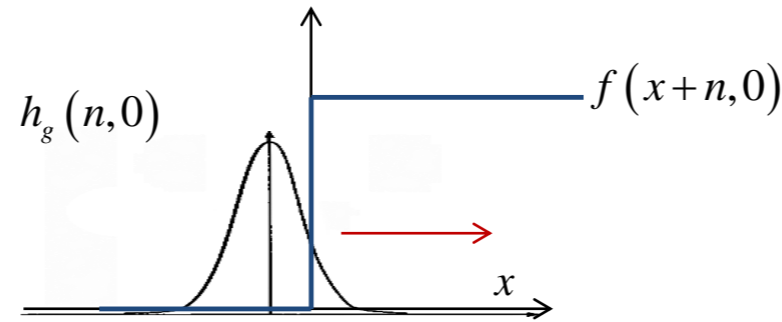
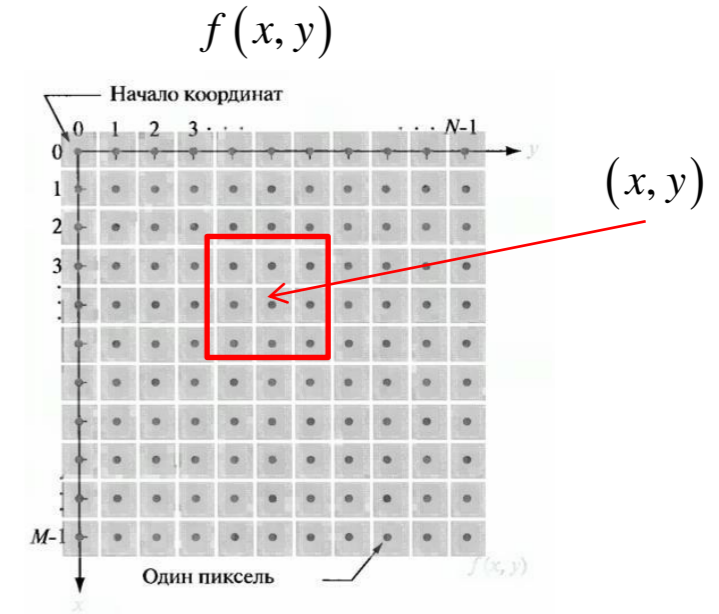
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_g^*(n, m)$$

Ядро - отсчеты функции:

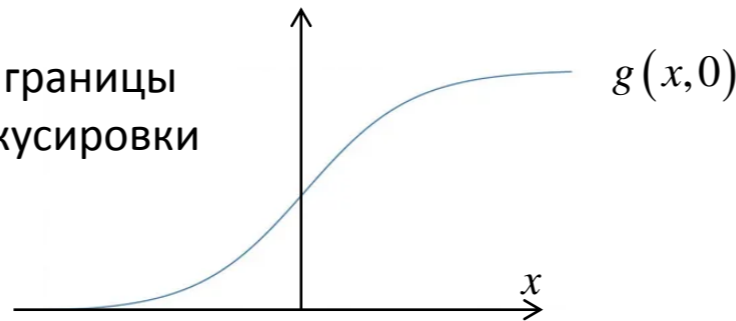
$$h_g(x, y) = A e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



$$h_g(x, y) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Сглаживание границы
модель расфокусировки



Конструирование элементарных фильтров

Производная. Модуль градиента.

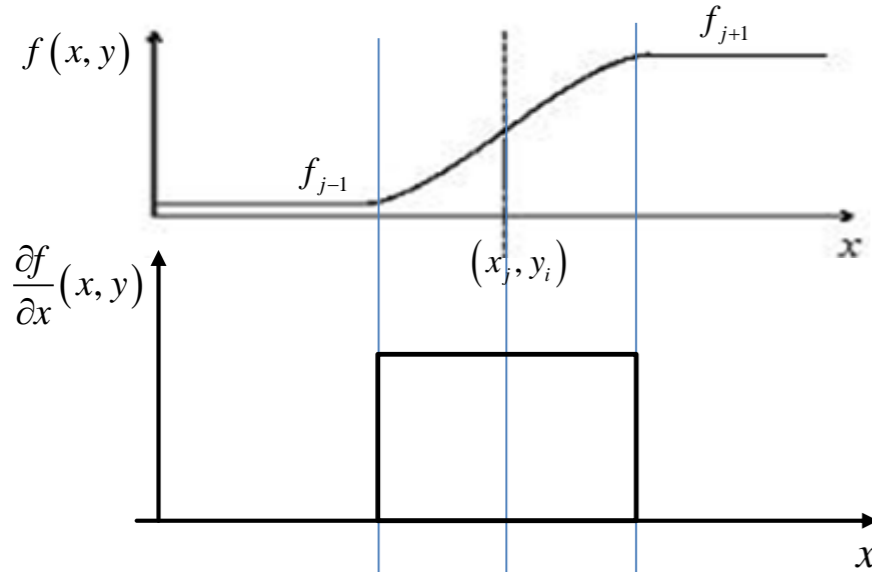
$$g(x, y) = |\nabla f(x, y)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

1. Правое разностное отношение (линейное разложение в точке (x_j, y_i)):

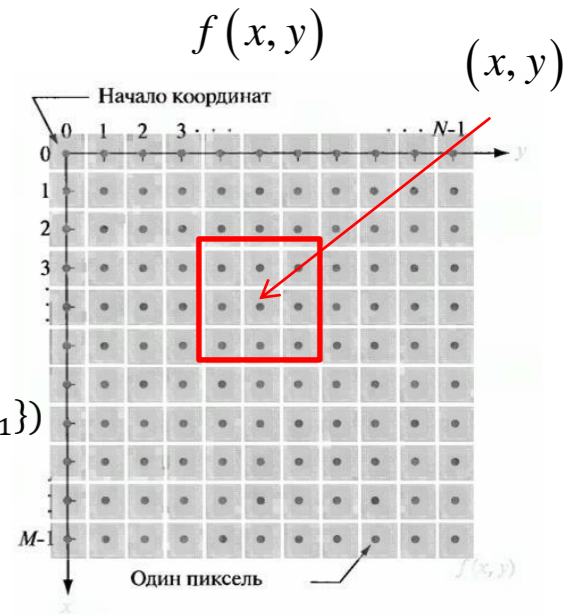
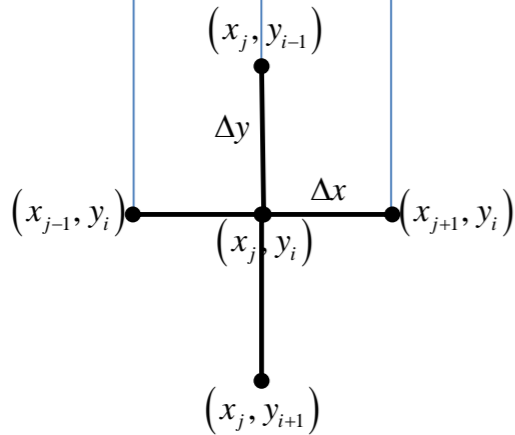
(Линейная интерполяция, построенная по значения функции в точках $\{x_j, x_{j+1}\}, \{y_i, y_{i+1}\}$)

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = f_{j+1} - f_j$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = f_{i+1} - f_i$$



Шаблон:



Конструирование элементарных фильтров

Производная. Модуль градиента.

$$g(x, y) = |\nabla f(x, y)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

1. Правое разностное отношение (линейное разложение в точке (x_j, y_i)):

(Линейная интерполяция, построенная по значения функции в точках $\{x_j, x_{j+1}\}, \{y_i, y_{i+1}\}$)

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = f_{j+1} - f_j$$

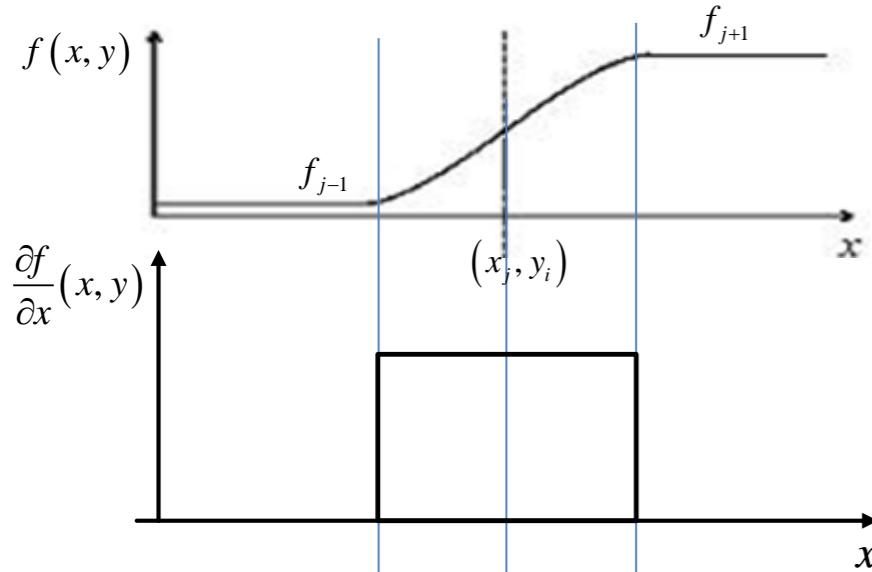
$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = f_{i+1} - f_i$$

2. Левое разностное отношение (линейное разложение $f(x_j, y_i)$ влево от точки (x_j, y_i)):

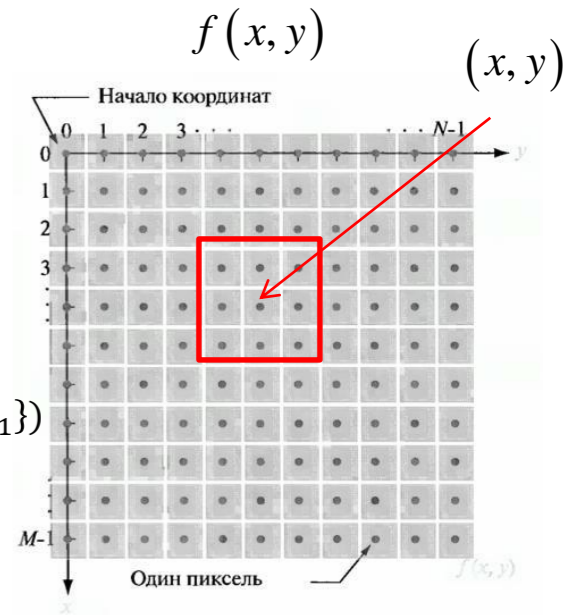
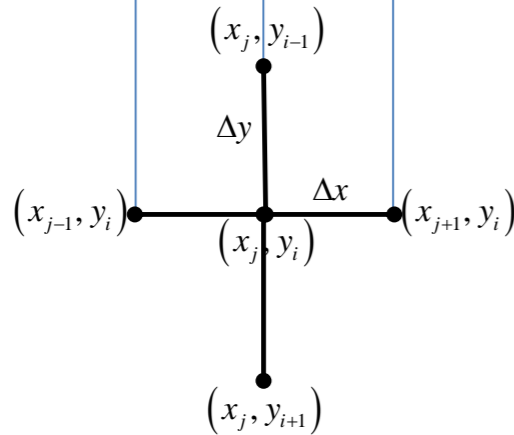
(Линейная интерполяция, построенная по значения функции в точках $\{x_{j-1}, x_j\}, \{y_{i-1}, y_i\}$)

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = f_j - f_{j-1}$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta y} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = f_i - f_{i-1}$$



Шаблон:



Конструирование элементарных фильтров

Производная. Модуль градиента.

$$g(x, y) = |\nabla f(x, y)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

1. Правое разностное отношение (линейное разложение в точке (x_j, y_i)):

(Линейная интерполяция, построенная по значения функции в точках $\{x_j, x_{j+1}\}, \{y_i, y_{i+1}\}$)

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = f_{j+1} - f_j$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = f_{i+1} - f_i$$

2. Левое разностное отношение (линейное разложение $f(x_j, y_i)$ влево от точки (x_j, y_i)):

(Линейная интерполяция, построенная по значения функции в точках $\{x_{j-1}, x_j\}, \{y_{i-1}, y_i\}$)

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = f_j - f_{j-1}$$

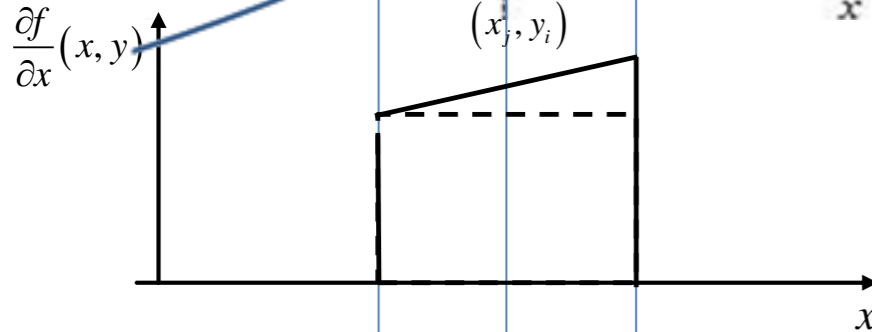
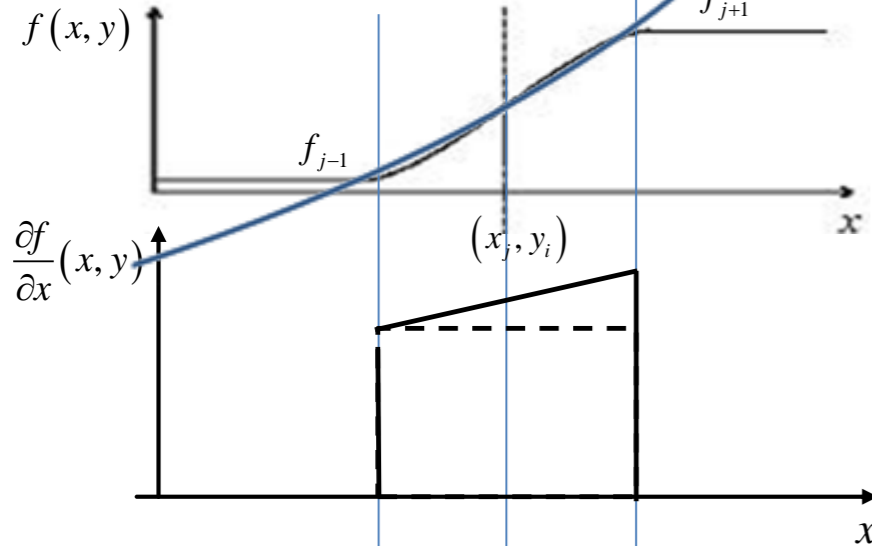
$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta y} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = f_i - f_{i-1}$$

3. Центральное разностное отношение (квадратичное разложение $f(x_j, y_i)$ в окрестности (x_j, y_i)):

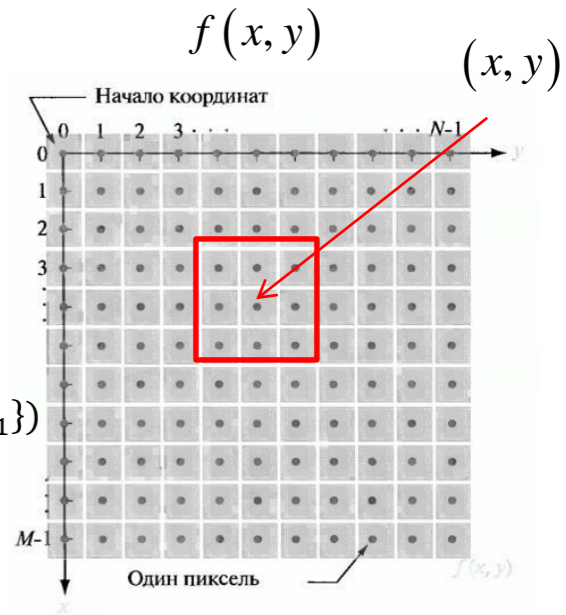
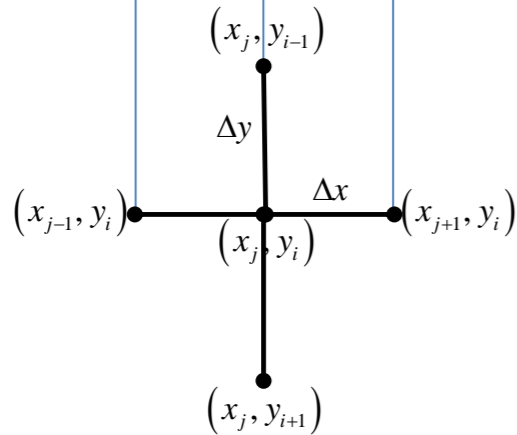
$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x^2} (x - x_j)^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} (x - x_j) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} = \{\Delta x = 1\} = \frac{1}{2} (f_{j+1} - f_{j-1})$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta y} (y - y_i) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta y^2} (y - y_i)^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta y} + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} (y - y_i) \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_i} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta y} = \{\Delta y = 1\} = \frac{1}{2} (f_{i+1} - f_{i-1})$$

(Интерполяция полиномом второй степени, построенная по значения функции в трех точках $\{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$, и $\{y_{i-1}, y_i, y_{i+1}\}$)

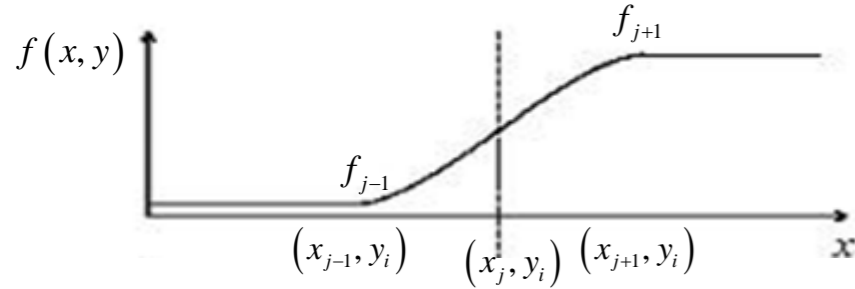


Шаблон:

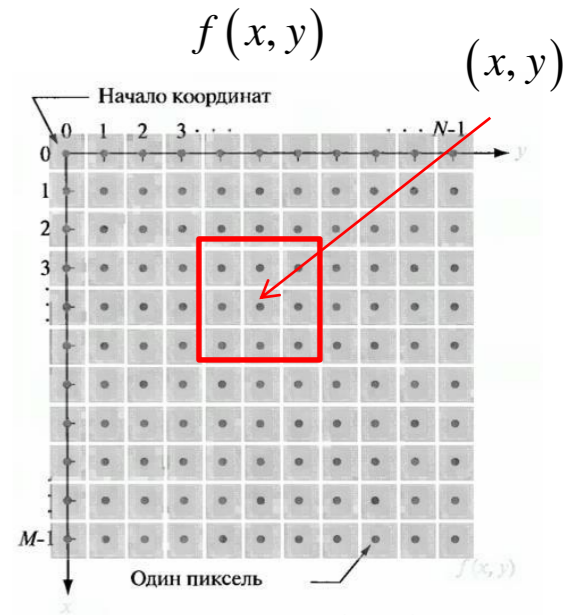


Конструирование элементарных фильтров

Производная. Модуль градиента.



