MIPT

ВЦ РАН

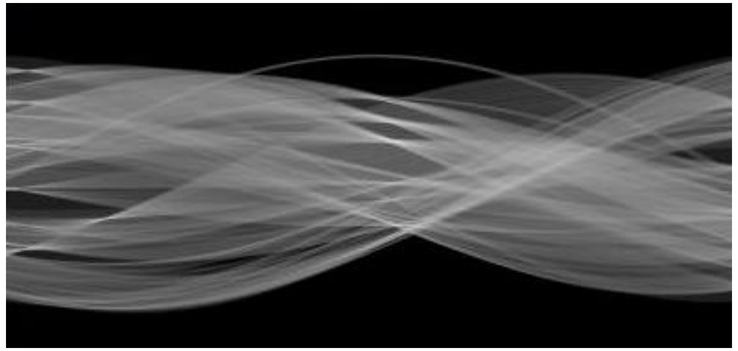
Федеральный исследовательский центр
Информатика и Управление
Российской академии наук

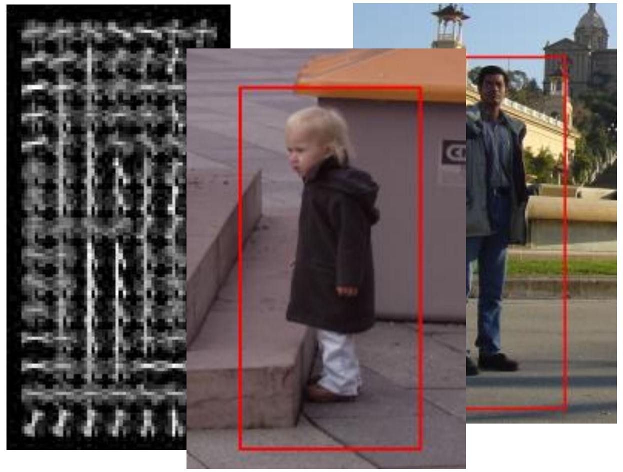
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

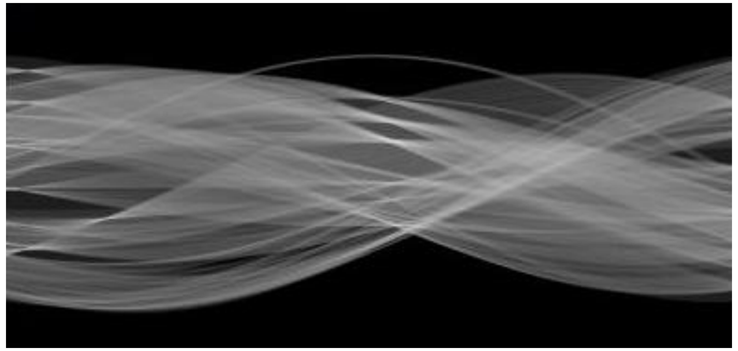


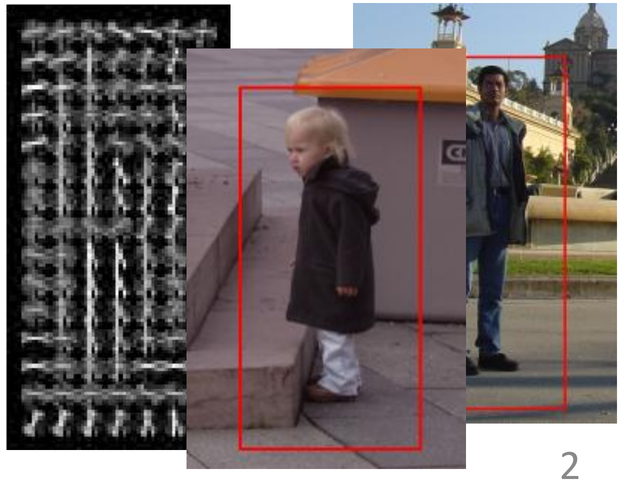


Поэлементные операции над изображениями

Тема 3

25.04.2026





Преобразование изображений

<u>по типу</u>

пространственные

частотные
(в Фурье пространстве)

поэлементные
(в окне 1x1)

оконные
(свертки с ядром)

Преобразование изображений

по типу

пространственные

поэлементные
(в окне 1x1)

оконные
(свертки с ядром)

частотные
(в Фурье пространстве)

по цели

реставрация
(восстановление)

$$\tilde{f} = T\left(f\right)$$

Критерий:

$$\min_{T^{-1}} \left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\|$$

Преобразование изображений

по типу

пространственные

поэлементные
(в окне 1x1)

оконные
(свертки с ядром)

частотные
(в Фурье пространстве)

по цели

реставрация
(восстановление)

$$\tilde{f} = T(f)$$

Критерий:

$$\min_{T^{-1}} \left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\|$$

сжатие
(компрессия)

$$\tilde{f} = T(f)$$

а) Фиксированная длина представления $L(T(f))$:

$$\min_{T} \left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\|,$$

при условии: $L(T(f)) \le \varepsilon.$
(Bit rate control)

