Привилигированная информация и дистиляция моделей

Грабовой Андрей Валериевич

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Москва
2019 г

Когда возникает задача:

1. изменение признакового описания объектов;
2. использования информации из "будущего";
3. уменьшение сложности модели;
4. использования нескольких типо признаков.

Необходимые понятия

Definition

Дистилляция модели — уменьшение сложности модели путем выбора модели в множестве более простых моделей с использованием ответов более сложной модели.

Definition

Привилегированная информация — множество признаков, которые доступны только в момент выбора модели, но не в момент тестирования.

Definition

Учитель — фиксируемая модель, ответы которой используются при выборе модели ученика.

Definition

Ученик — модель, которая выбирается согласно какого-либо критерия.

Постановка задачи обучения с учителем

Задано:

1. множество объектов $\mathbf{\Omega}$, где $|\mathbf{\Omega}| = m$;
2. множество объектов $\mathbf{\Omega}^*$, где $|\mathbf{\Omega}^*| = m^*$;
3. множество целевых переменных $\mathbb{Y}$, причем $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}\bigl(\omega_i\bigr)$;
4. отображение $\varphi : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, обозначим $\mathbf{x}_i = \varphi(\omega_i)$;
5. отображение $\varphi^* : \mathbf{\Omega}^* \to \mathbb{R}^{n^*}$, обозначим $\mathbf{x}_i^* = \varphi^*(\omega_i)$.

Введем множество объектов, для которых известна привилигированя информация:

$$\mathcal{I} = \{1 \leq i \leq m | \text{ для } i\text{-го объекта задана привилегированная информация}\},$$

а множество индексов объектов, для которых не известна привилегированная информация, обозначим $\{1, \cdots, m\} \setminus \mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}$.

Постановка задачи обучения с учителем

Пусть на множестве привилегированных признаков задана функция учителя $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{Y}^*.$$

Заметим:

1. множество $\mathbb{Y}^* = \mathbb{Y}$ для задачи регрессии;
2. множество $\mathbb{Y}^*$ является единичным симплексом $\mathcal{S}_K$ в пространстве размерности K для задачи классификации.

Для удобства введем обозначения: $\mathbf{f}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{S}$.
Требуется выбрать модель ученика $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ из множества:

$$\mathfrak{G} = \{\mathbf{g} | \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Y}^*\}.$$

Для задачи классификации множество $\mathfrak{G}$ может быть параметрическим семейством функций линейных моделей:

$$\mathfrak{G}_{\text{lin,cl}} = \left\{\mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{x}) | \mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{x}) = \mathbf{softmax}(\mathbf{W}\mathbf{x}), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times K}\right\}.$$

Постановка задачи: Хинтон

Рассматривается:

1. привилегированная информация $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$;
2. классификация $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, y_i \in \mathbb{Y} = \{1, \cdots, K\}$.

Обозначим y_i — класс объекта, а $\mathbf{y}_i$ вектор вероятности для i-го объекта.
Параметрическое семейство учителя и ученика:

$$\mathfrak{F}_{\text{cl}} = \left\{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \text{softmax}\bigl(\mathbf{v}(\mathbf{x})/T\bigr), \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{\text{cl}} = \left\{\mathbf{g} | \mathbf{g} = \text{softmax}\bigl(\mathbf{z}(\mathbf{x})/T\bigr), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K\right\},$$

где $\mathbf{z}, \mathbf{v}$ — это дифференцируемые параметрические функции заданной структуры, T — параметр температуры.
Параметр температуры T имеет следующие свойства:

1. при $T \to 0$ получаем вектор, в котором один из классов имеет единичную вероятность;
2. при $T \to \infty$ получаем равновероятные классы.

Функция потерь $\mathcal{L}$ в которой учитывается перенос информации от модели учителя $\mathbf{f}$ к модели ученика $\mathbf{g}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = -\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\Big|_{T=1}}_{\text{исходная функция потерь}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\Big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\Big|_{T=T_0}}_{\text{слагаемое дистилляция}},$$

где $\cdot\Big|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t.