$$g(x, y) = |\nabla f(x, y)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$



1. Правое разностное отношение

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_x(n, m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_y(n, m)$$

Правое отношение

$$h_x(x, y) = [1 \quad -1 \quad 0]$$

$$h_y(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Левое отношение

$$h_x(x, y) = [0 \quad 1 \quad -1]$$

$$h_y(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Центральное разностное отношение

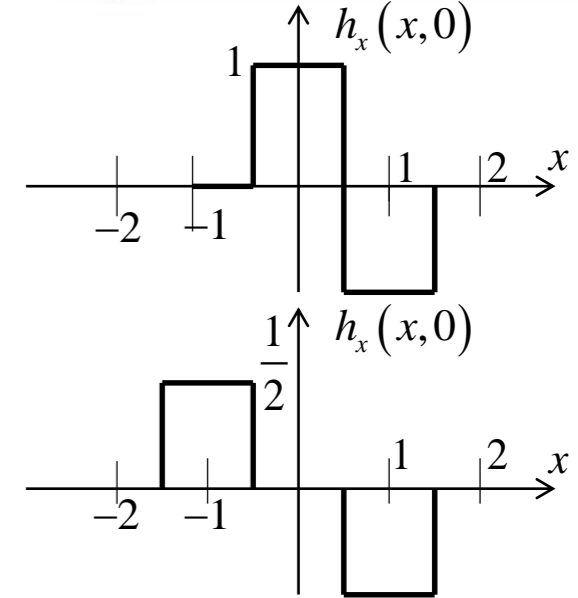
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(f(x+1, y) - f(x-1, y)) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_x(n, m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y+1) - f(x, y-1)) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_y(n, m)$$

Центральное отношение

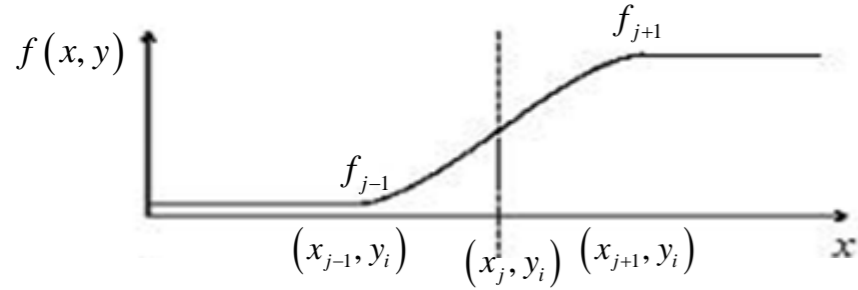
$$h_x(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_y(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

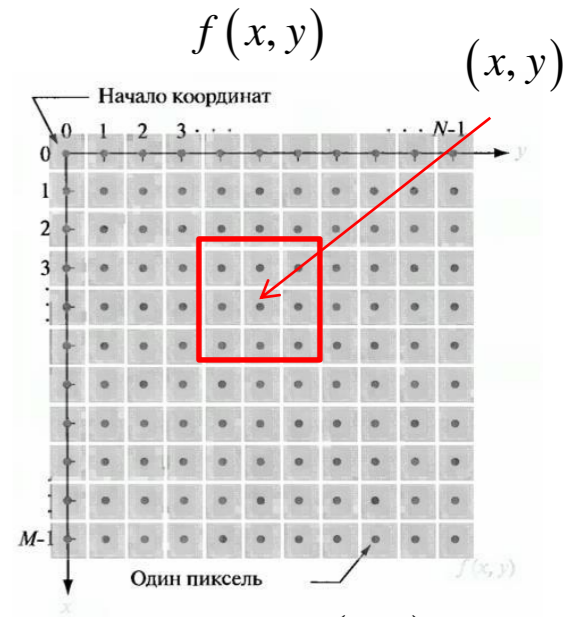


Конструирование элементарных фильтров

Производная. Модуль градиента.



$$g(x, y) = |\nabla f(x, y)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$



1. Правое разностное отношение

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_x(n, m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y+1) - f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_y(n, m)$$

Правое отношение

$$h_x(x, y) = [1 \quad -1 \quad 0]$$

$$h_y(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Левое отношение

$$h_x(x, y) = [0 \quad 1 \quad -1]$$

$$h_y(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Центральное разностное отношение

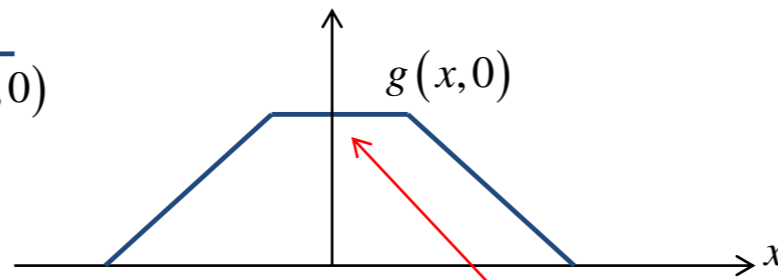
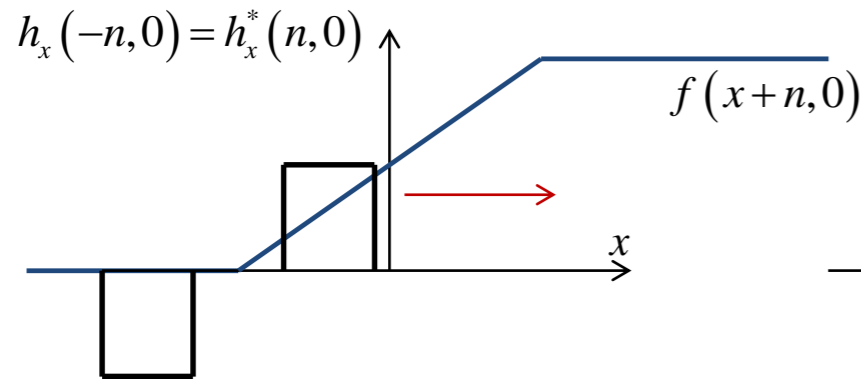
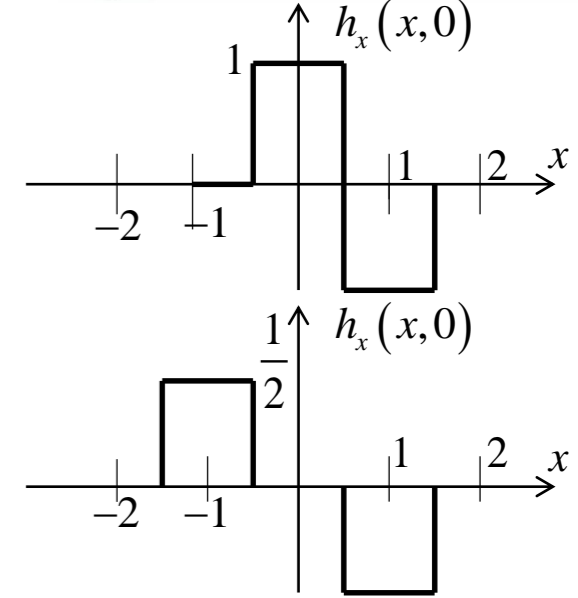
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(f(x+1, y) - f(x-1, y)) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_x(n, m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y+1) - f(x, y-1)) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_y(n, m)$$

Центральное отношение

$$h_x(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_y(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Выделение границ

Максимум на границе

Конструирование элементарных фильтров

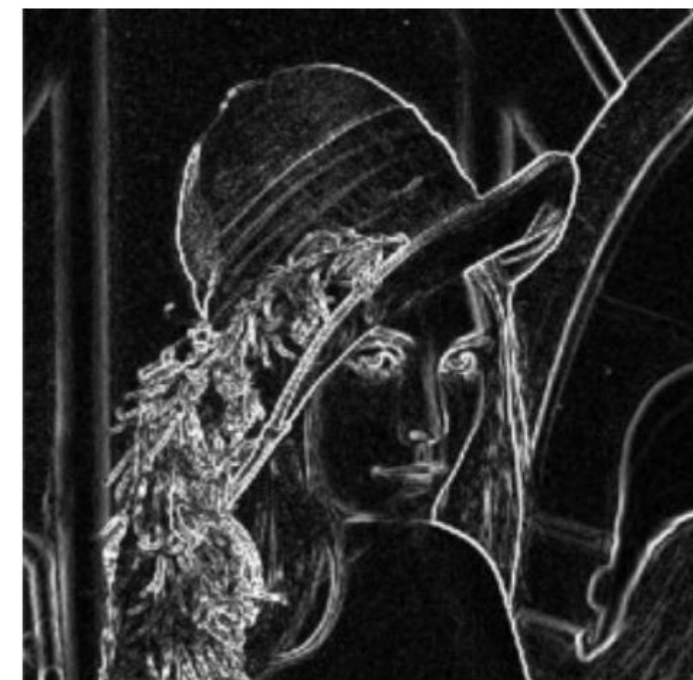
Производная. Модуль градиента.



$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|$$



$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$$



$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Конструирование элементарных фильтров

Вторая производная. Лапласиан.

$$g(x, y) = \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

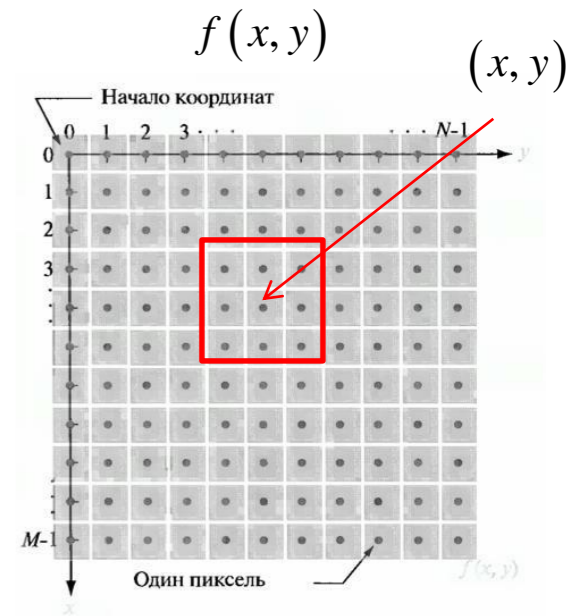
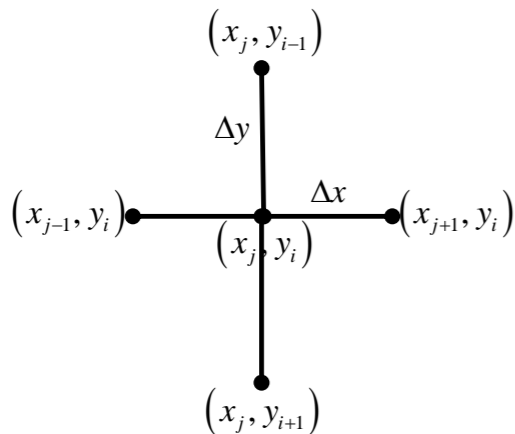
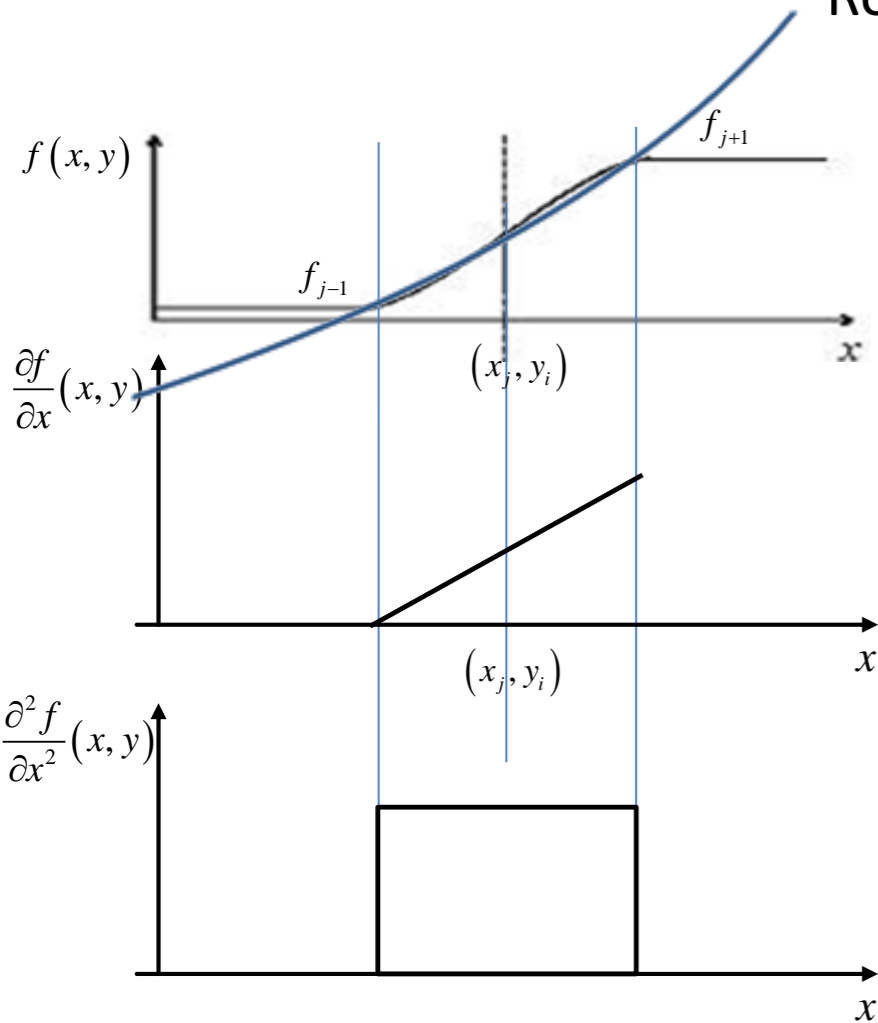
Центральное разностное отношение

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x}(x - x_j) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x^2}(x - x_j)^2$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} = \{\Delta x = 1\} = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta y}(y - y_i) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta y^2}(y - y_i)^2$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y=y_i} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} = \{\Delta y = 1\} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$



Конструирование элементарных фильтров

Вторая производная. Лапласиан.

$$g(x, y) = \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Центральное разностное отношение

$$f(x, y) \approx f_j + \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} (x - x_j) + \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x^2} (x - x_j)^2$$

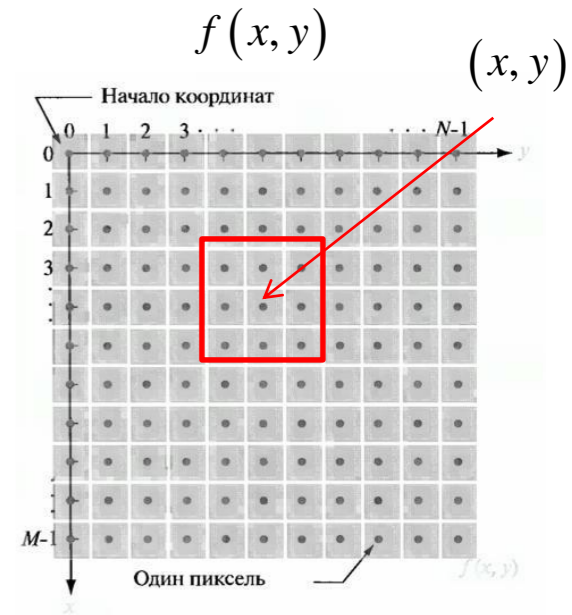
$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} \approx \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} = \{\Delta x = 1\} = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$$

$$f(x, y) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta y} (y - y_i) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta y^2} (y - y_i)^2$$