в) Фиксированный уровень потерь (качества) ε :

$$\min_{T} L(T(f))$$

при условии: $\left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\| \le \varepsilon$

(сжатие с потерями)

Преобразование изображений

по типу

- **пространственные**
  - поэлементные (в окне 1x1)
  - оконные (свертки с ядром)
- **частотные** (в Фурье пространстве)

по цели

реставрация (восстановление)

$$\tilde{f} = T(f)$$

Критерий:

$$\min_{T^{-1}} \left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\|$$

сжатие (компрессия)

$$\tilde{f} = T(f)$$

а) Фиксированная длина представления $L(T(f))$:

$$\min_{T} \left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\|,$$

при условии: $L(T(f)) \le \varepsilon.$

(Bit rate control)

в) Фиксированный уровень потерь (качества) ε :

$$\min_{T} L(T(f))$$

при условии: $\left\| f - T^{-1}\left(\tilde{f}\right) \right\| \le \varepsilon$

(сжатие с потерями)

улучшение

$$\tilde{f} = T(f)$$

Критерий определяется целевой функцией системы.

Примеры, максимизация:

- визуального качества
- точности распознавания (контрастирование признаков)

Как правило: $L(\tilde{f}) < L(f)$

частный случай - реставрация

Поэлементные преобразования изображений

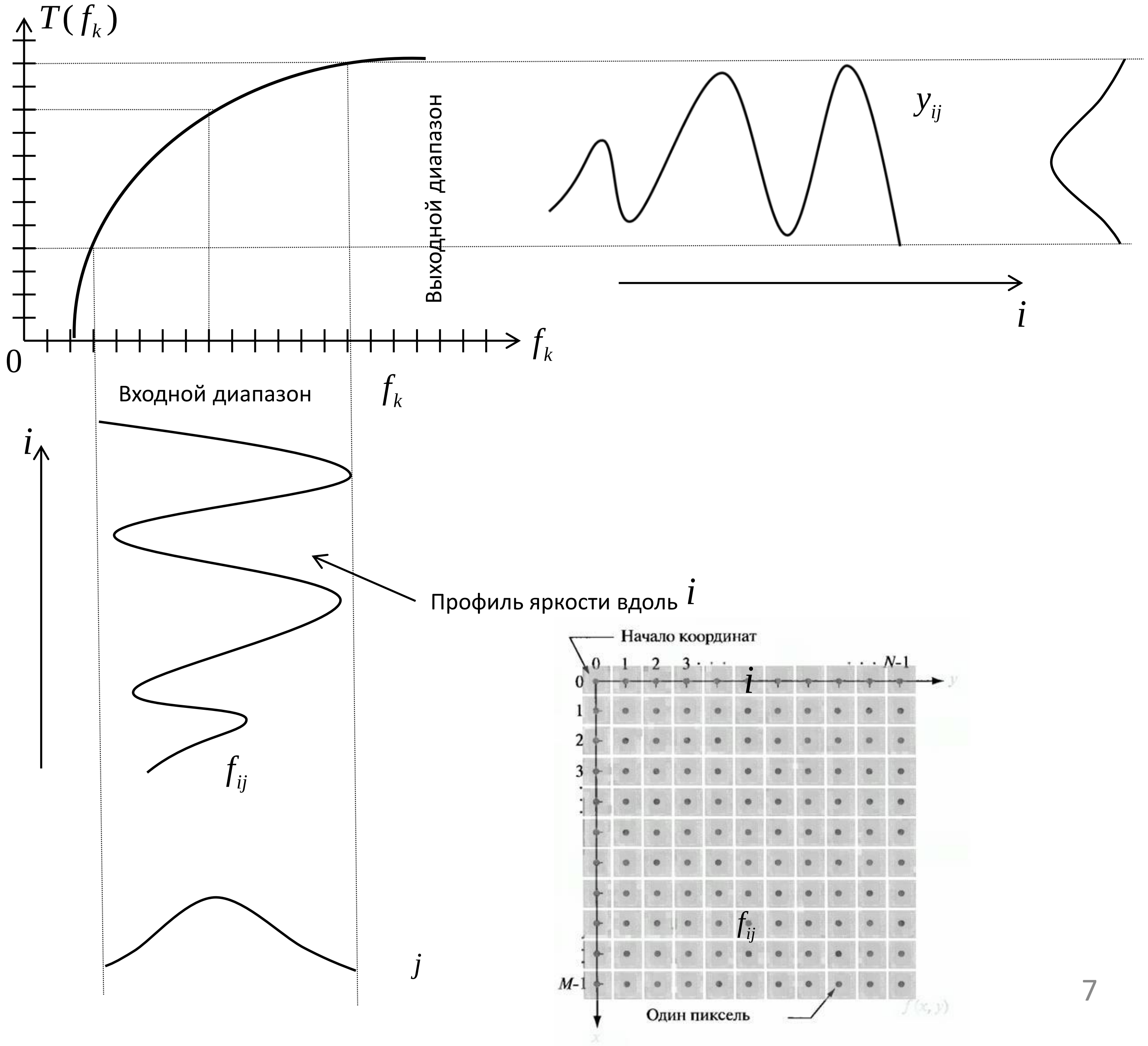
Функция преобразования яркости,
не зависит от координат:

$$y_{ij} = T_{ij}(f_{ij}) = T(f_{ij}), \;\; f_{ij} \in [0, f_{L-1}]$$

$$y = T(f_k), \;\; k = \overline{0, L-1}$$

LUT – Look Up Table

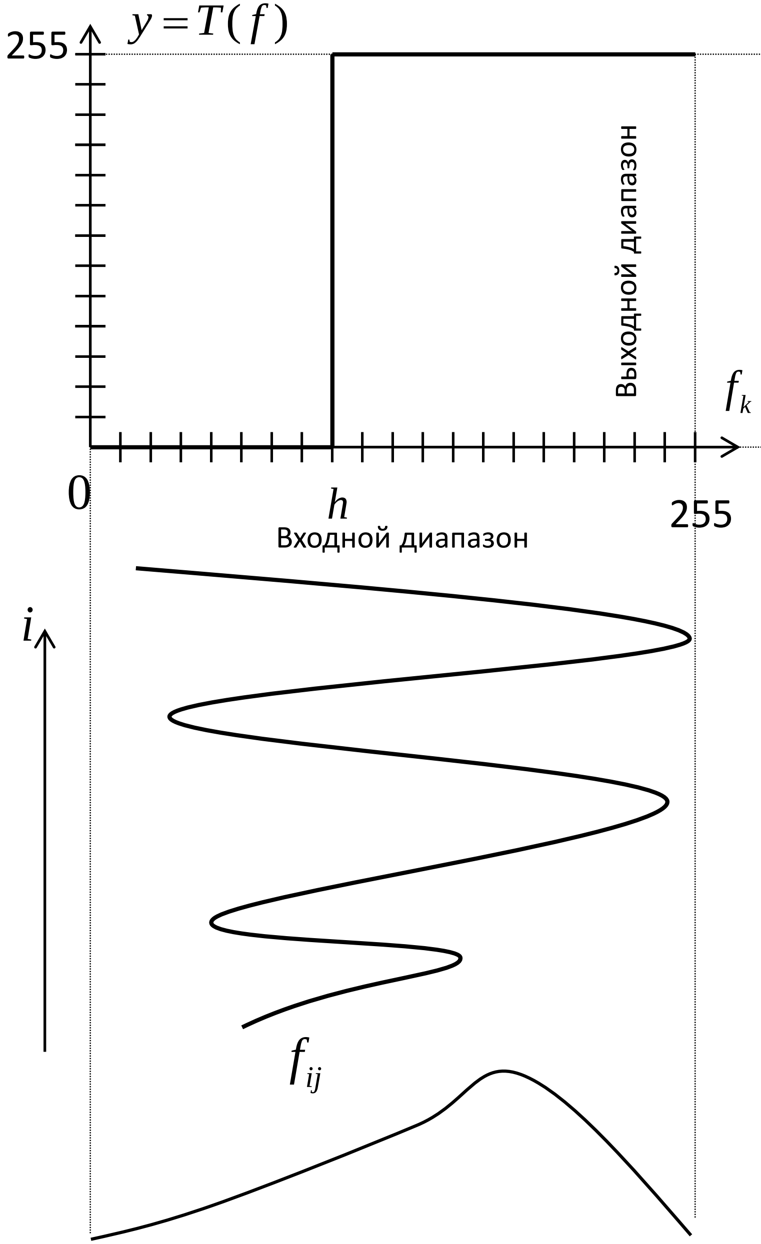
y	10	30	33	…	…	255