Получаем оптимизационную задачу:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\min_{\mathbf{g}\in\mathfrak{G}_{\text{cl}}} \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}).$$

Постановка задачи: Вапник

Рассматривается:

1. привилегированная информация $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$;
2. классификация $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*, y_i)\}_{i=1}^{m}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^{n^*}, y_i \in \{1, \cdots, K\}$.

Параметрическое семейство учителя и ученика:

$$\mathfrak{F}_{\text{cl}}^* = \left\{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \text{softmax}\bigl(\mathbf{v}^*\left(\underline{\mathbf{x}^*}\right)/T\bigr), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{R}^K\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{\text{cl}} = \left\{\mathbf{g} | \mathbf{g} = \text{softmax}\bigl(\mathbf{z}(\mathbf{x})/T\bigr), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K\right\},$$

где $\mathbf{z}, \mathbf{v}^*$ — это дифференцируемые параметрические функции заданной структуры, T — параметр температуры.

Функция потерь:

$$\mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\bigr|_{T=1} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*)\bigr|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\bigr|_{T=T_0},$$

где $\cdot\bigr|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t.

Двухэтапная модель обучения: Вапник

Требуется построить модель, которая использует привилегированную информацию $\mathbf{x}_i^*$ при поиске оптимальной модели $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$.
Рассматривается двухэтапная модель обучения:

1. выбираем оптимальную модель учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{\text{cl}}^*$;
2. выбираем оптимальную модель ученика $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$ используя дистилляцию.

Модель ученика — это функция, которая минимизирует $\mathcal{L}_{st}$.
Модель учителя — это функция, которая минимизирует кросс–энтропийную функции ошибки:

$$\mathcal{L}_{th}(\mathbf{f}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*).$$

Вероятностное обоснование

Принцип максимума правдоподобия:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g}\in\mathfrak{G}} \prod_{i=1}^{N} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr).$$

Вероятностные предположения:

1. задано распределение целевой переменной $p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr)$;
2. задано совместное распределение целевой переменной и ответов модели учителя $p\bigl(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr)$;
3. для всех $\omega \in \mathbf{\Omega}^*$ элементы $\mathbf{y}(\omega)$ и $\mathbf{s}(\omega)$ являются зависимыми величинами, так как ответы учителя должны коррелировать с истинными ответами;
4. если $|\mathbf{\Omega}^*| = 0$ то решение должно соответствовать решению максимума правдоподобия.

Совместное правдоподобие истинных меток и меток учителя:

$$p\bigl(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\bigr) = \prod_{i\not\in\mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i\in\mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr).$$

Совместное правдоподобие истинных меток и меток учителя:

$$p\big(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\big) = \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big).$$

По формуле условной вероятности:

$$p\big(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) = p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big)p\big(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big)$$

Получаем:

$$p\big(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\big) = \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big).$$

Заметим, что $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{s}_i$ зависимы только через переменную $\mathbf{x}_i$:

$$p\big(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\big) = \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\big(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big).$$

Совместное правдоподобие:

$$p\bigl(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\bigr) = \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr).$$

Получаем оптимизационную задачу для поиска $\hat{\mathbf{g}}$:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\bigl(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr).$$

Для удобства минимизируется логарифм:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \not\in \mathcal{I}} \log p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p\bigl(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p\bigl(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr),$$

где параметр $\lambda \in [0, 1]$ введен для взвешивания ошибок на истинных ответах и ошибок относительно ответов учителя.

Частный случай: классификация

Для задачи многоклассовой классификации рассматриваются следующие вероятностные предположения:

1. рассматривается функция учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}^*_{\mathrm{cl}}$;
2. рассматривается функция ученика следующего вида $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\mathrm{cl}}$;
3. для истинных меток рассматривается категориальное распределение $p\bigl(y|\mathbf{x},\mathbf{g}\bigr) = \mathrm{Cat}\bigl(\mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}\bigr)\bigr)$, где $\mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}\bigr)$ задает вероятность каждого класса;
4. для меток учителя введем плотность распределения

$$p\bigl(\mathbf{s}|\mathbf{x},\mathbf{g}\bigr) = C\prod_{k=1}^{K} g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr)^{s^k},$$

где g^k обозначает вероятность класса k, которую предсказывает модель ученика, а s^k — вероятность класса k, которую предсказывает модель учителя.