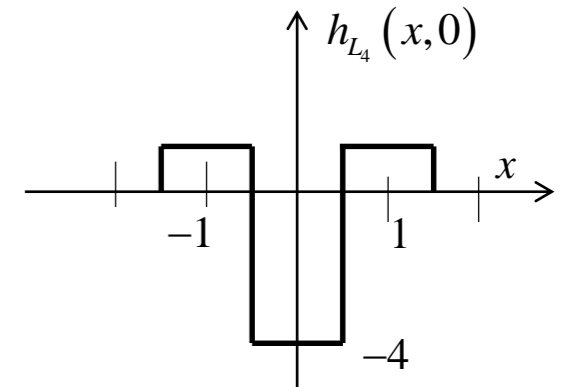
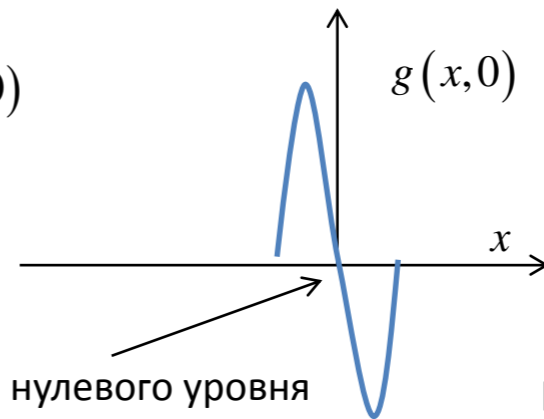
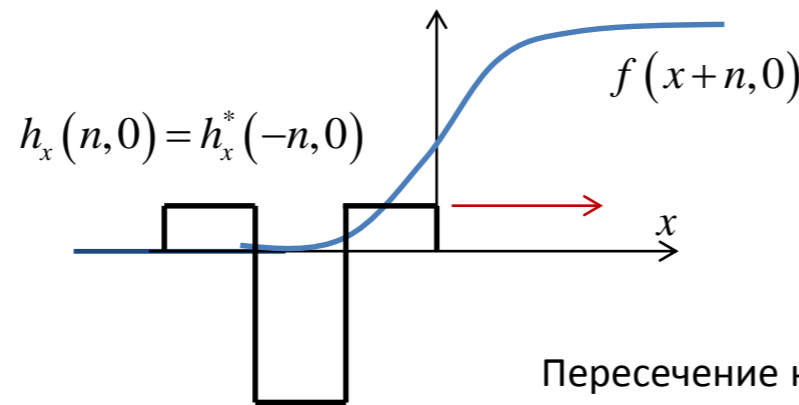
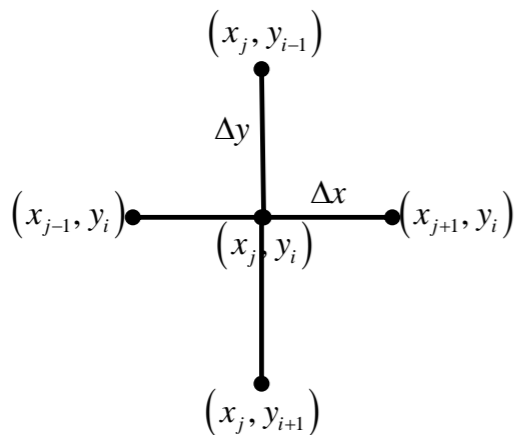
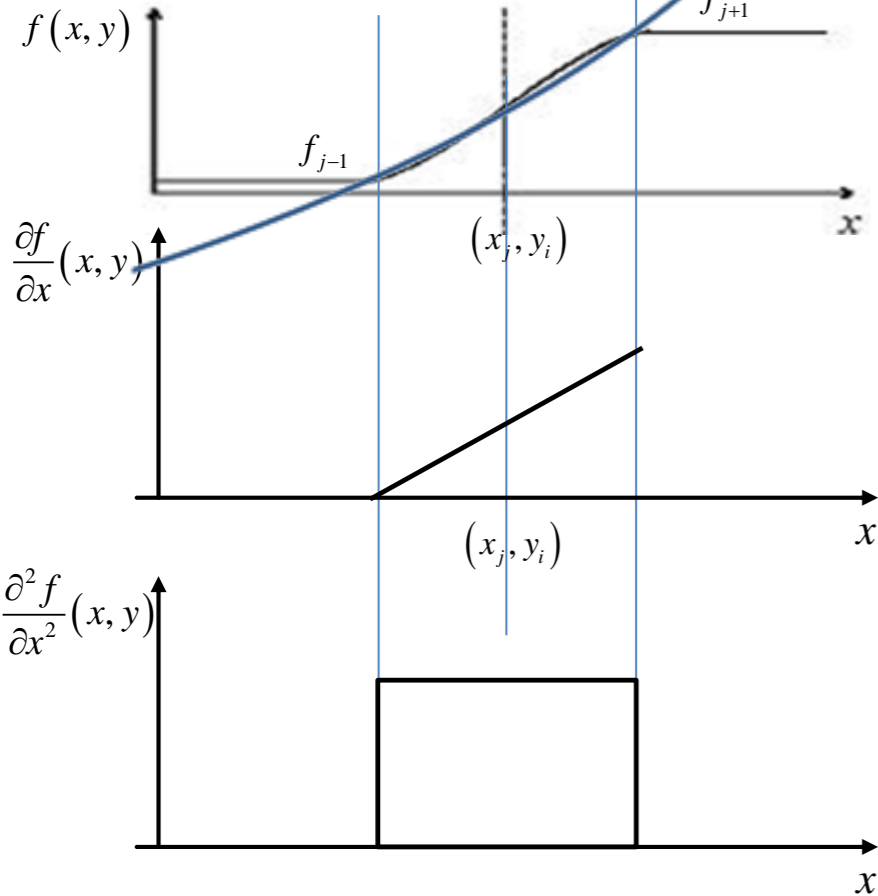
$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y=y_i} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} = \{\Delta y = 1\} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{L4}(n, m)$$



$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Пересечение нулевого уровня

Выделение границ

Конструирование элементарных фильтров

Вторая производная. Лапласиан.

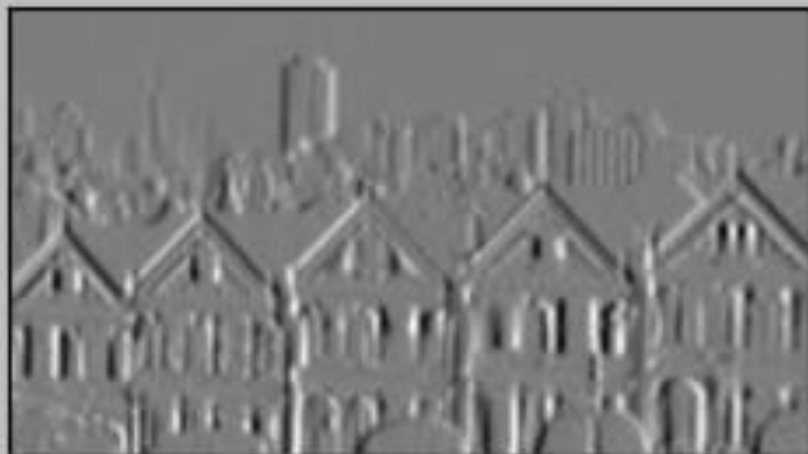
Original



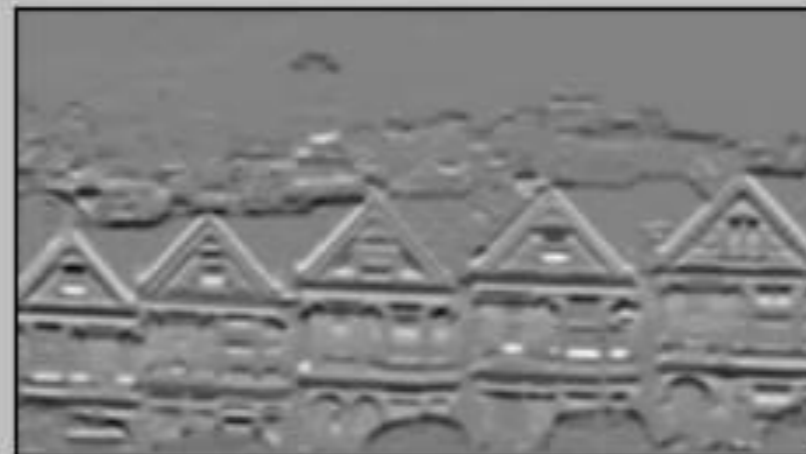
$\nabla^2 f(x, y) + 127$



$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 127$



$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 127$



Конструирование элементарных фильтров

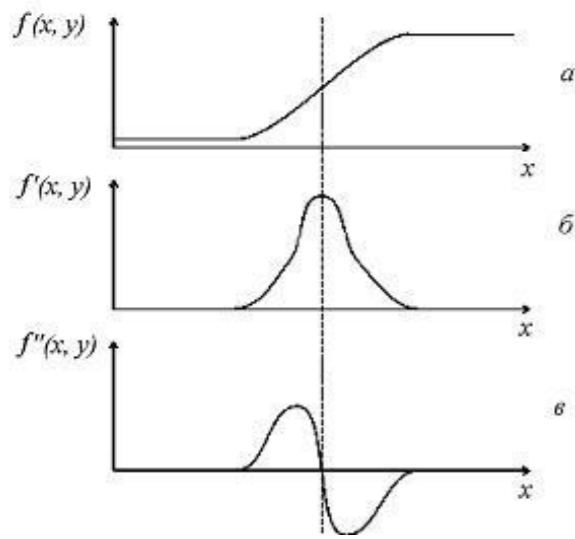
Повышение четкости, нерезкое маскирование

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

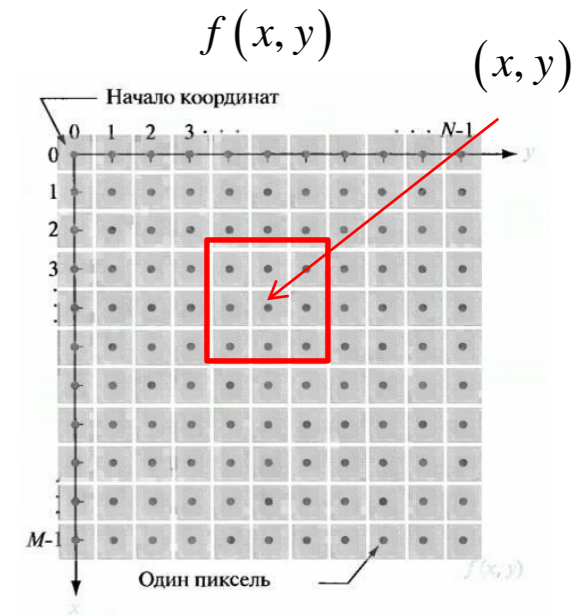
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y-1) - 2f(x, y) + f(x, y+1)$$



$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{L4}(n, m)$$

$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Конструирование элементарных фильтров

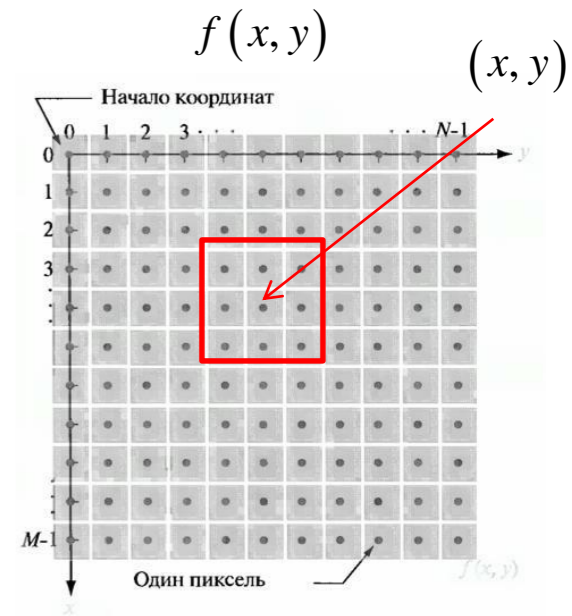
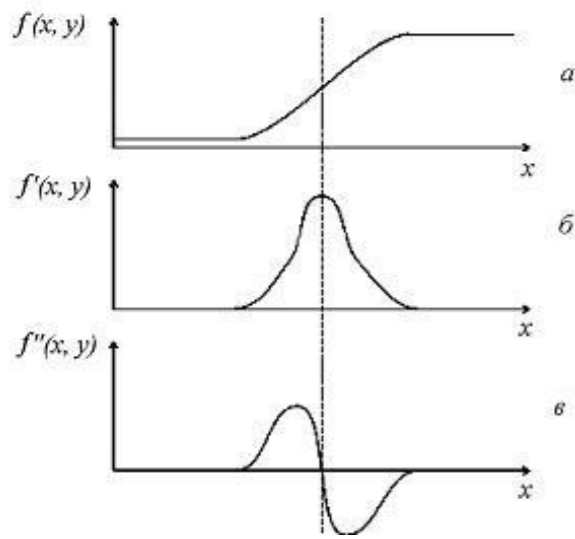
Повышение четкости, нерезкое маскирование

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y-1) - 2f(x, y) + f(x, y+1)$$



$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) =$$

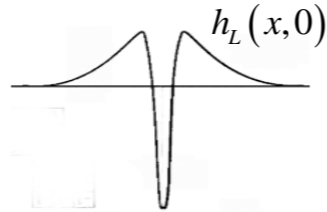
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{L4}(n, m)$$

$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y)$$

$$h_{L8}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

← инвариантна к повороту



Конструирование элементарных фильтров

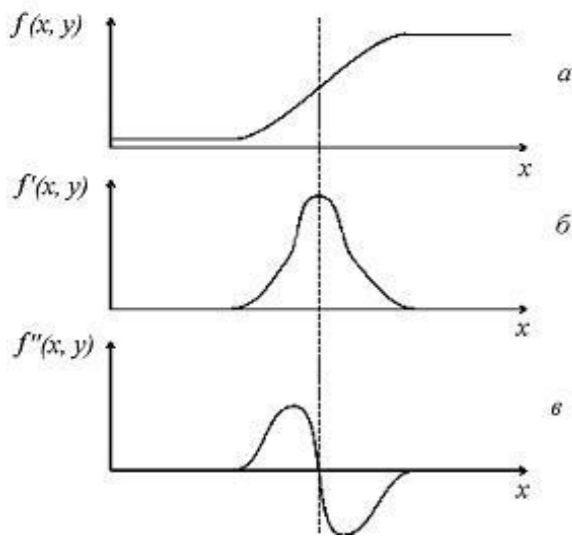
Повышение четкости, нерезкое маскирование

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

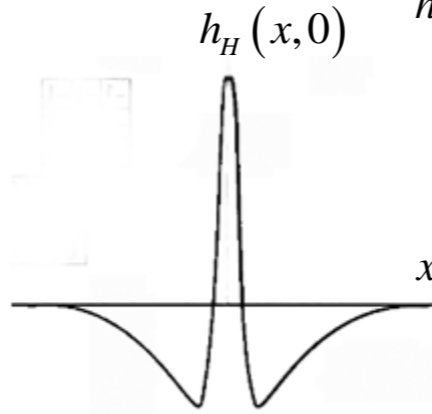
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y-1) - 2f(x, y) + f(x, y+1)$$



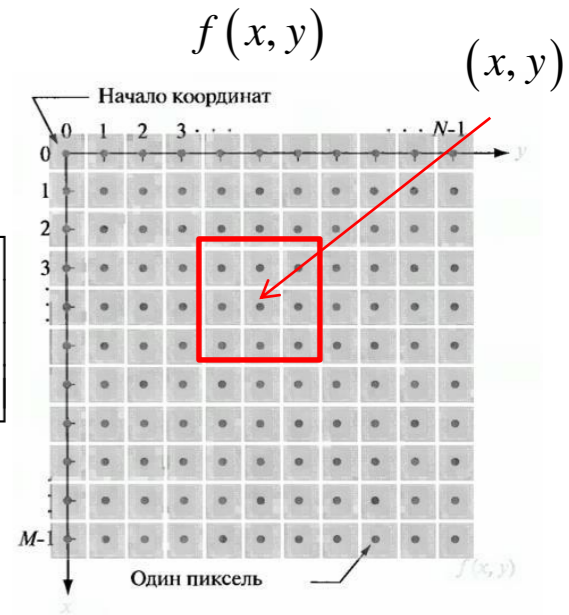
$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{L4}(n, m)$$

$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



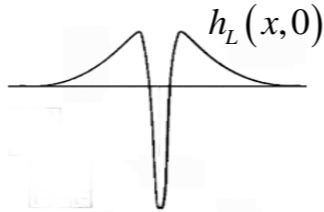
$$h_H(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y)$$

$$h_{L8}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

инвариантна к повороту



$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) =$$

$$= 10f(x, y) - \bar{f}(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 (-1) \cdot f(x-n, y-m) + 10f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_H(n, m)$$

Конструирование элементарных фильтров

Повышение четкости, нерезкое маскирование

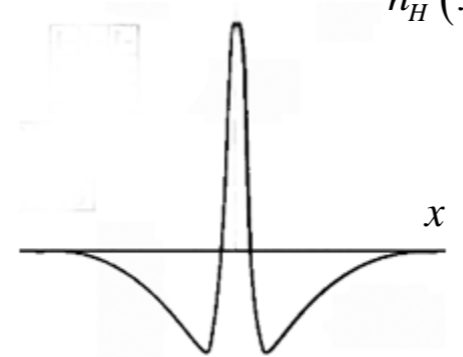
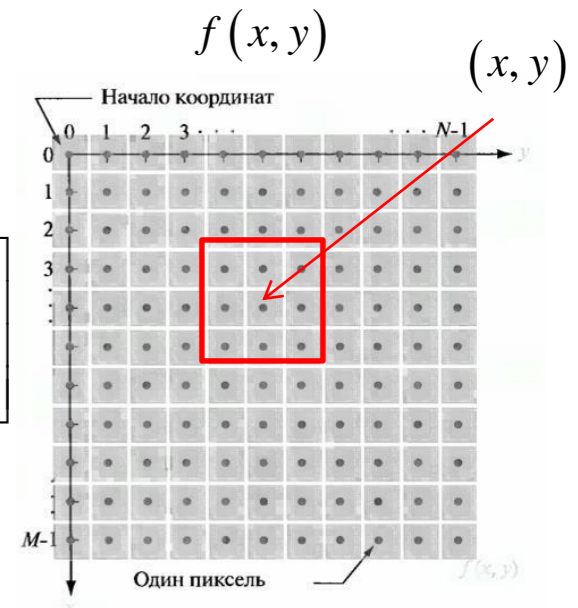
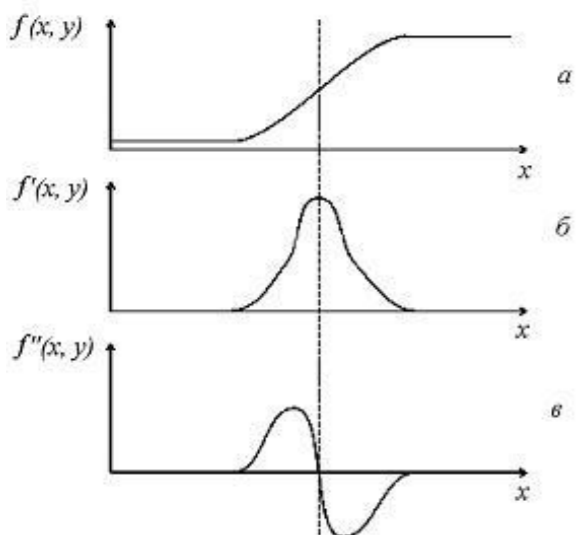
$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y-1) - 2f(x, y) + f(x, y+1)$$

$$h_H(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) =$$

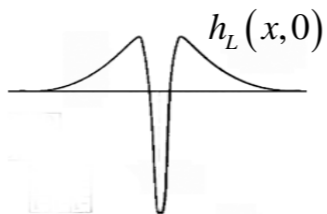
$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{L4}(n, m)$$

$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y)$$

$$h_{L8}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

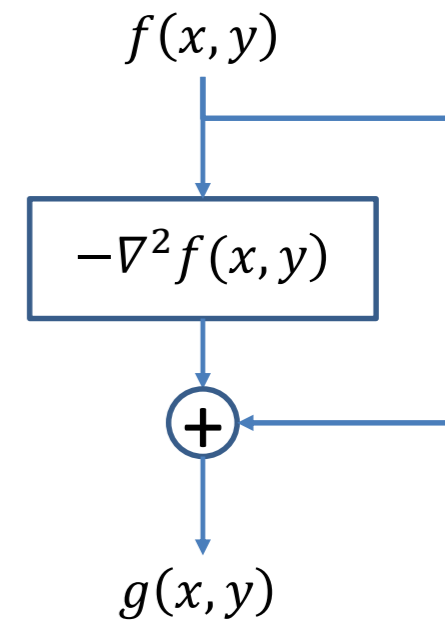
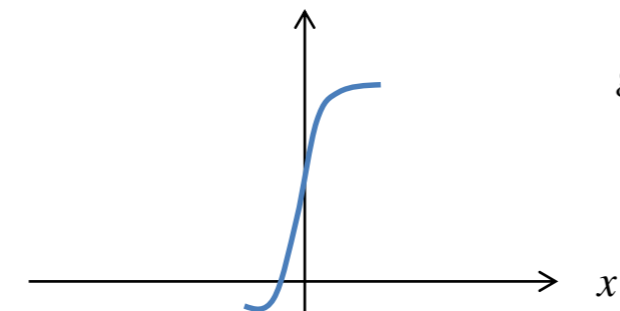
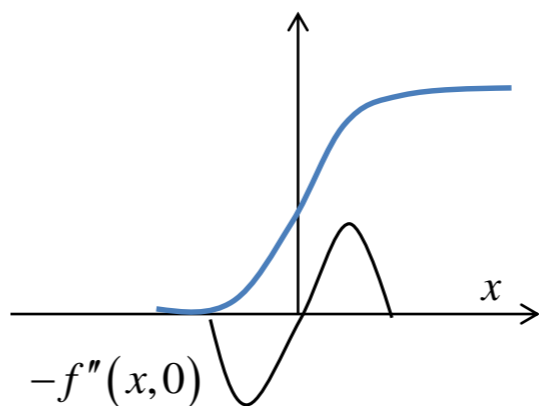
инвариантна к повороту