f_k	0	20	25	…	…	255

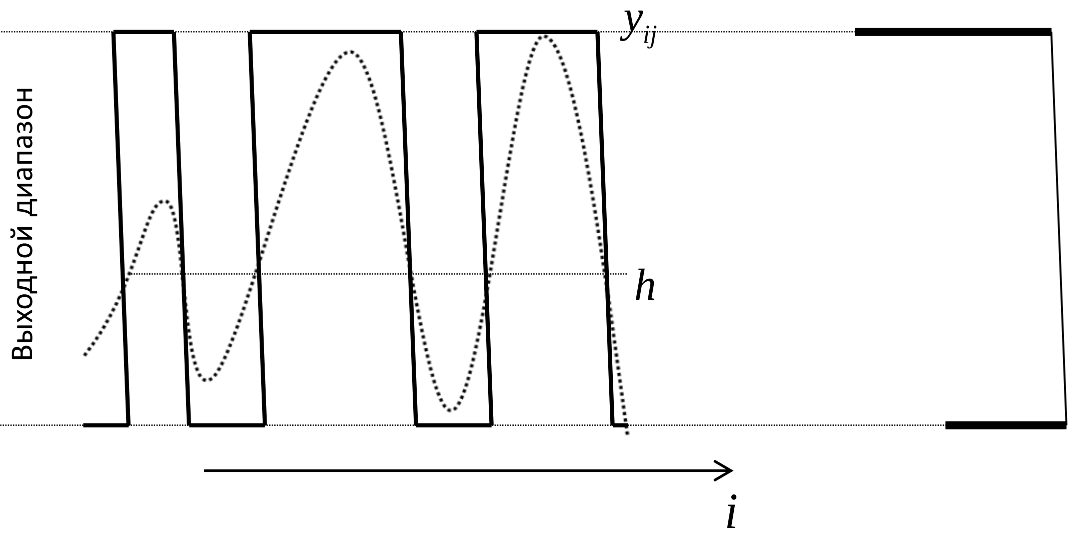


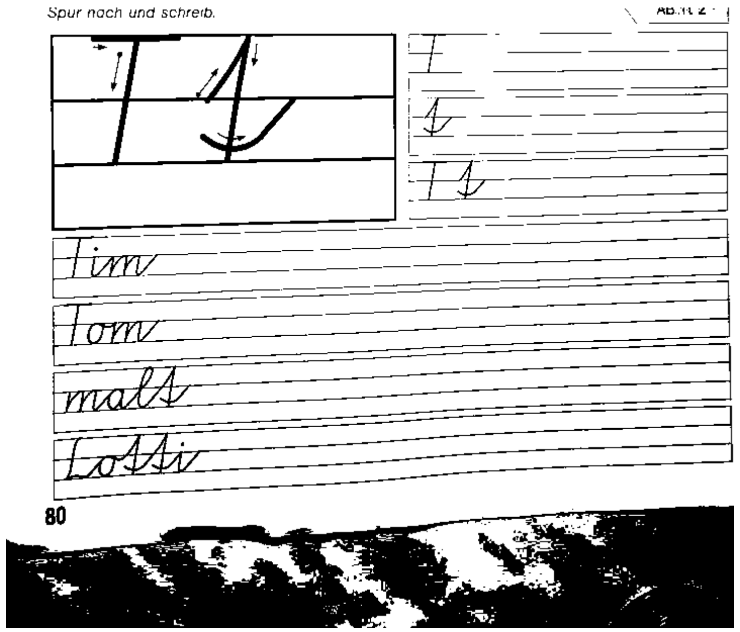
Бинарное преобразование

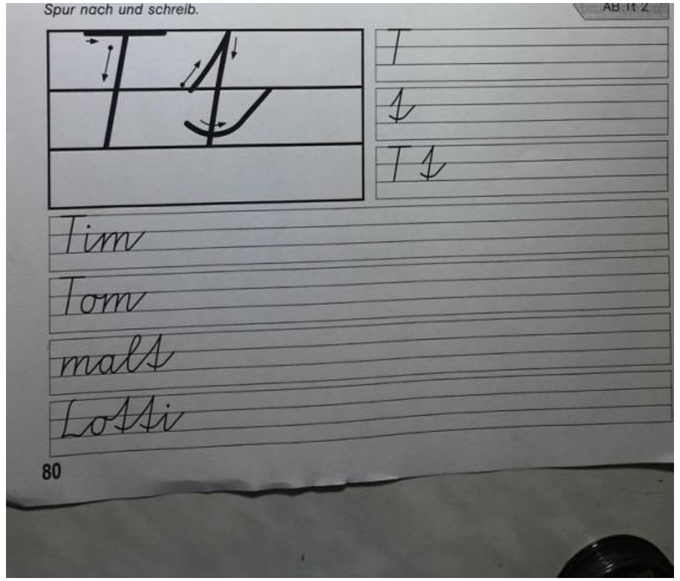
(**бинаризация**)