Частный случай: классификация

Theorem (Грабовой 2020)

Пусть вероятнось каждого класса отделима от нуля и единицы, то есть для всех k выполняется $1 > 1 - \varepsilon > g_k(\mathbf{x}) > \varepsilon > 0$, тогда при

$$C = (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^{K} g_k(\mathbf{x}) \log g_k(\mathbf{x}) \tag{1}$$

функция $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = C \prod_{k=1}^{K} g_k(\mathbf{x})^{s^k}$ является плотностью распределения.

Получаем оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g}\in\mathcal{G}} &\sum_{i\not\in\mathcal{I}}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i)\big|_{T=1} \\ &+ (1-\lambda)\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i)\big|_{T=1} + \lambda\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{k=1}^{K} s_{i,k} \log g_k(\mathbf{x}_i)\big|_{T=T_0} \\ &+ \lambda\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{k=1}^{K}\left(\log g_k(\mathbf{x}_i)\big|_{T=T_0} + \log\log\frac{1}{g_k(\mathbf{x}_i)}\big|_{T=T_0}\right).\end{aligned}$$

Частный случай: регрессия

Задача регрессии имеет вероятностные предположения:

1. рассматривается функция учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}^*_{\mathrm{rg}}$:
$$\mathfrak{F}^*_{\mathrm{rg}} = \left\{\mathbf{f}|\mathbf{f} = \mathbf{v}^*\bigl(\mathbf{x}^*\bigr), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{R}\right\};$$
2. рассматривается функция ученика $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\mathrm{rg}}$:
$$\mathfrak{G}_{\mathrm{rg}} = \left\{\mathbf{g}|\mathbf{g} = \mathbf{z}\bigl(\mathbf{x}\bigr), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^K\right\};$$
3. истинные метки имеют нормальное распределение
$$p\bigl(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}\bigr) = \mathcal{N}\bigl(y|\mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}\bigr), \sigma\bigr);$$
4. метки учителя распределены
$$p\bigl(s|\mathbf{x}, \mathbf{g}\bigr) = \mathcal{N}\bigl(s|\mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}\bigr), \sigma_s\bigr);$$

Оптимизационная задача:
$$\begin{aligned}\hat{g} = \arg\min_{g\in\mathcal{G}} \sum_{i\not\in\mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\right)^2 \\ + (1-\lambda) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\right)^2 + \lambda \sum_{i\in\mathcal{I}} \sigma_s^2 \left(s_i - \mathbf{g}\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\right)^2.\end{aligned}$$

Частный случай: регрессия

Оптимизационная задача:

$$\hat{g} = \arg\min_{g \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\right)^2 + (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\right)^2 + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma_s^2 \left(s_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\right)^2.$$

Theorem (Грабовой 2020)

Пусть множество $\mathcal{G}$ описывает класс линейных функций вида $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Тогда решение оптимизационной задачи эквивалентно решению следующей задачи линейной регрессии $\mathbf{y}'' = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, где $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = diag(\boldsymbol{\sigma}')$ и $\mathbf{y}''$ имеют следующий вид:

$$\sigma_i' = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } i \notin \mathcal{I} \\ (1-\lambda)\,\sigma^2 + \lambda\sigma_s^2, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\mathbf{y}'' = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}',$$

$$y_i' = \begin{cases} \sigma^2 y_i, & \text{если } i \notin \mathcal{I} \\ (1-\lambda)\,\sigma^2 y_i + \lambda\sigma_s^2 s_i, & \text{иначе} \end{cases}.$$

1. *Christopher Bishop*, Pattern Recognition and Machine Learning, 2016.
2. *Lopez-Paz D., Bottou L., Scholkopf B., Vapnik V.* Unifying Distillation and Privileged Information // In International Conference on Learning Representations. Puerto Rico, 2016.
3. *Hinton G., Vinyals O., Dean J.* Distilling the Knowledge in a Neural Network // NIPS Deep Learning and Representation Learning Workshop. 2015.
4. *Madala H., Ivakhnenko A.* Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. Boca Raton: CRC Press Inc., 1994.
5. *Грабовой А. В., Стрижов В. В.* Анализ моделей привилегированного обучения и дистилляции // Автоматика и Телемеханика (на рассмотрении)