$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) =$$

$$= 10f(x, y) - \bar{f}(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 (-1) \cdot f(x-n, y-m) + 10f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_H(n, m)$$

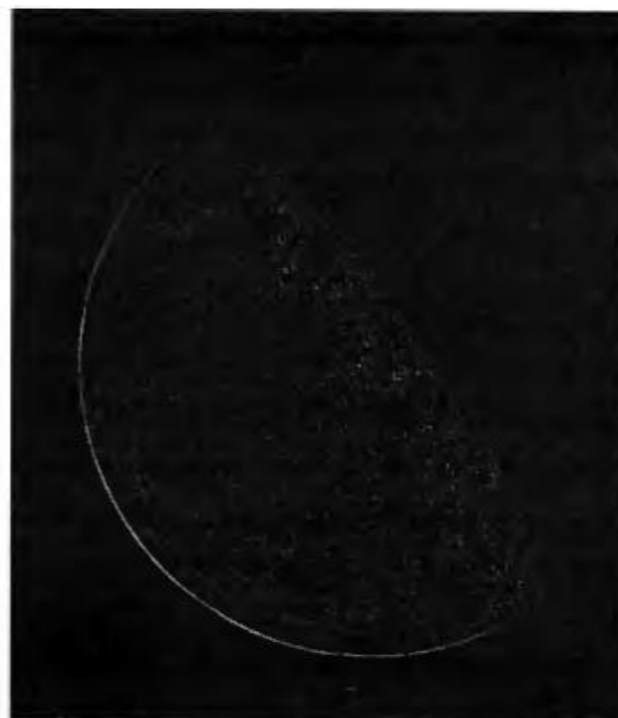


Повышение четкости, нерезкое маскирование

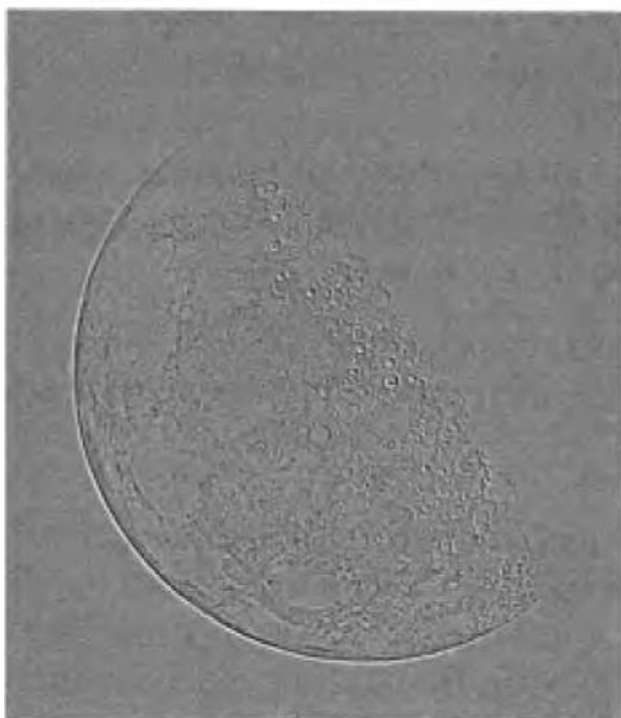
$f(x, y)$



$\nabla^2 f(x, y)$



$\nabla^2 f(x, y) + 127$



$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$



Пространственная обработка изображения

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Свойства Фурье преобразования

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = \left(\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ - спектр}$$

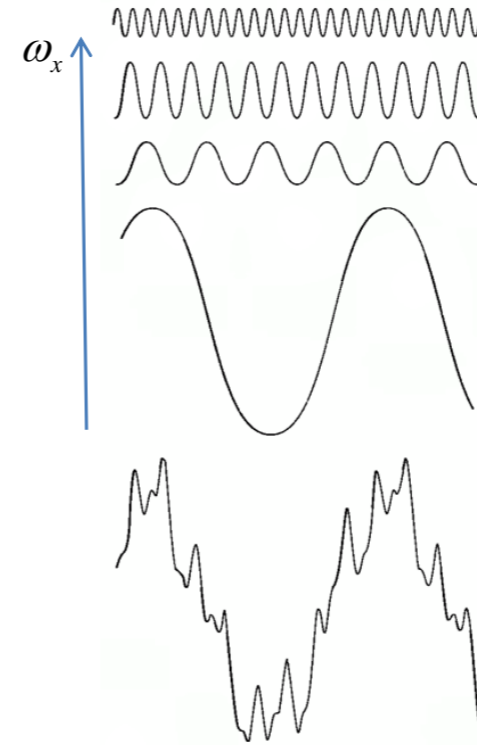
$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \text{ - фазовый спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \text{ - энергетический спектр, спектральная плотность}$$

Функция $F(\omega_x, \omega_y)$ разделима по аргументам:

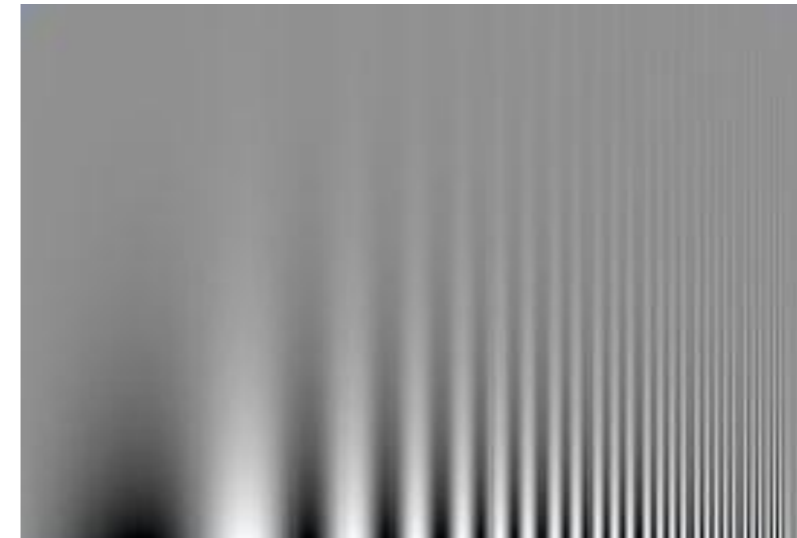
$$F_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega_x x} dx,$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(\omega_x, y) e^{-j\omega_y y} dy,$$



$$e^{i\omega_x x} = \cos(\omega_x x) + i \sin(\omega_x x)$$

Нижняя функция является суммой расположенных над ней функций.



увеличение пространственной частоты ω_x

Пространственная обработка изображения

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Свойства Фурье преобразования

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = \left(\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{- спектр}$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \quad \text{- фазовый спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \quad \text{- энергетический спектр,}$$

спектральная плотность

Функция $F(\omega_x, \omega_y)$ разделима по аргументам:

$$F_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega_x x} dx,$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(\omega_x, y) e^{-j\omega_y y} dy,$$

Обратное Фурье преобразование:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$

Пространственная обработка изображения

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Свойства Фурье преобразования

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = \left(\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{- спектр}$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \quad \text{- фазовый спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \quad \text{- энергетический спектр, спектральная плотность}$$

Функция $F(\omega_x, \omega_y)$ разделима по аргументам:

$$F_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega_x x} dx,$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(\omega_x, y) e^{-j\omega_y y} dy,$$

Обратное Фурье преобразование:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$

Если $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F_x(\omega_x) F_y(\omega_y)$$

Если $f(x, y) = f(-x, -y)$ - симметричная

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F(-\omega_x, -\omega_y)$$

Пространственная обработка изображения

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Свойства Фурье преобразования

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = \left(\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{- спектр}$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \quad \text{- фазовый спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \quad \text{- энергетический спектр, спектральная плотность}$$

Функция $F(\omega_x, \omega_y)$ разделима по аргументам:

$$F_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega_x x} dx,$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(\omega_x, y) e^{-j\omega_y y} dy,$$

Обратное Фурье преобразование:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$

Если $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F_x(\omega_x) F_y(\omega_y)$$

Если $f(x, y) = f(-x, -y)$ - симметричная

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F(-\omega_x, -\omega_y)$$

$$\mathcal{F} \{ f(ax, by) \} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\omega_x}{a}, \frac{\omega_y}{b}\right)$$

$$\mathcal{F} \{ f(x-a, y-b) \} = F(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x - a, \omega_y - b) \} = f(x, y) e^{j(xa + yb)}$$

Пространственная обработка изображения

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Свойства Фурье преобразования

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = \left(\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ - спектр}$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \text{ - фазовый спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \text{ - энергетический спектр, спектральная плотность}$$

Функция $F(\omega_x, \omega_y)$ разделима по аргументам:

$$F_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega_x x} dx,$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(\omega_x, y) e^{-j\omega_y y} dy,$$

Обратное Фурье преобразование:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$

Если $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F_x(\omega_x) F_y(\omega_y)$$

Если $f(x, y) = f(-x, -y)$ - симметричная

$$\Rightarrow F(\omega_x, \omega_y) = F(-\omega_x, -\omega_y)$$

$$\mathcal{F} \{ f(ax, by) \} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\omega_x}{a}, \frac{\omega_y}{b}\right)$$

$$\mathcal{F} \{ f(x-a, y-b) \} = F(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x - a, \omega_y - b) \} = f(x, y) e^{j(xa + yb)}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right\} = -j\omega_x F(\omega_x, \omega_y)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right\} = -(\omega_x^2 + \omega_y^2) F(\omega_x, \omega_y)$$

Пространственная обработка изображения

Статистическое описание изображения. Теорема Винера — Хинчина.

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

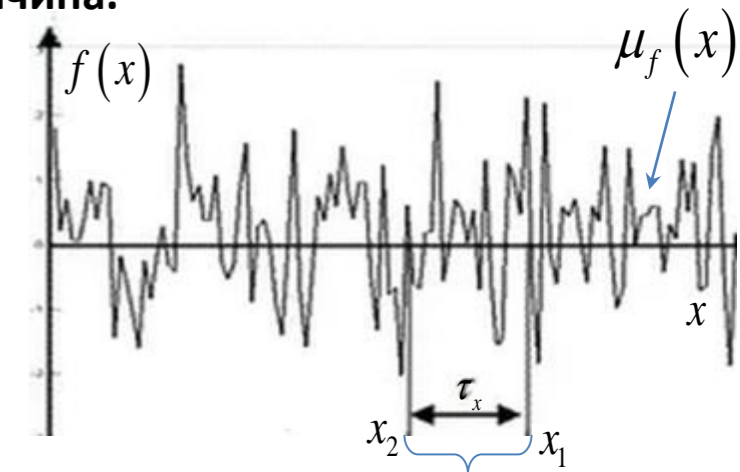
$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

Автокорреляционная функция:

$$R(x_1, y_1, t_1; x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t)\}$$

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$ - случайный процесс (строго говоря, для стационарного процесса интеграл **не сходится**), символически:

$$M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = M\left\{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) e^{-j\omega_1 x_1} f^*(x_2) e^{j\omega_2 x_2} dx_1 dx_2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{f(x_1) f^*(x_2)\} e^{j(\omega_2 x_2 - \omega_1 x_1)} dx_1 dx_2$$



Пространственная обработка изображения

Статистическое описание изображения. Теорема Винера — Хинчина.

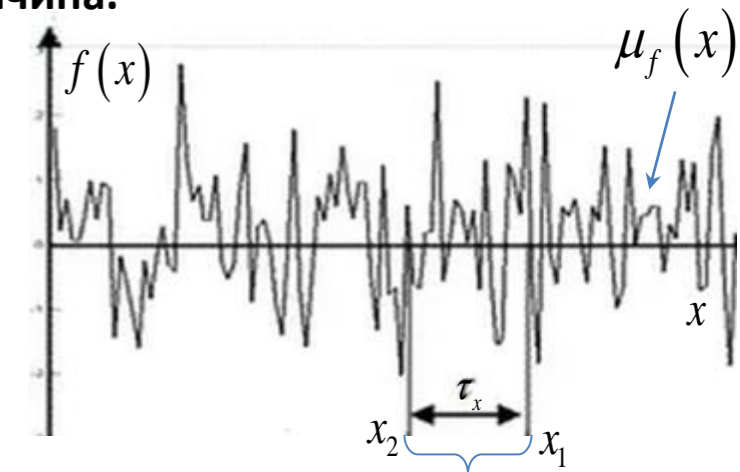
Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

Автокорреляционная функция:

$$R(x_1, y_1, t_1; x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t)\}$$



$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$ - случайный процесс (строго говоря, для стационарного процесса интеграл **не сходится**), символически:

$$M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = M\left\{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) e^{-j\omega_1 x_1} f^*(x_2) e^{j\omega_2 x_2} dx_1 dx_2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{f(x_1) f^*(x_2)\} e^{j(\omega_2 x_2 - \omega_1 x_1)} dx_1 dx_2 \quad \text{- интеграл сходится}$$

Пусть $f(x)$ - **стационарный случайный** процесс: $M\{f(x_1) f^*(x_2)\} = R(x_1; x_2) = R(x_1; x_1 - \tau_x) = R(\tau_x)$

$$\Rightarrow M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{j(\omega_2(x_1 - \tau_x) - \omega_1 x_1)} dx_1 d\tau_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)x_1} dx_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x = \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x$$

$F(\omega_1), F^*(\omega_2)$ - некоррелированные

Пространственная обработка изображения

Статистическое описание изображения. Теорема Винера — Хинчина.

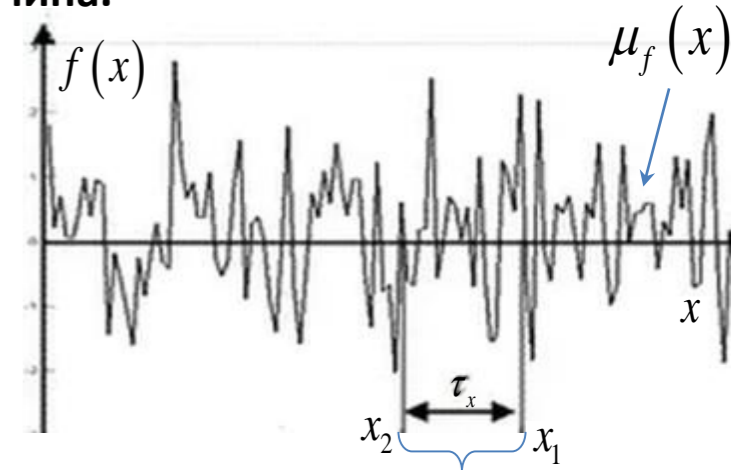
Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

Автокорреляционная функция:

$$R(x_1, y_1, t_1; x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t)\}$$



$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$ - случайный процесс (строго говоря, для стационарного процесса интеграл **не сходится**), символически:

$$M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = M\left\{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) e^{-j\omega_1 x_1} f^*(x_2) e^{j\omega_2 x_2} dx_1 dx_2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{f(x_1) f^*(x_2)\} e^{j(\omega_2 x_2 - \omega_1 x_1)} dx_1 dx_2 \quad \text{- интеграл сходится}$$

Пусть $f(x)$ - **стационарный случайный** процесс: $M\{f(x_1) f^*(x_2)\} = R(x_1; x_2) = R(x_1; x_1 - \tau_x) = R(\tau_x)$

$$\Rightarrow M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{j(\omega_2(x_1 - \tau_x) - \omega_1 x_1)} dx_1 d\tau_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)x_1} dx_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x = \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x$$

$F(\omega_1), F^*(\omega_2)$ - некоррелированные

Спектр мощности случайного процесса:

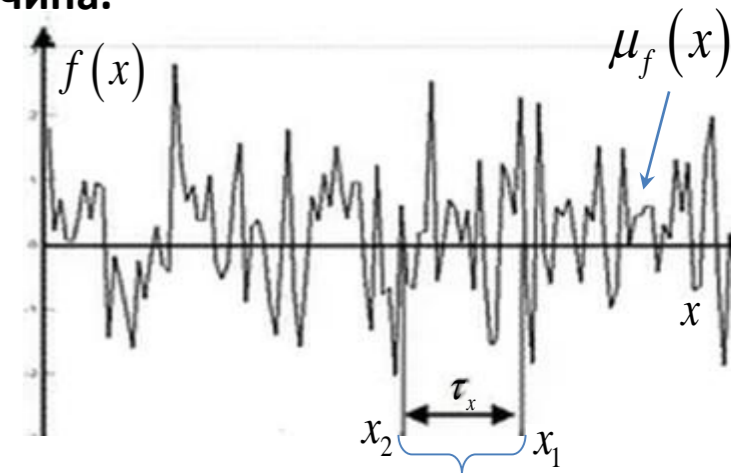
$$\Rightarrow W(\omega_1) = M\{F(\omega_1) F^*(\omega_1)\} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_1 - \Delta\omega/2}^{\omega_1 + \Delta\omega/2} M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} d\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_1 - \Delta\omega/2}^{\omega_1 + \Delta\omega/2} \delta(\omega_1 - \omega_2) R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\omega_2 d\tau_x = \{\omega_2 = \omega_1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_1 \tau_x} d\tau_x$$

Пространственная обработка изображения

Статистическое описание изображения. Теорема Винера — Хинчина.