$$y = T(f) = \begin{cases} 1, & f \geq h \\ 0, & f < h \end{cases}$$





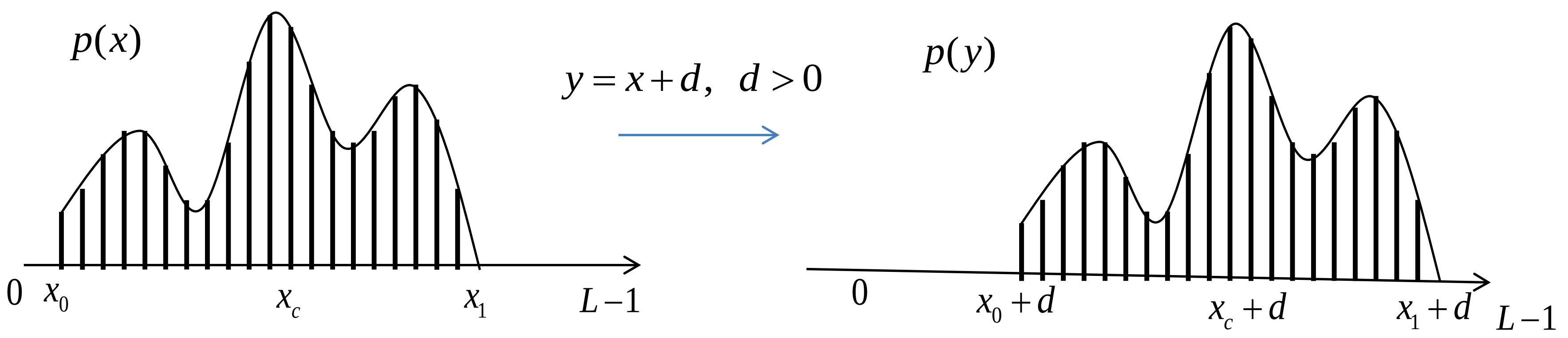




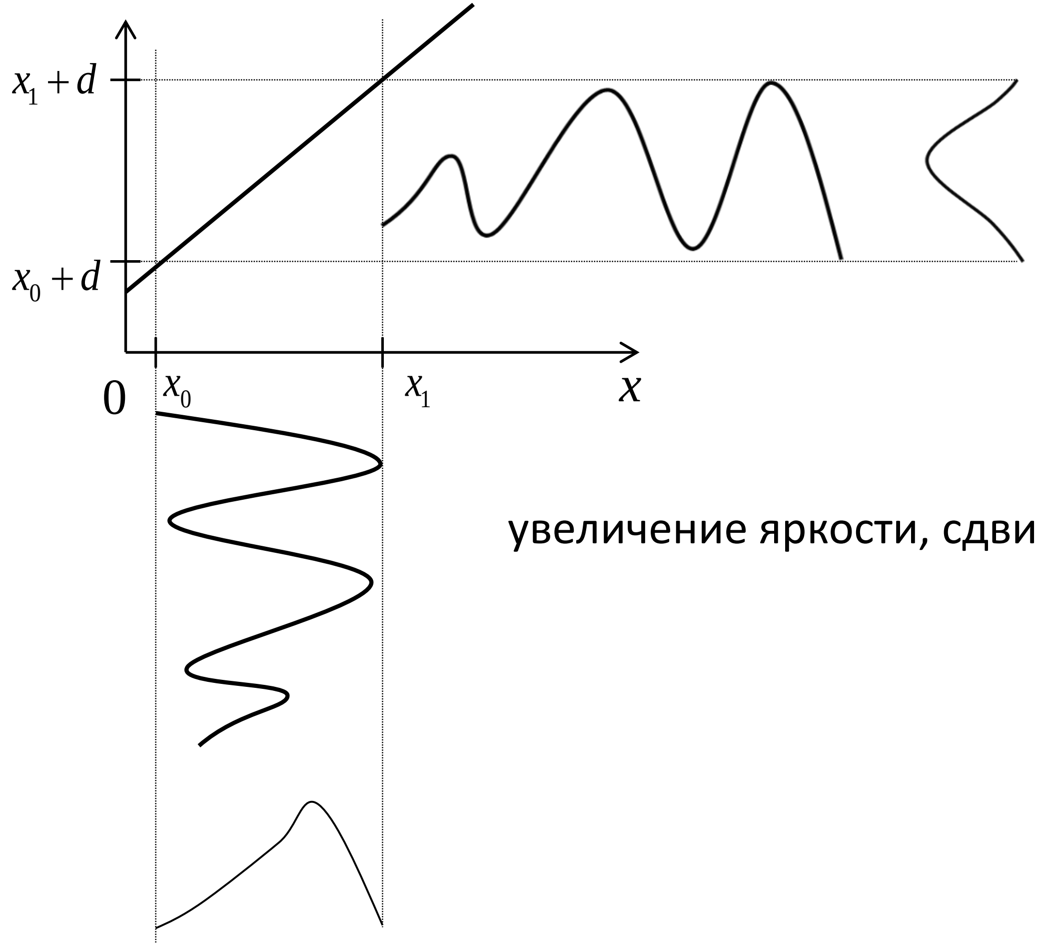
Линейные преобразования

сдвиг

$\boxed{y = x + d}$