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$



$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

Автокорреляционная функция:

$$R(x_1, y_1, t_1; x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_1 - \tau_x, y_1 - \tau_y, t_1 - \tau_t)\}$$

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$ - случайный процесс (строго говоря, для стационарного процесса интеграл **не сходится**), символически:

$$M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = M\left\{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) e^{-j\omega_1 x_1} f^*(x_2) e^{j\omega_2 x_2} dx_1 dx_2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\{f(x_1) f^*(x_2)\} e^{j(\omega_2 x_2 - \omega_1 x_1)} dx_1 dx_2 \quad \text{- интеграл сходится}$$

Пусть $f(x)$ - **стационарный случайный** процесс: $M\{f(x_1) f^*(x_2)\} = R(x_1; x_2) = R(x_1; x_1 - \tau_x) = R(\tau_x)$

$$\Rightarrow M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{j(\omega_2(x_1 - \tau_x) - \omega_1 x_1)} dx_1 d\tau_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)x_1} dx_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x = \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\tau_x$$

$F(\omega_1), F^*(\omega_2)$ - некоррелированные

Спектр мощности случайного процесса:

$$\Rightarrow W(\omega_1) = M\{F(\omega_1) F^*(\omega_1)\} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_1 - \Delta\omega/2}^{\omega_1 + \Delta\omega/2} M\{F(\omega_1) F^*(\omega_2)\} d\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_1 - \Delta\omega/2}^{\omega_1 + \Delta\omega/2} \delta(\omega_1 - \omega_2) R(\tau_x) e^{-j\omega_2 \tau_x} d\omega_2 d\tau_x = \{\omega_2 = \omega_1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x) e^{-j\omega_1 \tau_x} d\tau_x$$

$$W(\omega_x, \omega_y, \omega_t) = \mathcal{F}\{R(\tau_x, \tau_y, \tau_t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) e^{(-j\omega_x \tau_x - j\omega_y \tau_y - j\omega_t \tau_t)} d\tau_x d\tau_y d\tau_t$$

$$R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_x, \omega_y, \omega_t) e^{(j\omega_x \tau_x + j\omega_y \tau_y + j\omega_t \tau_t)} d\omega_x d\omega_y d\omega_t$$

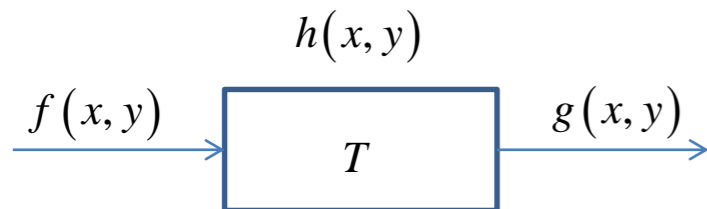
Теорема Винера — Хинчина

Полная энергия стационарного процесса:

$$\sigma_f^2 = R(0, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_x, \omega_y, \omega_t) d\omega_x d\omega_y d\omega_t \quad 31$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Импульсная характеристика



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y), x, y)$$

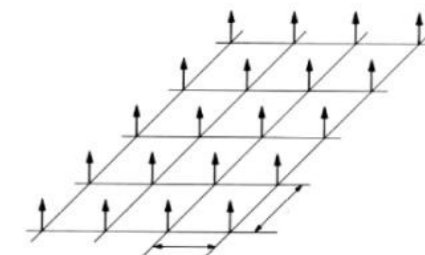
Пусть $f(x, y) = \delta(x, y)$ - тестовый точечный импульс.

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$h(x, y) = T(\delta(x, y), x, y) - \text{импульсная характеристика (ИК),}$$

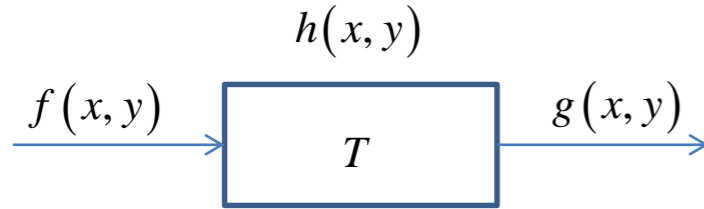
функция рассеяния точки (ФРТ) – в оптических системах

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Импульсная характеристика



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y), x, y)$$

Пусть $f(x, y) = \delta(x, y)$ - тестовый точечный импульс.

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$h(x, y) = T(\delta(x, y), x, y) \text{ - импульсная характеристика (ИК),}$$

функция рассеяния точки (ФРТ) – в оптических системах

Разложим произвольную входную функцию по дельта функциям:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm$$

$$\Rightarrow g(x, y) = T\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm\right)$$

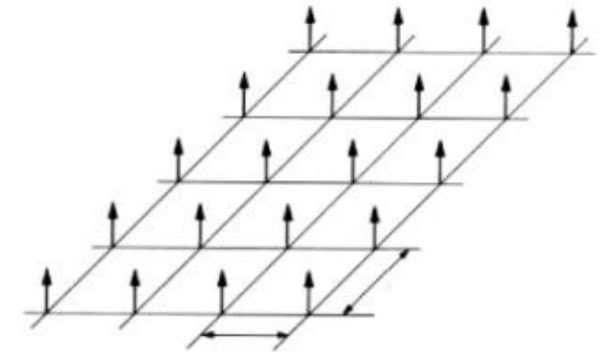
Если T - **линейная**, тогда используя свойство суперпозиции:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) T(\delta(x - n, y - m), x, y) dn dm$$

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

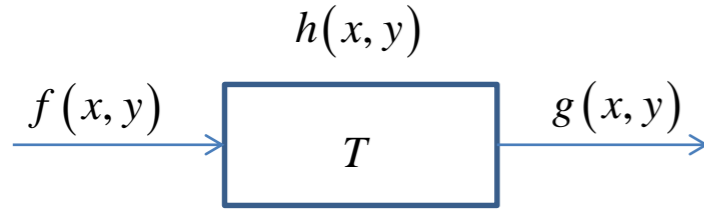
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Импульсная характеристика



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y), x, y)$$

Пусть $f(x, y) = \delta(x, y)$ - тестовый точечный импульс.

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$h(x, y) = T(\delta(x, y), x, y) \text{ - импульсная характеристика (ИК),}$$

функция рассеяния точки (ФРТ)

Разложим произвольную входную функцию по дельта функциям:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm$$

$$\Rightarrow g(x, y) = T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm \right)$$

Если T - **линейная**, тогда используя свойство суперпозиции:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) T(\delta(x - n, y - m), x, y) dn dm$$

В общем случае линейной T :

$$T: g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x, y; n, m) dn dm$$

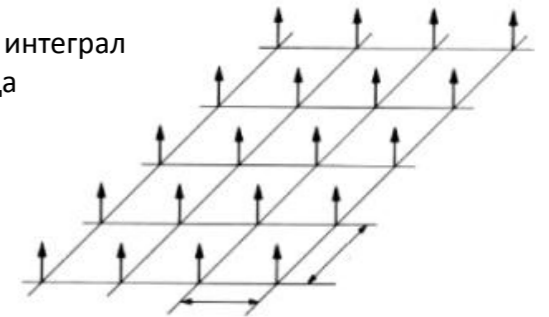
$$h(x, y; n, m) = T(\delta(x - n, y - m), x, y)$$

интеграл суперпозиции, интеграл Фредгольма первого рода

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

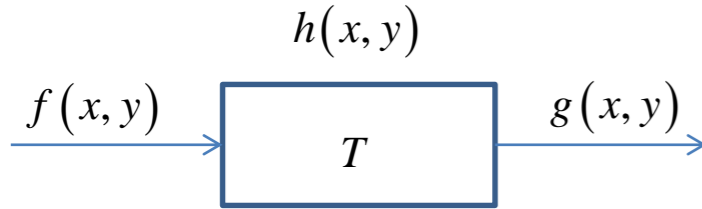
$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Импульсная характеристика



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$

T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y), x, y)$$

Пусть $f(x, y) = \delta(x, y)$ - тестовый точечный импульс.

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$h(x, y) = T(\delta(x, y), x, y) \text{ - импульсная характеристика (ИК),}$$

функция рассеяния точки (ФРТ)

Разложим произвольную входную функцию по дельта функциям:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm$$

$$\Rightarrow g(x, y) = T\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm\right)$$

Если T - **линейная**, тогда используя свойство суперпозиции:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) T(\delta(x - n, y - m), x, y) dn dm$$

В общем случае линейной T :

$$T: g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x, y; n, m) dn dm$$

$$h(x, y; n, m) = T(\delta(x - n, y - m), x, y)$$

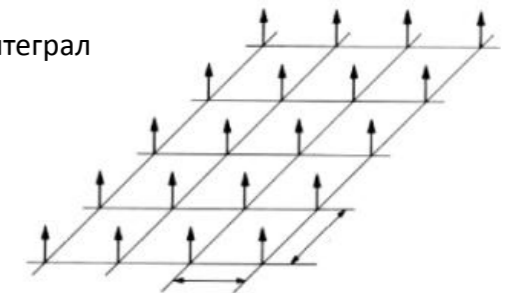
интеграл суперпозиции, интеграл Фредгольма первого рода

Если T - **пространственно-инвариантна**, сохраняет форму при сдвигах (линейный стационарный оператор):

$$h(x, y; n, m) = h(x + \Delta x, y + \Delta y; n + \Delta x, m + \Delta y), \quad \forall \Delta x, \Delta y$$

при: $\Delta x = -n, \Delta y = -m$

$$h(x, y; n, m) = h(x - n, y - m; 0, 0) = h(x - n, y - m) = T(\delta(x - n, y - m))$$

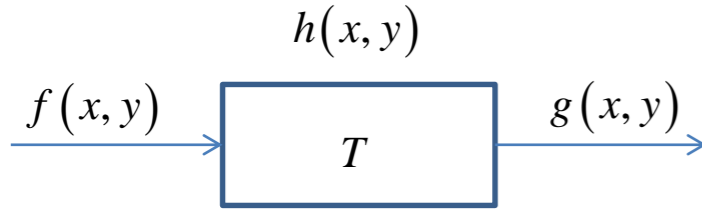


функция Грина оператора T^{-1}

$$T^{-1}(h(x, y; n, m)) = \delta(x - n, y - m)$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Импульсная характеристика



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$

T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y), x, y)$$

Пусть $f(x, y) = \delta(x, y)$ - тестовый точечный импульс.

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$h(x, y) = T(\delta(x, y), x, y) \text{ - импульсная характеристика (ИК),}$$

функция рассеяния точки (ФРТ)

Разложим произвольную входную функцию по дельта функциям:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm$$

$$\Rightarrow g(x, y) = T\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm\right)$$

Если T - **линейная**, тогда используя свойство суперпозиции:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) T(\delta(x - n, y - m), x, y) dn dm$$

В общем случае линейной T :

$$T: g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x, y; n, m) dn dm$$

$$h(x, y; n, m) = T(\delta(x - n, y - m), x, y)$$

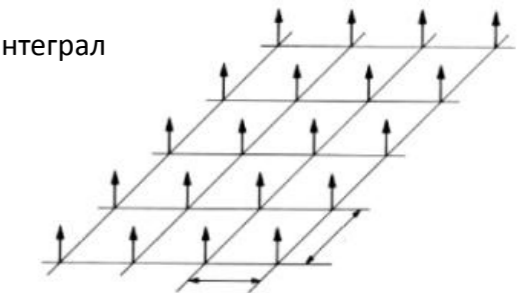
← интеграл суперпозиции, интеграл Фредгольма первого рода

Если T - **пространственно-инвариантна**, сохраняет форму при сдвигах (линейный стационарный оператор):

$$h(x, y; n, m) = h(x + \Delta x, y + \Delta y; n + \Delta x, m + \Delta y), \quad \forall \Delta x, \Delta y$$

при: $\Delta x = -n, \Delta y = -m$

$$h(x, y; n, m) = h(x - n, y - m; 0, 0) = h(x - n, y - m) = T(\delta(x - n, y - m))$$



$$\Rightarrow g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x - n, y - m) dn dm$$

← функция Грина оператора T^{-1}
 $T^{-1}(h(x, y; n, m)) = \delta(x - n, y - m)$

← ядро свертки ← Свертка

Обозначение свертки:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y), \quad g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - n, y - m) h(n, m) dn dm$$

← свойство симметрии

Необходимое и достаточное условие устойчивости системы: импульсная переходная характеристика системы, должна удовлетворять выражению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x - n, y - m)| dn dm < \infty$$

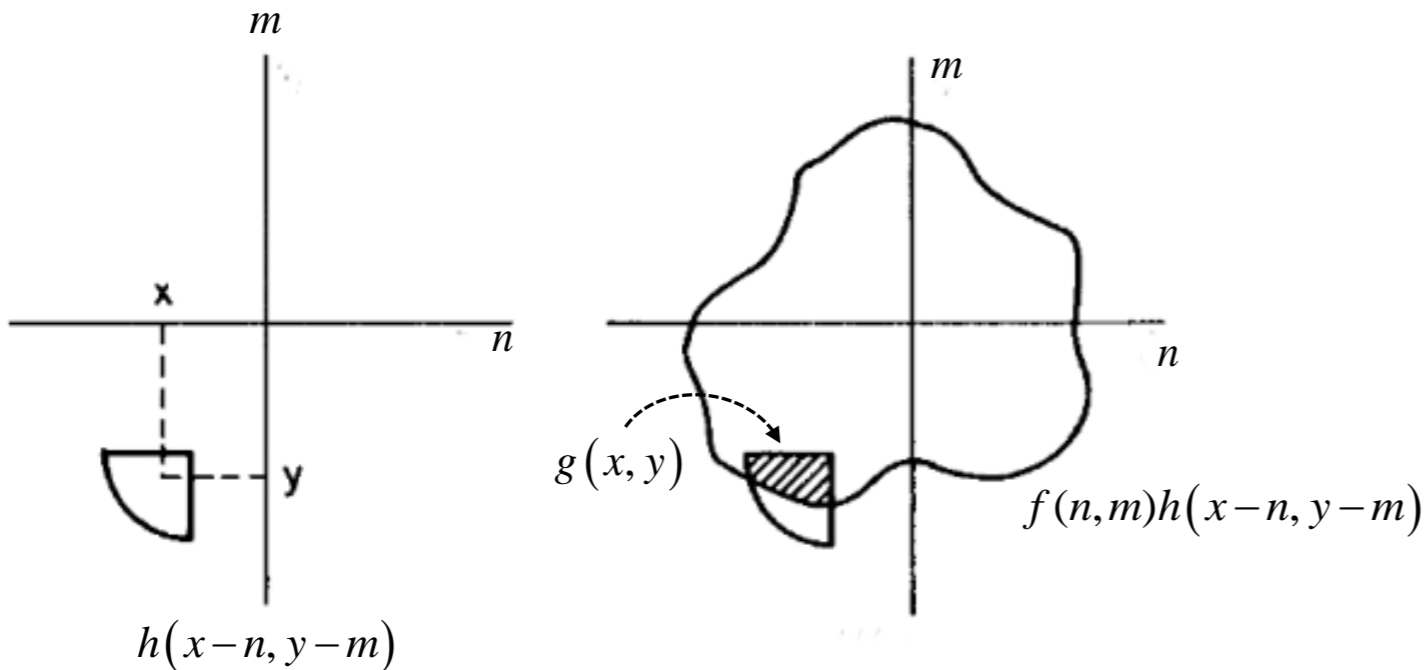
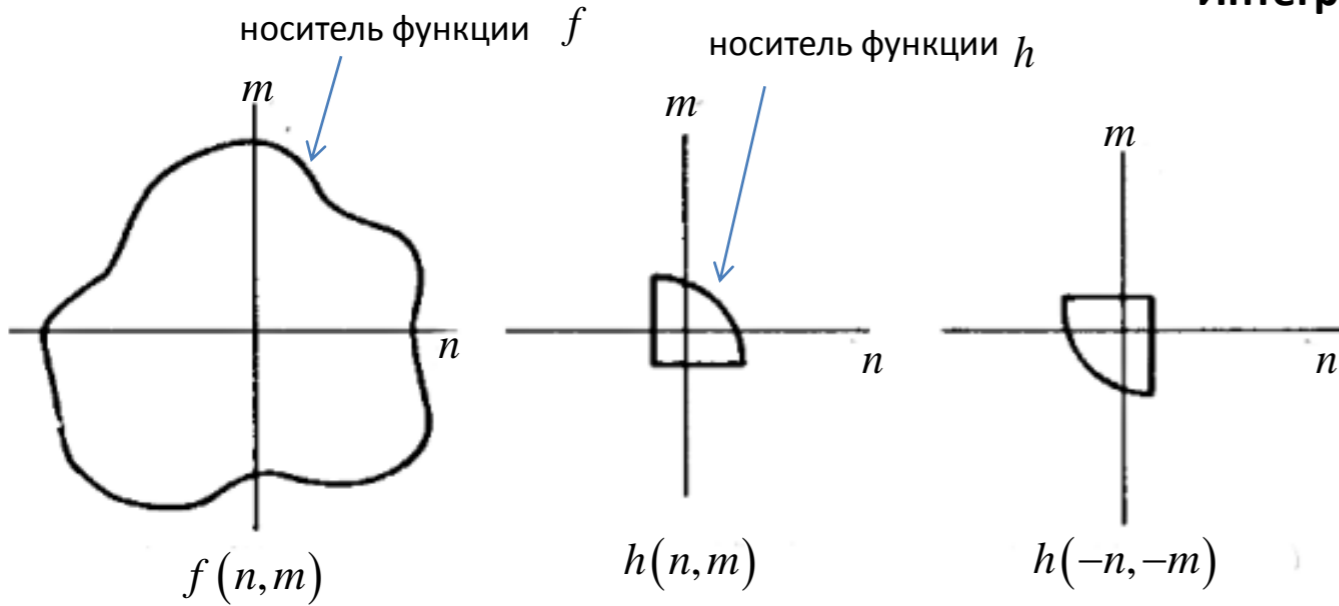
Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Интеграл свертки.

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x-n, y-m) dn dm$$

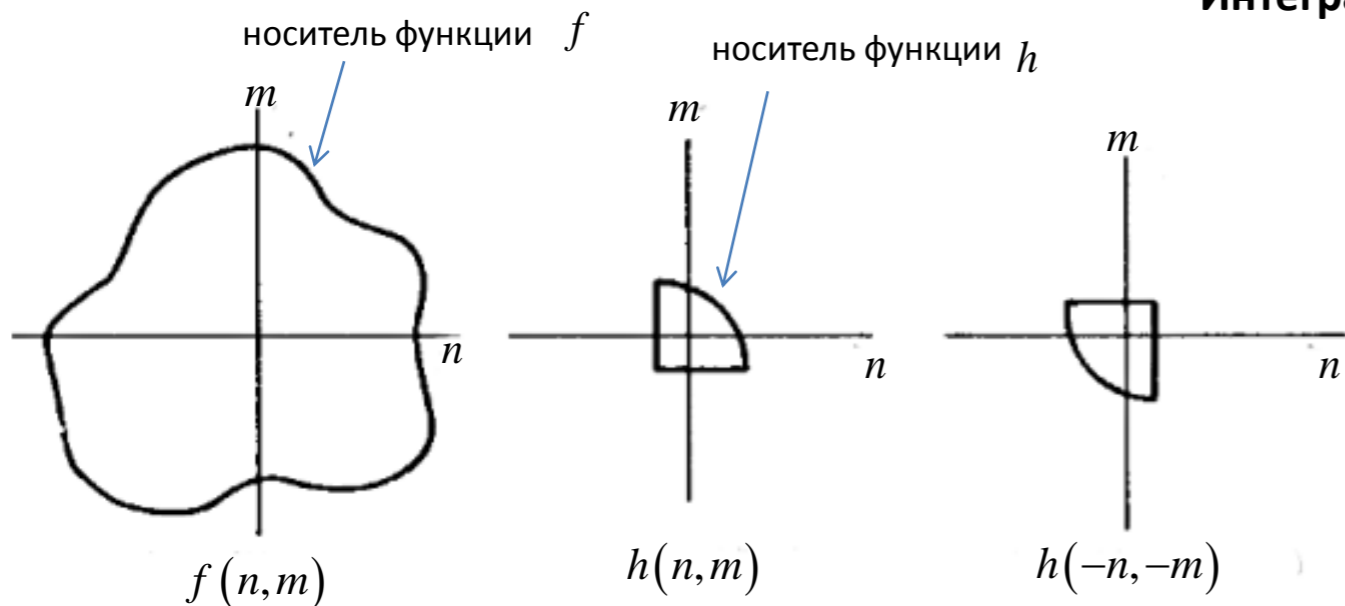
$h(x-n, y-m)$ - скользящее окно по (x, y)

Если импульсная характеристика (ИК) $h(n, m)$ ненулевая только на ограниченной области своих аргументов, то $h(n, m)$ - конечная импульсная характеристика (КИХ).



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Интеграл свертки.



$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x-n, y-m) dn dm$$

$h(x-n, y-m)$ - скользящее окно по (x, y)

Интерпретация:

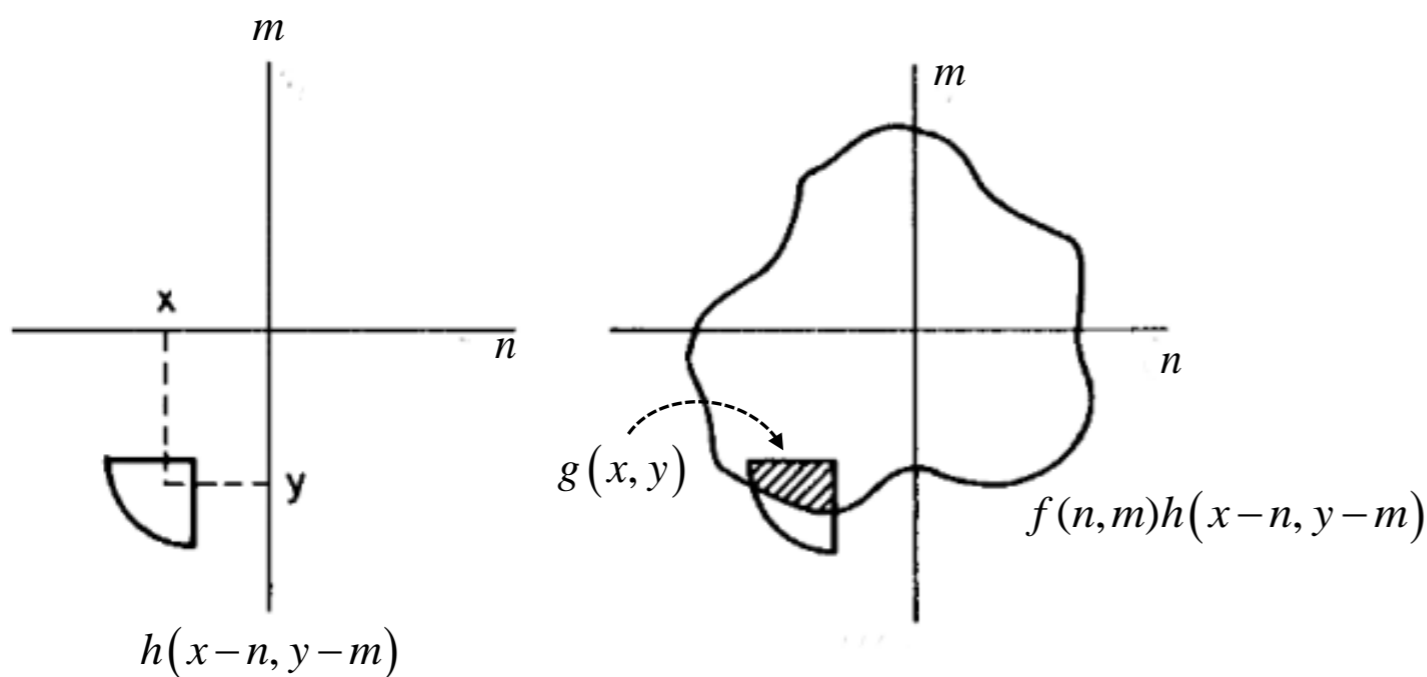
Пусть $h^*(n, m) = h(-n, -m)$:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h^*(x+n, y+m) dn dm$$

← скалярное произведение в точке (x, y)

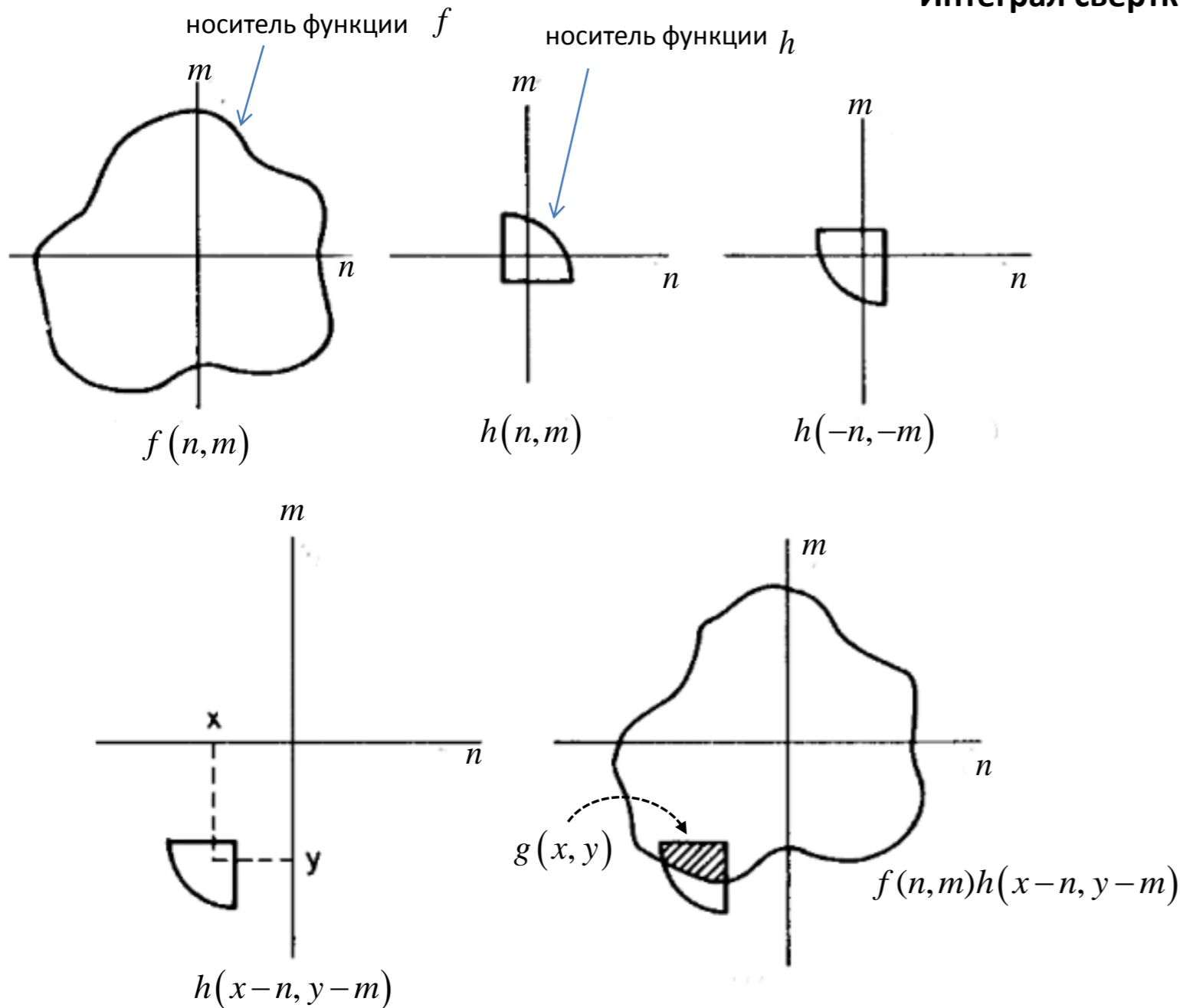
1) $g(x, y) = \langle f, h_{x,y}^* \rangle$ - проекция функции f на систему сдвинутых функций $\{h_{x,y}^*\}_{x,y}$

Чем больше проекция, тем f ближе к $h_{x,y}^*$. Когда проекция $g(x, y)$ максимальна f коллинеарна $h_{x,y}^*$.



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Интеграл свертки.



$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x-n, y-m) dn dm$$

$h(x-n, y-m)$ - скользящее окно по (x, y)

Интерпретация:

Пусть $h^*(n, m) = h(-n, -m)$:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h^*(x+n, y+m) dn dm$$

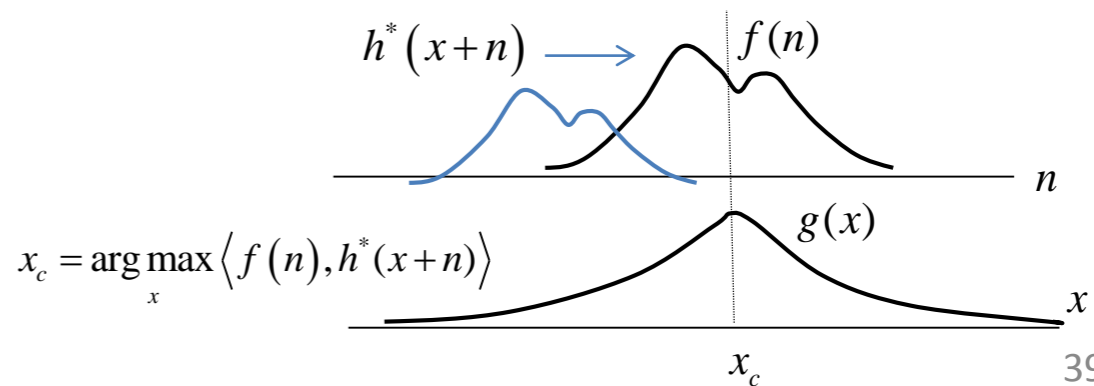
← скалярное произведение в точке (x, y)

1) $g(x, y) = \langle f, h_{x,y}^* \rangle$ - проекция функции f на систему сдвинутых функций $\{h_{x,y}^*\}_{x,y}$

Чем больше проекция, тем f ближе к $h_{x,y}^*$. Когда проекция $g(x, y)$ максимальна f коллинеарна $h_{x,y}^*$.

2) $g(x, y) = \langle f, h_{x,y}^* \rangle$ - корреляция функции f и $h_{x,y}^*$ в (x, y) .

Корреляция – мера похожести, пространственной близости.



$$x_c = \arg \max_x \langle f(n), h^*(x+n) \rangle$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Теорема о свертке – основной инструмент при построении систем обработки:

$$f(x, y) \longrightarrow \boxed{f(x, y) * h(x, y)} \longrightarrow g(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x - n, y - m) dn dm$$

$$G(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - n, y - m) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx \right) dn dm = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) H(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x n + \omega_y m)} dn dm = H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y)$$

$$\boxed{g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow G(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y)}$$

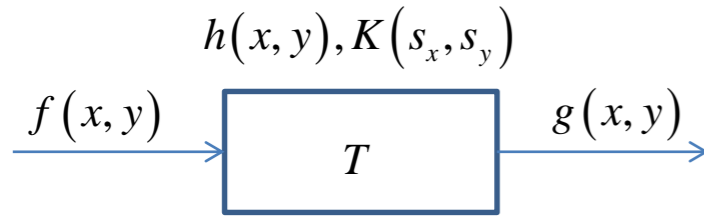
$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$$

$$f(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega_x, \omega_y) \longrightarrow \boxed{H \cdot F} \longrightarrow G(\omega_x, \omega_y) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g(x, y)$$

Модели линейных систем определяются импульсной характеристикой или частотной характеристикой (передаточной функцией).

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Преобразование Лапласа импульсной характеристики



Для исследования системы на вход подают тестовый сигнал и наблюдают за выходным сигналом. На основе сопоставления сигнала на выходе системы с входным сигналом строят модель преобразования.

T - линейный стационарный оператор:

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

Пусть $f(x, y) = e^{s_x x + s_y y}$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= T(f(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x-n, y-m) dn dm = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_x n + s_y m} h(x-n, y-m) dn dm = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_x(x-n) + s_y(y-m)} h(n, m) dn dm = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_x n - s_y m} h(n, m) dn dm \right]}_{K(s_x, s_y)} e^{s_x x + s_y y} \end{aligned}$$

$$T(e^{s_x x + s_y y}) = K(s_x, s_y) e^{s_x x + s_y y}$$

Собственное число

Собственная функция
линейного оператора T

Преобразование Лапласа – способ получить собственные числа импульсной характеристики:

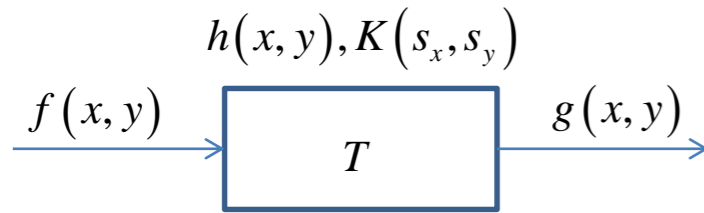
$$K(s_x, s_y) = \mathcal{L}_{s_x, s_y} \{h(n, m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-s_x n - s_y m} dn dm$$

$$\Rightarrow h(x, y) = \mathcal{L}_{s_x, s_y}^{-1} \{K(s_x, s_y)\}$$

получение импульсной характеристики по спектру собственных чисел.

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Передаточная функция



T - функция системы преобразования (линейная, пространственно-инвариантная):

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

Пусть $f(x, y) = e^{j(\omega_x x + \omega_y y)}$ - тестовая комплексная синусоида.

Тогда на выходе системы (реакция системы), свертка:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_x(x-n) + j\omega_y(y-m)} h(n, m) dn dm =$$
$$= \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-j\omega_x n - j\omega_y m} dn dm \right]}_{K(j\omega_x, j\omega_y)} e^{j\omega_x x + j\omega_y y} = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

$K(j\omega_x, j\omega_y)$ - передаточная функция

$$\Rightarrow T(f(x, y)) = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

← собственная функция оператора T

← собственное число оператора T

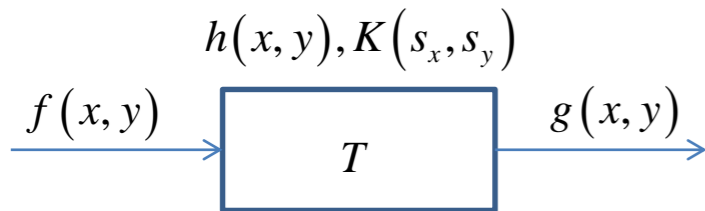
Если на входе $f(x, y)$ - чистая синусоида, собственная функция линейного стационарного оператора:

$$K(j\omega_x, j\omega_y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

- частотный коэффициент передачи

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Передаточная функция



T - функция системы преобразования (линейная, пространственно-инвариантная):

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

Пусть $f(x, y) = e^{j(\omega_x x + \omega_y y)}$ - тестовая комплексная синусоида.

Тогда на выходе системы (реакция системы), свертка:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_x(x-n) + j\omega_y(y-m)} h(n, m) dn dm =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-j\omega_x n - j\omega_y m} dn dm \right] e^{j\omega_x x + j\omega_y y} = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

$K(j\omega_x, j\omega_y)$ - передаточная функция

$$\Rightarrow T(f(x, y)) = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

← собственная функция оператора T
← собственное число оператора T

Если на входе $f(x, y)$ - чистая синусоида, собственная функция линейного стационарного оператора:

$$K(j\omega_x, j\omega_y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

- частотный коэффициент передачи

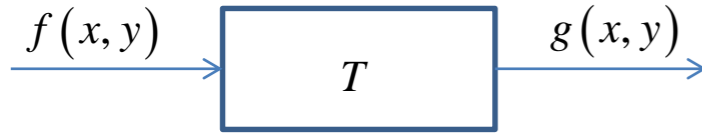
$$K(j\omega_x, j\omega_y) = |K(j\omega_x, j\omega_y)| e^{j\phi_K(\omega_x, \omega_y)}$$

$|K(j\omega_x, j\omega_y)|$ - Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$e^{j\phi_K(\omega_x, \omega_y)}$ - Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

$$h(x, y), K(s_x, s_y), H(\omega_x, \omega_y)$$



T - функция системы преобразования (линейная, пространственно-инвариантная):

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

Пусть $f(x, y) = e^{j(\omega_x x + \omega_y y)}$ - тестовая комплексная синусоида.