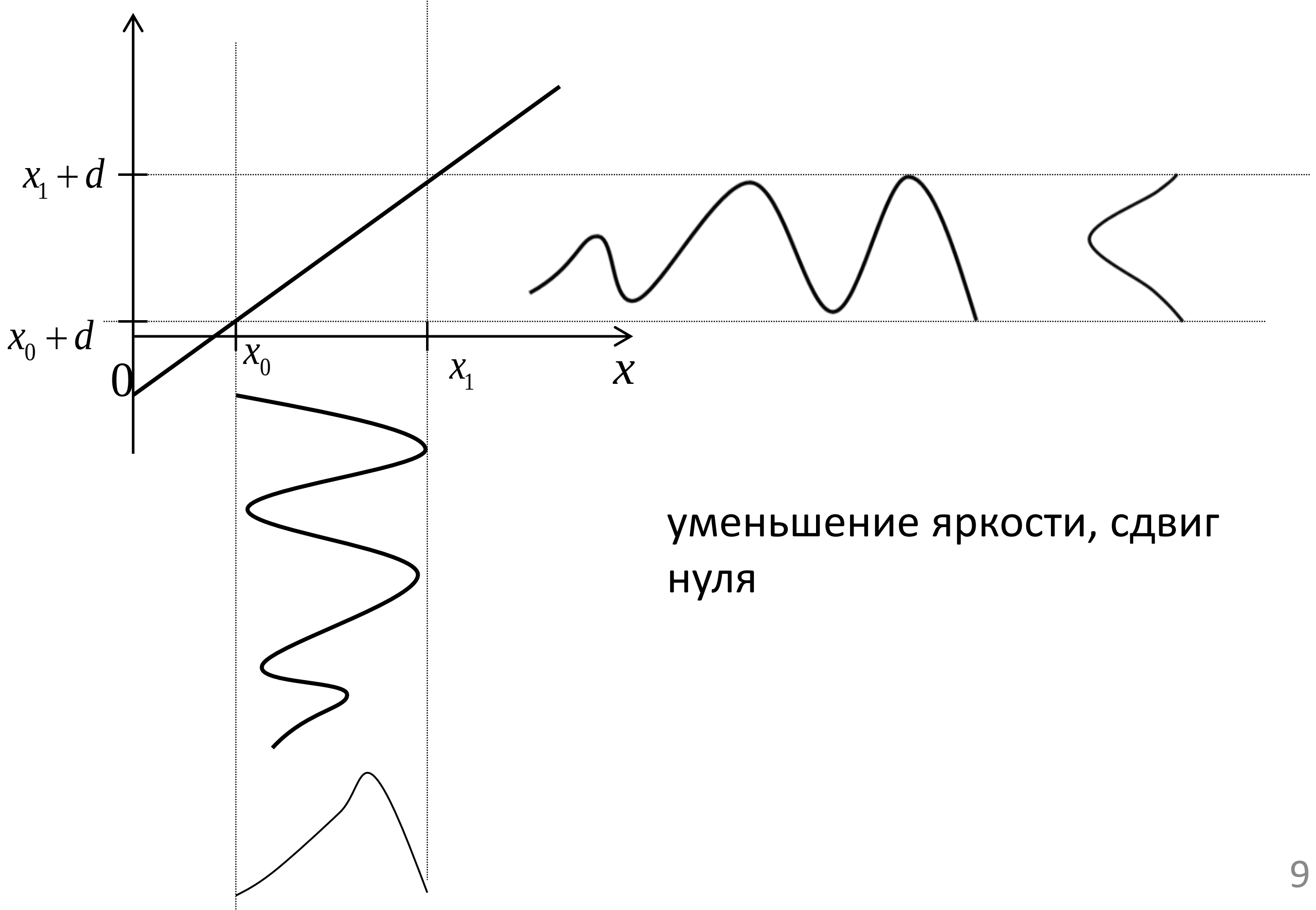


$y = x + d,\ \ d > 0$



увеличение яркости, сдвиг нуля

$y = x + d,\ \ d < 0$

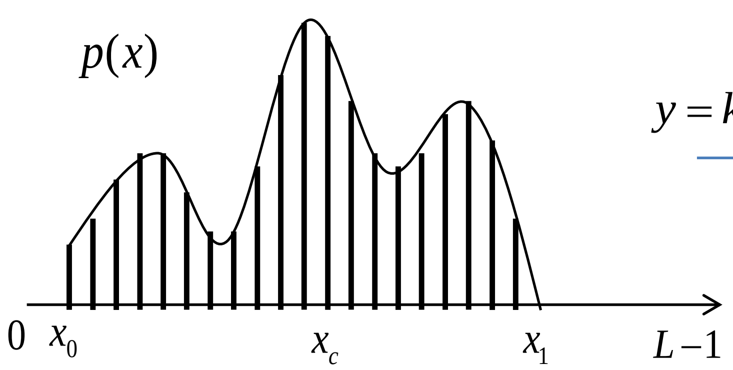


уменьшение яркости, сдвиг нуля