Тогда на выходе системы (реакция системы), свертка:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_x(x-n) + j\omega_y(y-m)} h(n, m) dn dm =$$

$$= \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-j\omega_x n - j\omega_y m} dn dm \right]}_{K(j\omega_x, j\omega_y) \text{ - передаточная функция}} e^{j\omega_x x + j\omega_y y} = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

$$\Rightarrow T(f(x, y)) = K(j\omega_x, j\omega_y) f(x, y)$$

← собственная функция оператора T
← собственное значение оператора T

Если на входе $f(x, y)$ - чистая синусоида, собственная функция линейного стационарного оператора:

$$K(j\omega_x, j\omega_y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \text{ - частотный коэффициент передачи}$$

Передаточная функция

$$K(j\omega_x, j\omega_y) = |K(j\omega_x, j\omega_y)| e^{j\varphi_K(\omega_x, \omega_y)}$$

$|K(j\omega_x, j\omega_y)|$ - Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$e^{j\varphi_K(\omega_x, \omega_y)}$ - Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

По Теореме о свертке для импульсной характеристики $h(x, y) = T(\delta(x, y))$:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) h(x-n, y-m) dn dm \Rightarrow G(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) F(\omega_x, \omega_y),$$

$$\text{где } H(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-j\omega_x n - j\omega_y m} dn dm = K(j\omega_x, j\omega_y)$$

$$\Rightarrow K(j\omega_x, j\omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) = \frac{G(\omega_x, \omega_y)}{F(\omega_x, \omega_y)} \text{ - Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)}$$

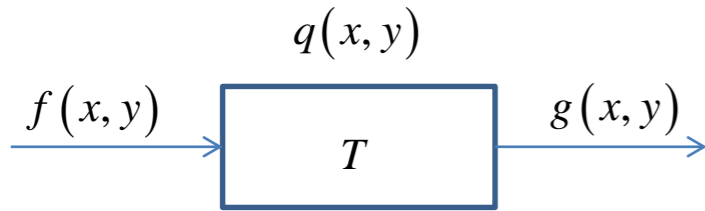
Через преобразование Лапласа:

$$K(s_x, s_y) = \mathcal{L}_{s_x, s_y} \{h(n, m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(n, m) e^{-s_x n - s_y m} dn dm$$

$$\Rightarrow h(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega_x, \omega_y)\} = \mathcal{L}_{s_x, s_y}^{-1} \{K(s_x, s_y)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega_x, j\omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Переходная характеристика



T - функция системы преобразования:

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

Пусть $f(x, y) = \theta(x, y)$ - тестовый перепад яркости (функция Хевисайда)

Тогда на выходе системы (реакция системы):

$$q(x, y) = T(\theta(x, y)) \text{ - переходная характеристика.}$$

$$\Rightarrow h(x) = T(\theta'(x)) = T\left(\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \frac{dT(\theta(x))}{dx} = \frac{dq(x)}{dx} \text{ - импульсная характеристика для линейной } T$$

$$q(x) = \int_{-\infty}^x h(\tau) d\tau$$

Разложение $f(x)$ на "ступеньки" : $f(x) = f(0)\theta(x) + \int_0^x \frac{df(\tau)}{d\tau} \theta(x-\tau) d\tau$

Тогда на выходе системы:

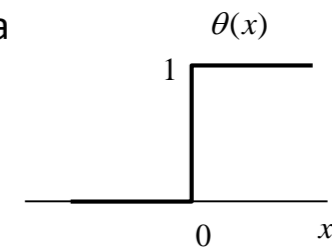
$$g(x) = T\left(f(0)\theta(x) + \int_0^x \frac{df(\tau)}{d\tau} \theta(x-\tau) d\tau\right) \longrightarrow$$

При $q(x) = 0, x < 0$:

$$g(x) = f(0)q(x) + \frac{df(x)}{dx} * q(x) = f(0)q(x) + \int_0^x \frac{df(\tau)}{d\tau} q(x-\tau) d\tau$$

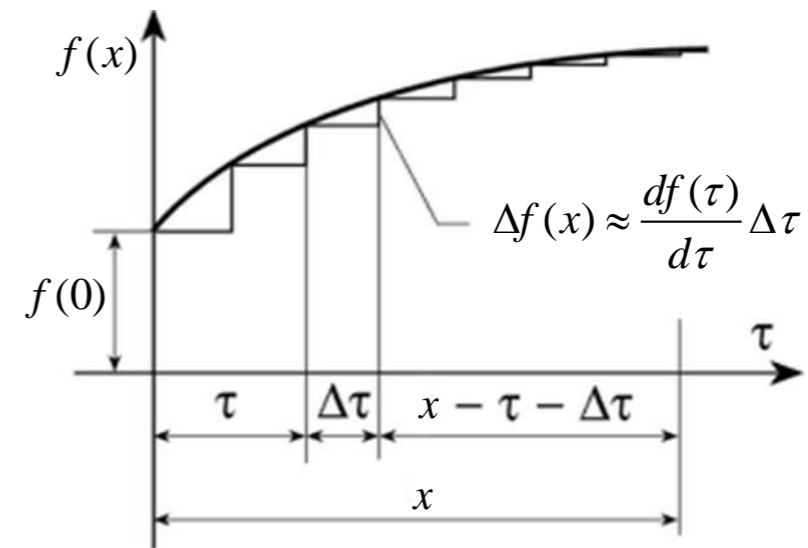
Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\tau) d\tau \Rightarrow \delta(x) = \theta'(x)$$

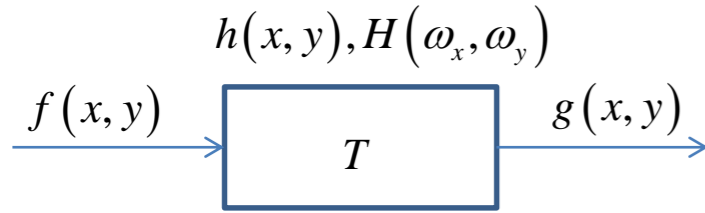
$$\theta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 + \text{th } kx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-2kx}}$$



интеграл Дюамеля

Конструирование элементарных фильтров

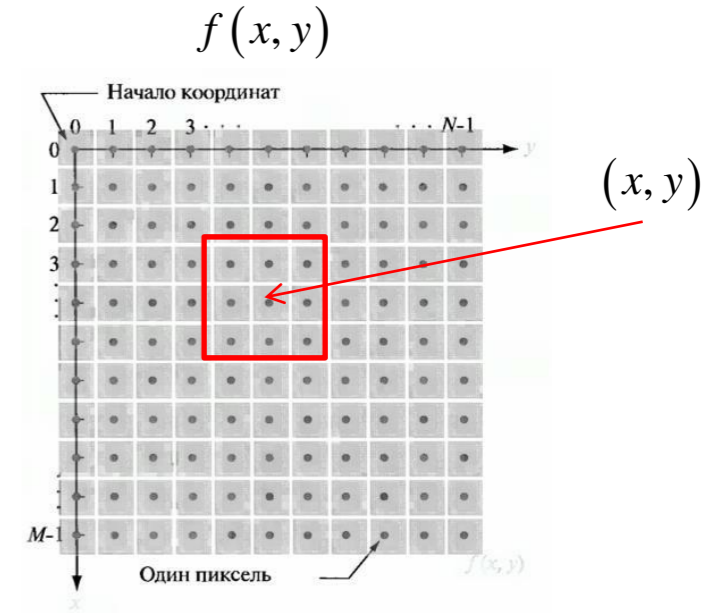
Сглаживание через усреднение



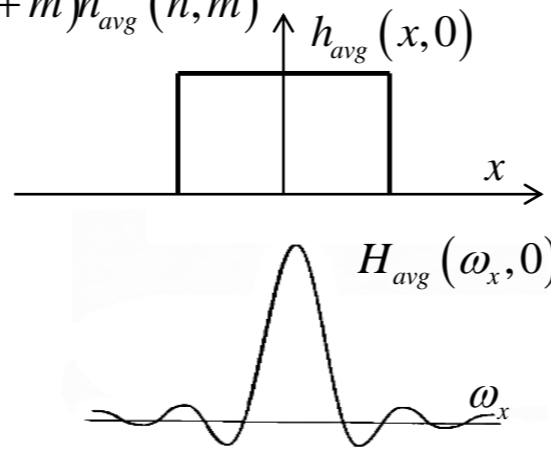
$$T: g(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{avg}(n, m) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}(-n, -m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}^*(n, m)$$

$$h_{avg}(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$h_{avg}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



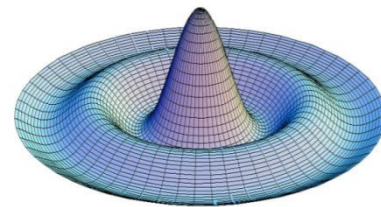
Для непрерывного случая:

$$H_{avg}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{9} e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy =$$

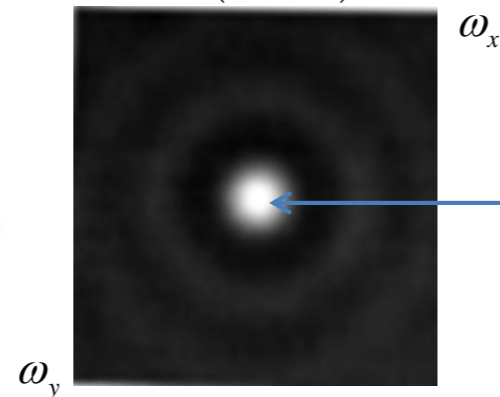
$$= \frac{1}{9} \int_{-1}^1 e^{-j\omega_y y} dy \int_{-1}^1 e^{-j\omega_x x} dx =$$

$$\frac{(e^{j\omega_x} - e^{-j\omega_x})(e^{j\omega_y} - e^{-j\omega_y})}{9\omega_x\omega_y}$$

$$= \frac{4 \sin \omega_x \sin \omega_y}{9 \omega_x \omega_y}$$



$$H_{avg}(\omega_x, \omega_y)$$

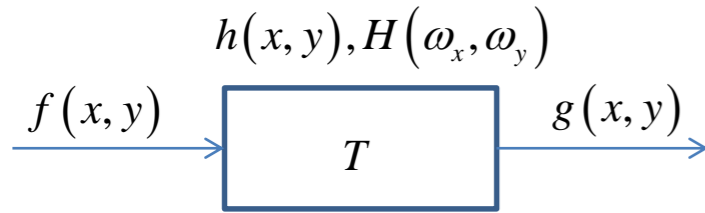


$$g(x, y) = f(x, y) * h_{avg}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_{avg}(\omega_x, \omega_y) \}$$

Низкочастотные компоненты передают размытые образы на изображении

Конструирование элементарных фильтров

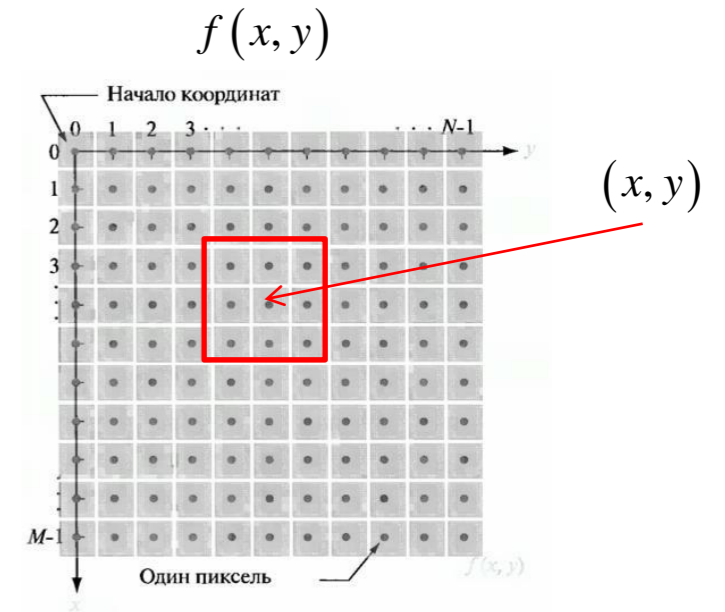
Сглаживание через усреднение



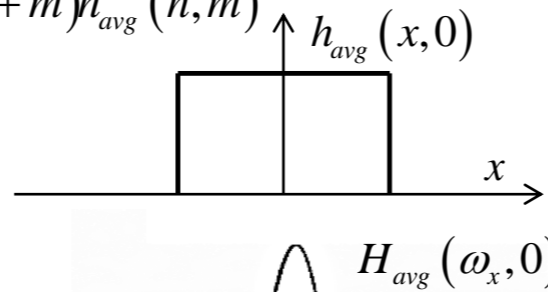
$$T: g(x, y) = \frac{1}{9} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_{avg}(n, m) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}(-n, -m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_{avg}^*(n, m)$$

$$h_{avg}(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$h_{avg}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



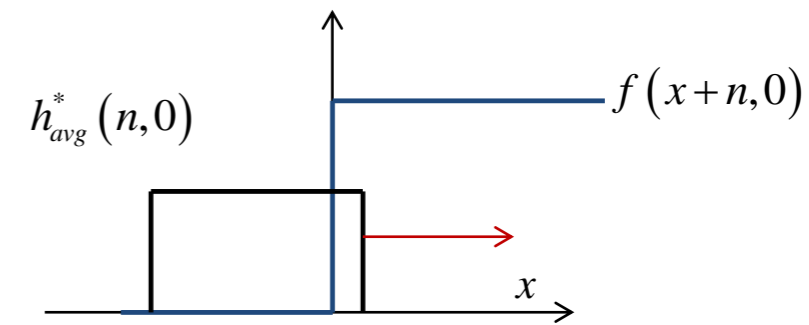
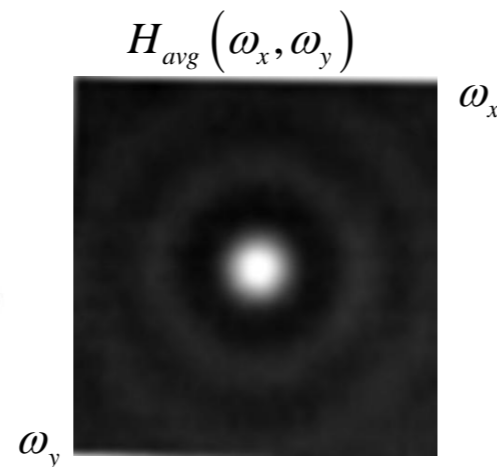
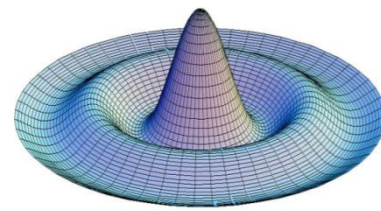
Для непрерывного случая:

$$H_{avg}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{9} e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy =$$

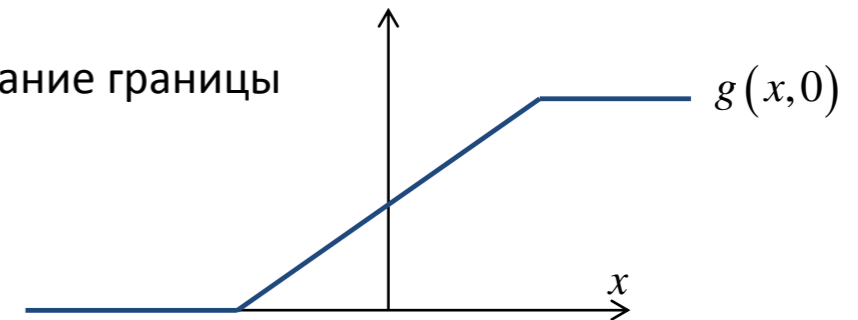
$$= \frac{1}{9} \int_{-1}^1 e^{-j\omega_y y} dy \int_{-1}^1 e^{-j\omega_x x} dx =$$

$$= \frac{(e^{j\omega_x} - e^{-j\omega_x})(e^{j\omega_y} - e^{-j\omega_y})}{9\omega_x\omega_y}$$

$$= \frac{4 \sin \omega_x \sin \omega_y}{9 \omega_x \omega_y}$$

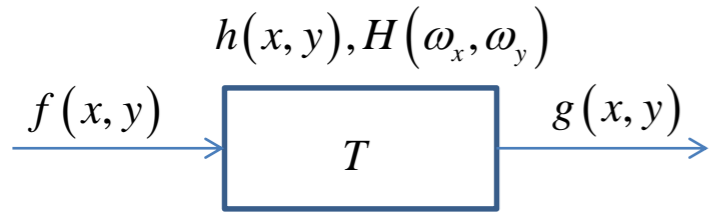


Сглаживание границы



Конструирование элементарных фильтров

Сглаживание через взвешенное усреднение



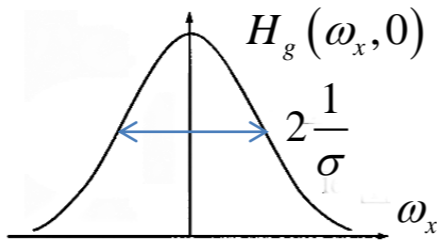
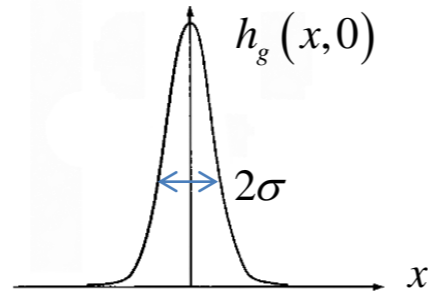
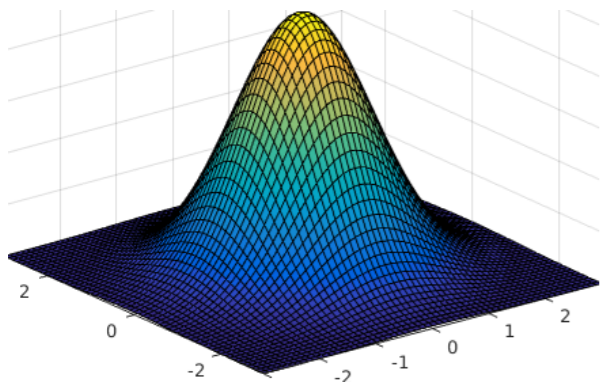
$$g(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_g(n, m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_g^*(n, m)$$

Для непрерывного случая:

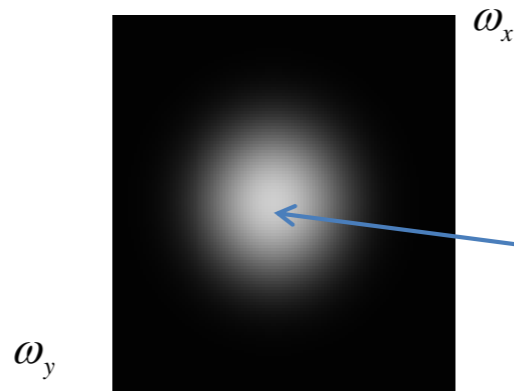
$$h_{avg}(x, y) = Ae^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$H_g(\omega_x, \omega_y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x^2+y^2)} e^{-j\omega_x x - j\omega_y y} dx dy =$$

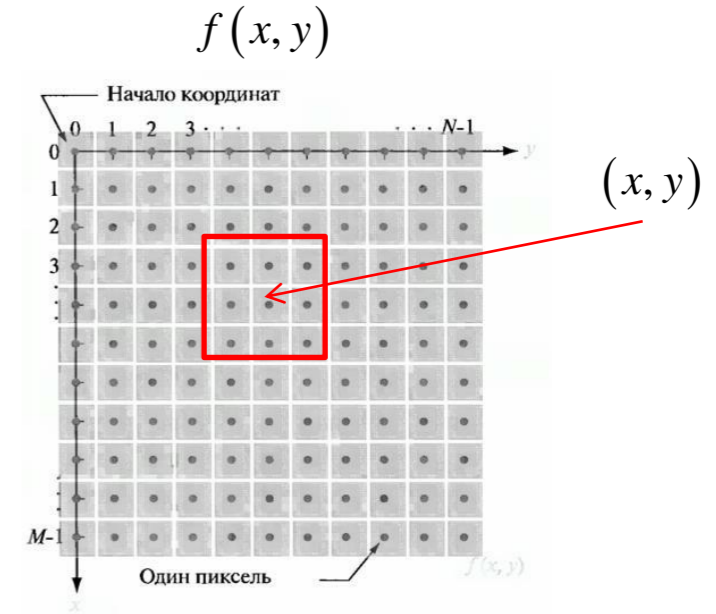
$$= 2\pi\sigma^2 Ae^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$



$$H_g(\omega_x, \omega_y)$$



$$h_g(x, y) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

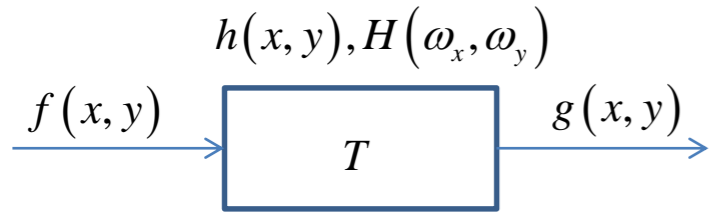


$$g(x, y) = f(x, y) * h_g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_g(\omega_x, \omega_y) \}$$

Низкочастотные компоненты передают размытые образы на изображении

Конструирование элементарных фильтров

Сглаживание через взвешенное усреднение



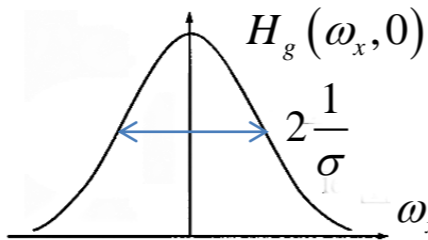
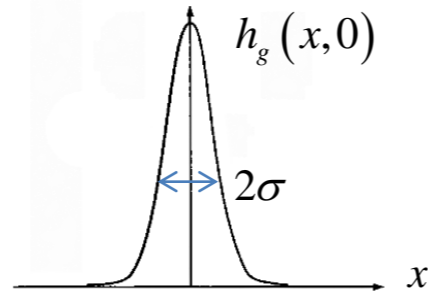
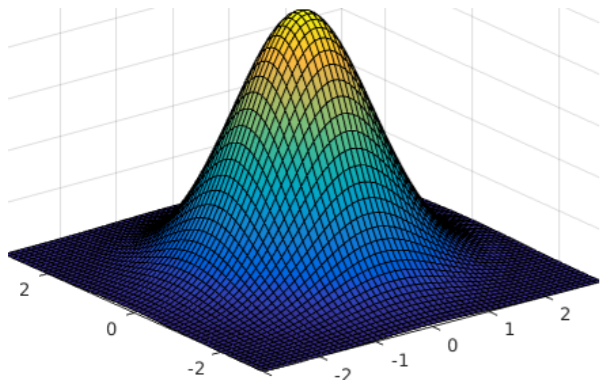
$$g(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_g(n, m) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x+n, y+m) h_g^*(n, m)$$

Для непрерывного случая:

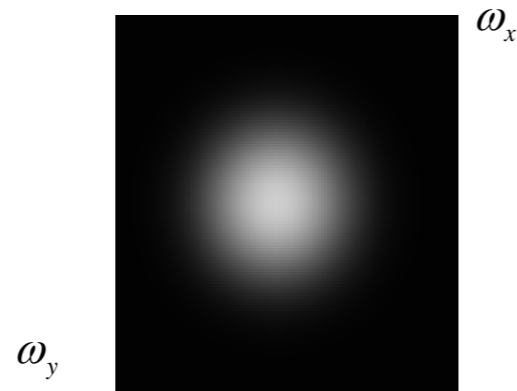
$$h_{avg}(x, y) = Ae^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$H_g(\omega_x, \omega_y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x^2+y^2)} e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy =$$

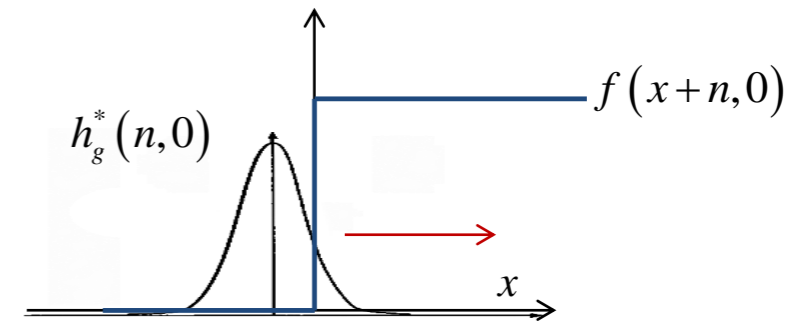
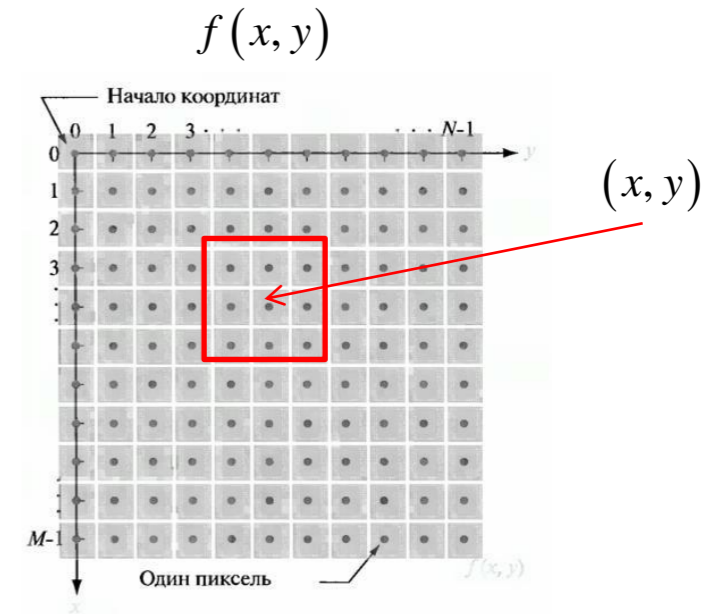
$$= 2\pi\sigma^2 Ae^{-\frac{1}{2}\sigma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$



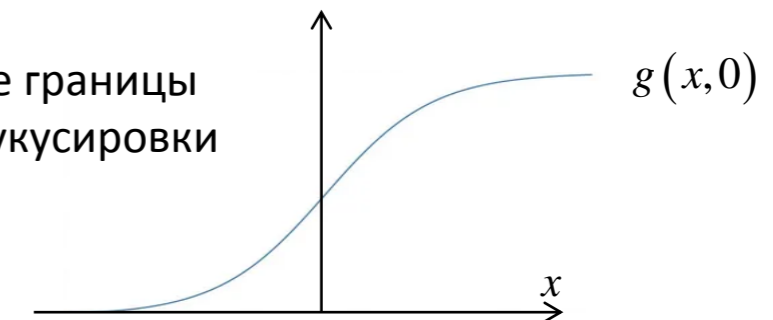
$$H_g(\omega_x, \omega_y)$$



$$h_g(x, y) = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

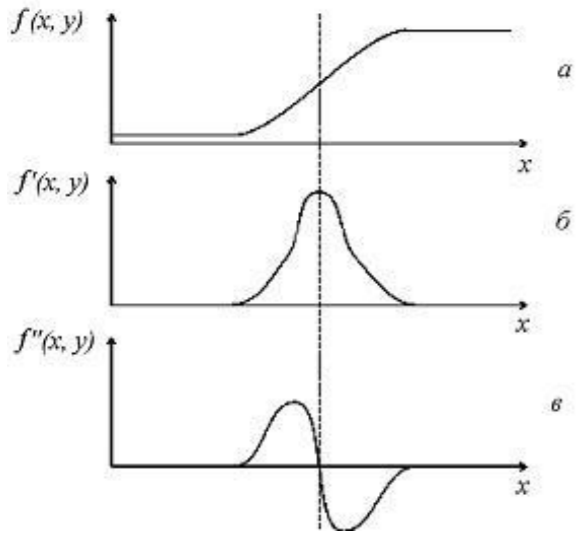


Сглаживание границы
модель расфокусировки



Конструирование элементарных фильтров

Вторая производная. Лапласиан.



$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y-1) - 2f(x, y) + f(x, y+1)$$

$$g(x, y) = \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

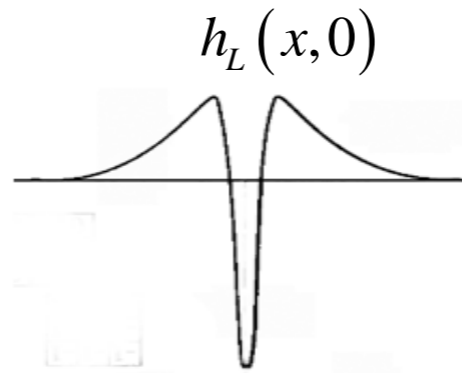
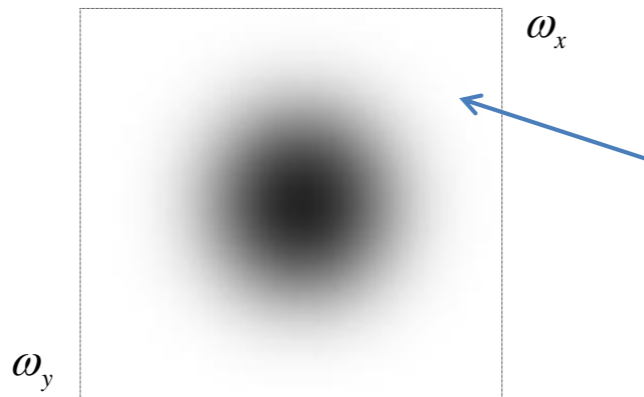
$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_H(n, m)$$

Для непрерывного случая:

$$G(\omega_x, \omega_y) = (\omega_x^2 + \omega_y^2) F(\omega_x, \omega_y) = H_H(\omega_x, \omega_y) F(\omega_x, \omega_y)$$

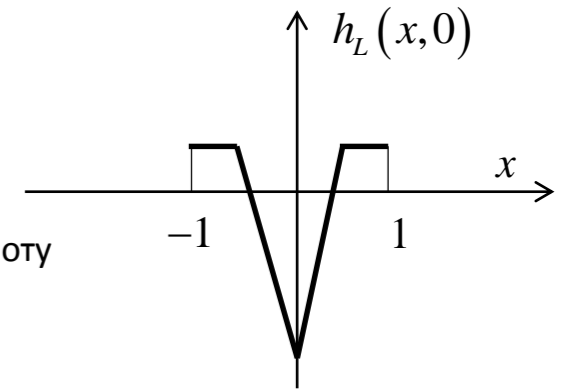
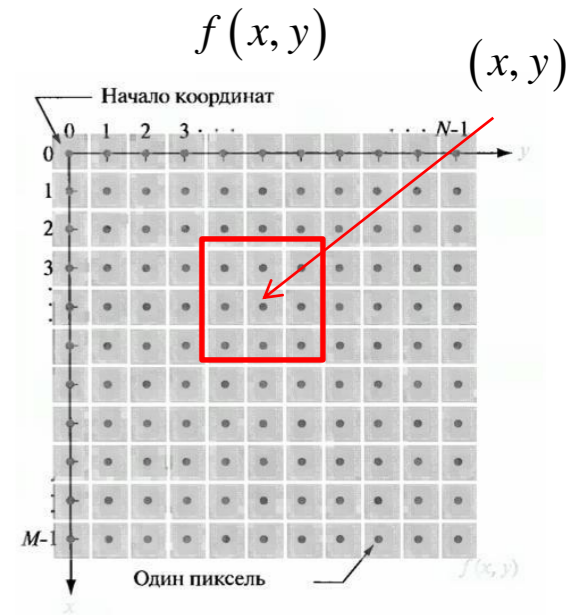
$$H_H(\omega_x, \omega_y) = (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$



инвариантна к повороту

$$h_{L4}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_L(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Высокочастотные компоненты передают резкие перепады яркости на изображении

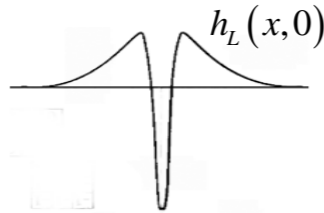
Конструирование элементарных фильтров

Повышение четкости, нерезкое маскирование

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y)$$

$$h_L(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



инвариантна к повороту

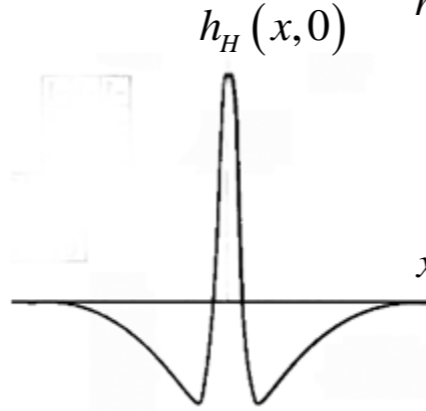
$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) = \\ &= 10f(x, y) - \bar{f}(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 (-1) \cdot f(x-n, y-m) + 10f(x, y) = \\ &= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_H(n, m) \end{aligned}$$

Для непрерывного случая:

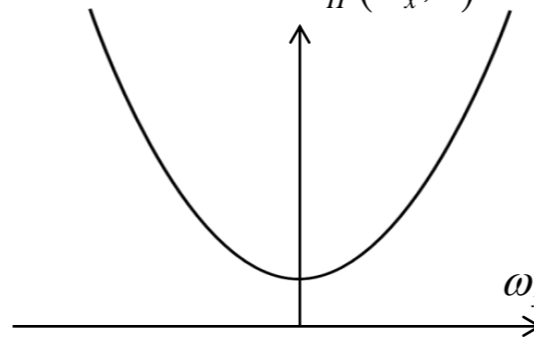
$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y) &= F(\omega_x, \omega_y) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)F(\omega_x, \omega_y) = \\ &= (1 + (\omega_x^2 + \omega_y^2))F(\omega_x, \omega_y) = H_H(\omega_x, \omega_y)F(\omega_x, \omega_y) \end{aligned}$$

$$H_H(\omega_x, \omega_y) = 1 + (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

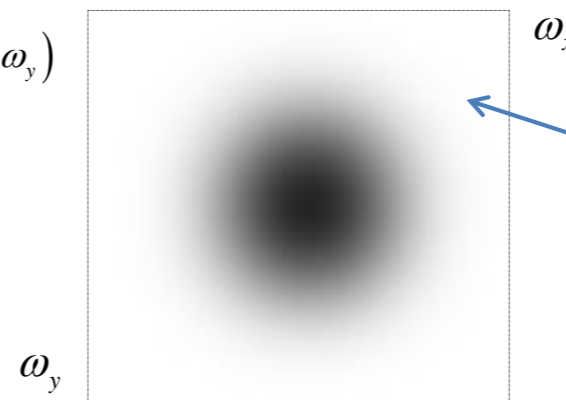
$$h_H(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



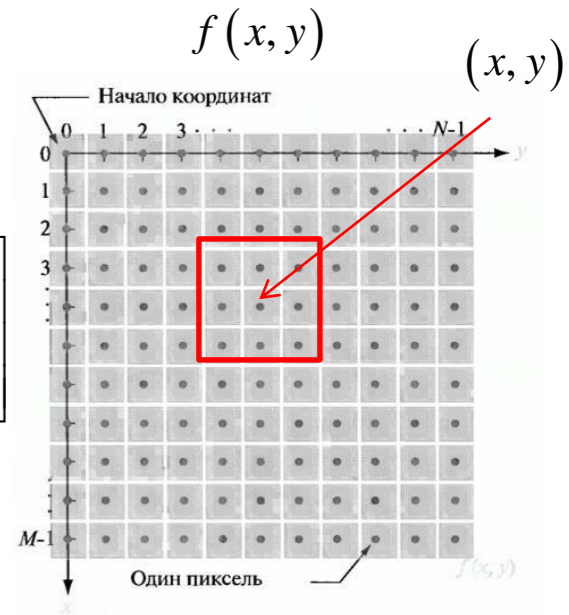
$$H_H(\omega_x, 0)$$



$$H_H(\omega_x, \omega_y)$$



Высокочастотные компоненты передают резкие образы на изображении



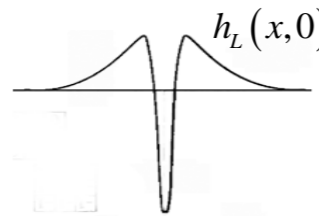
Конструирование элементарных фильтров

Повышение четкости, нерезкое маскирование

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) - 9f(x, y) = \bar{f}(x, y) - 9f(x, y)$$

$$h_L(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



инвариантна к повороту

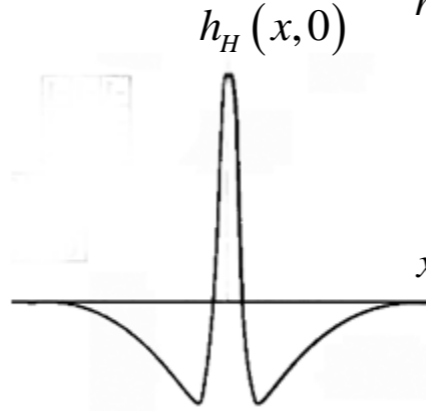
$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) = \\ &= 10f(x, y) - \bar{f}(x, y) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 (-1) \cdot f(x-n, y-m) + 10f(x, y) = \\ &= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 f(x-n, y-m) h_H(n, m) \end{aligned}$$

Для непрерывного случая:

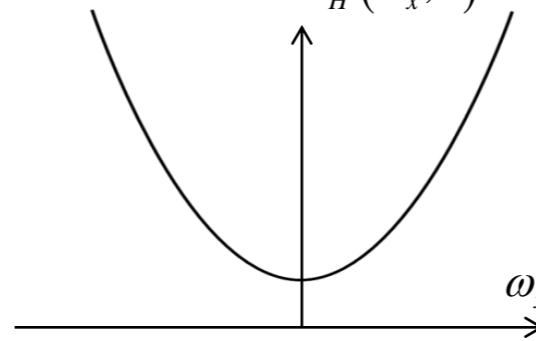
$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y) &= F(\omega_x, \omega_y) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)F(\omega_x, \omega_y) = \\ &= (1 + (\omega_x^2 + \omega_y^2))F(\omega_x, \omega_y) = H_H(\omega_x, \omega_y)F(\omega_x, \omega_y) \end{aligned}$$

$$H_H(\omega_x, \omega_y) = 1 + (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

$$h_H(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$H_H(\omega_x, 0)$$



$$H_H(\omega_x, \omega_y)$$