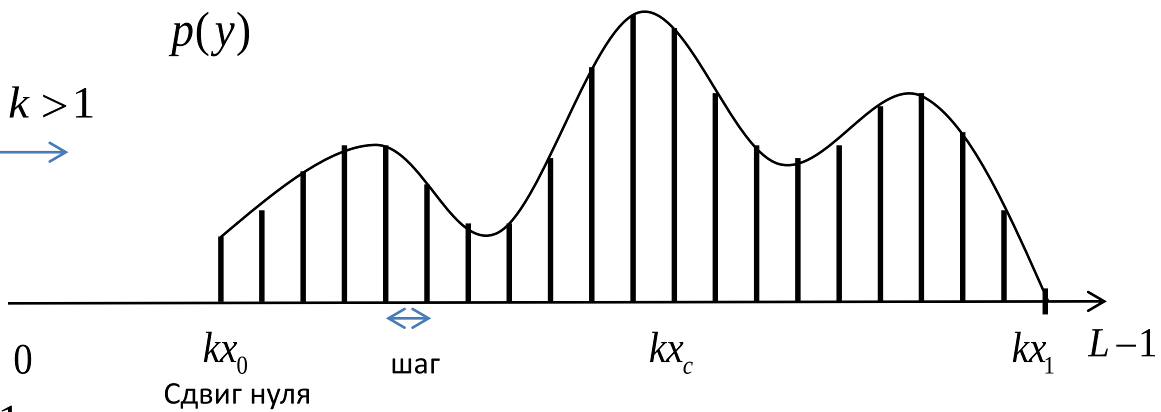
Линейные преобразования

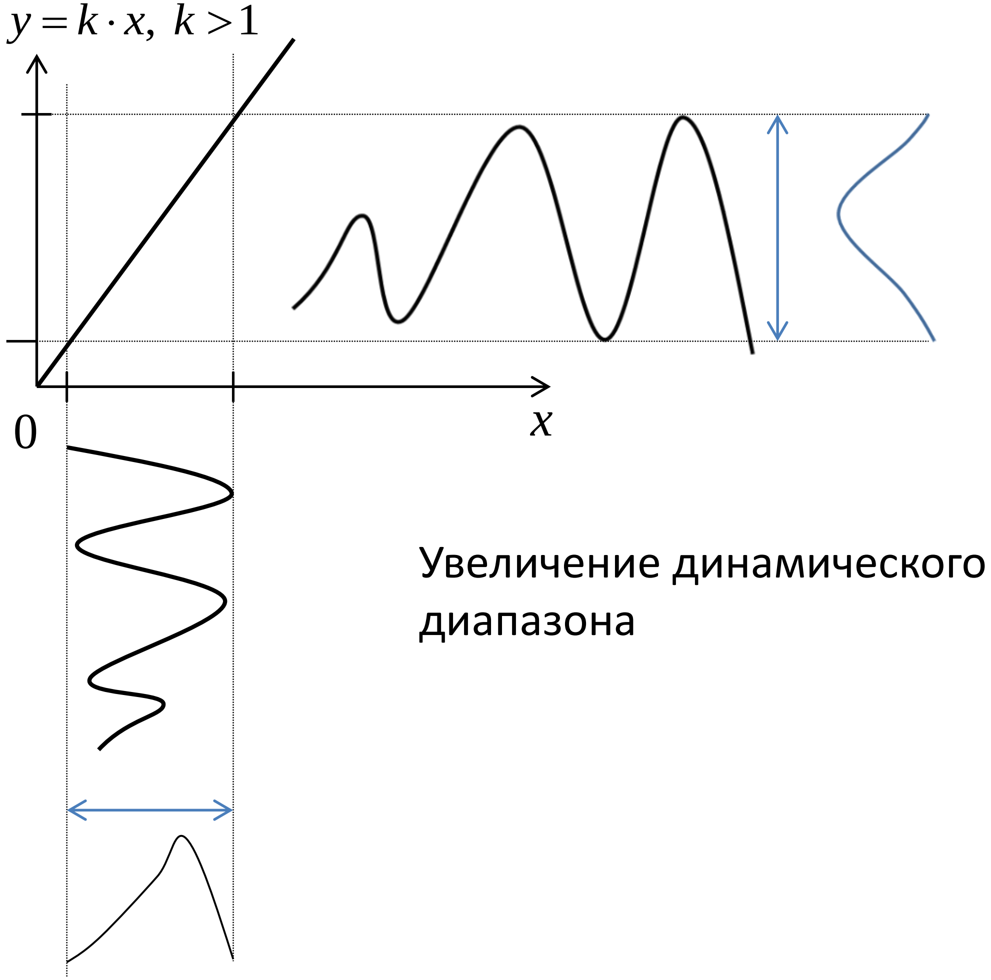
Линейное контрастирование

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

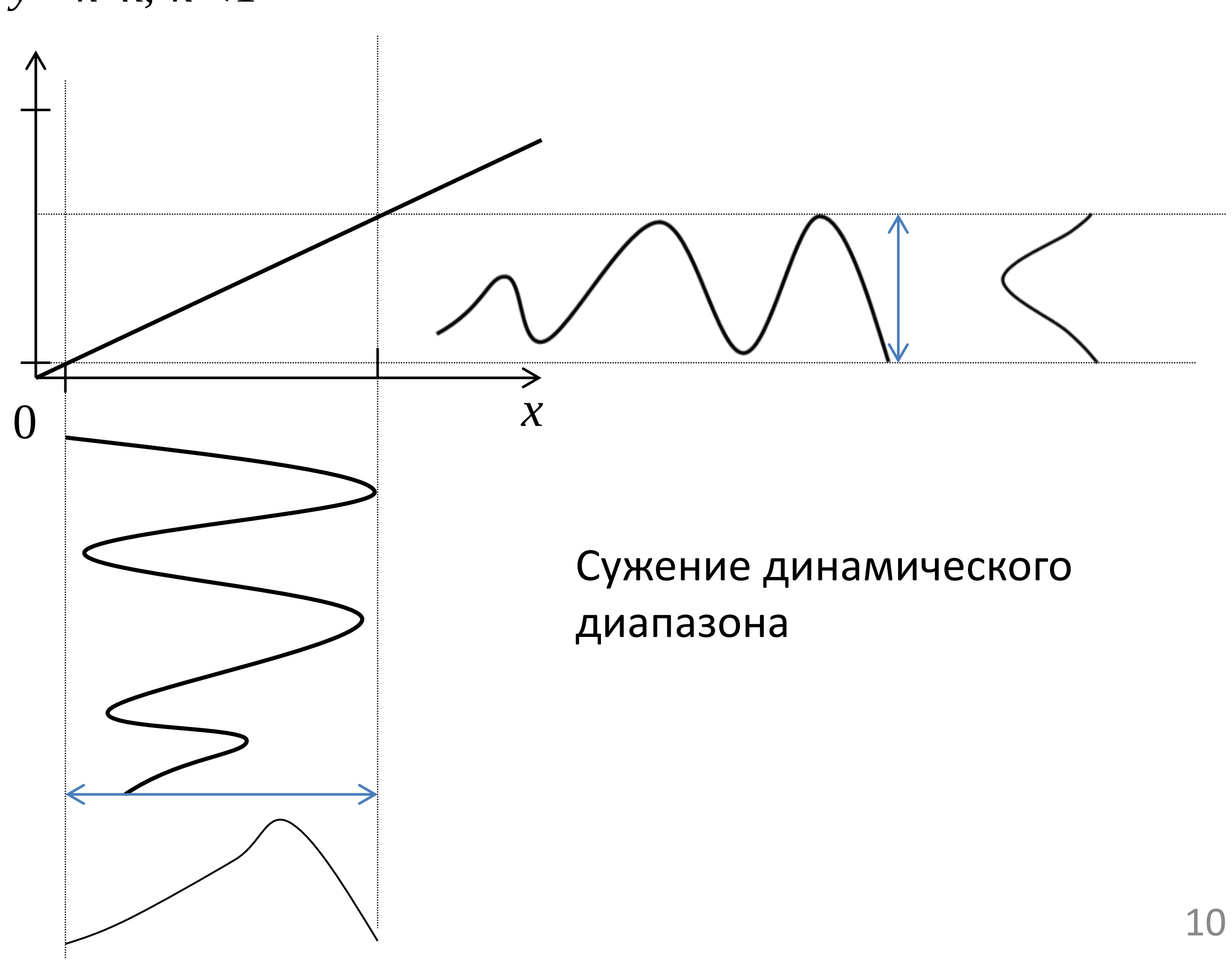


$y = k \cdot x,\ k > 1$





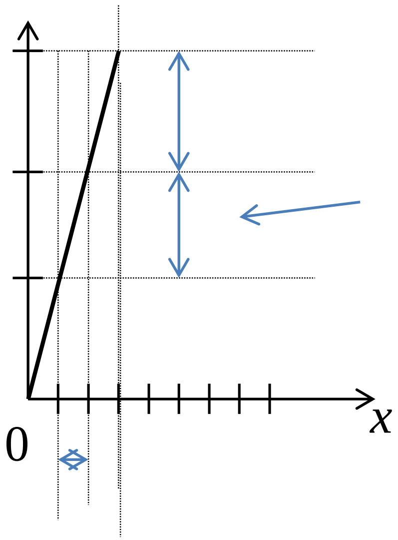
Увеличение динамического диапазона



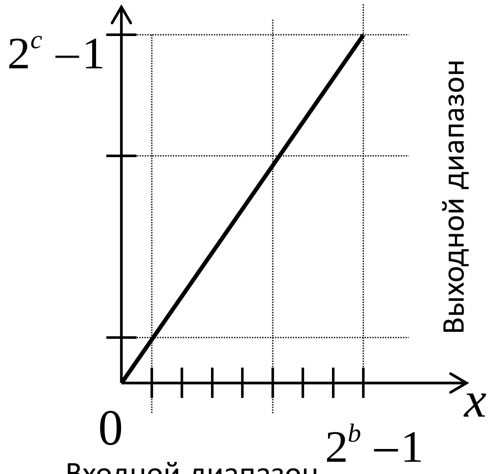
Сужение динамического диапазона

Переконтростирование

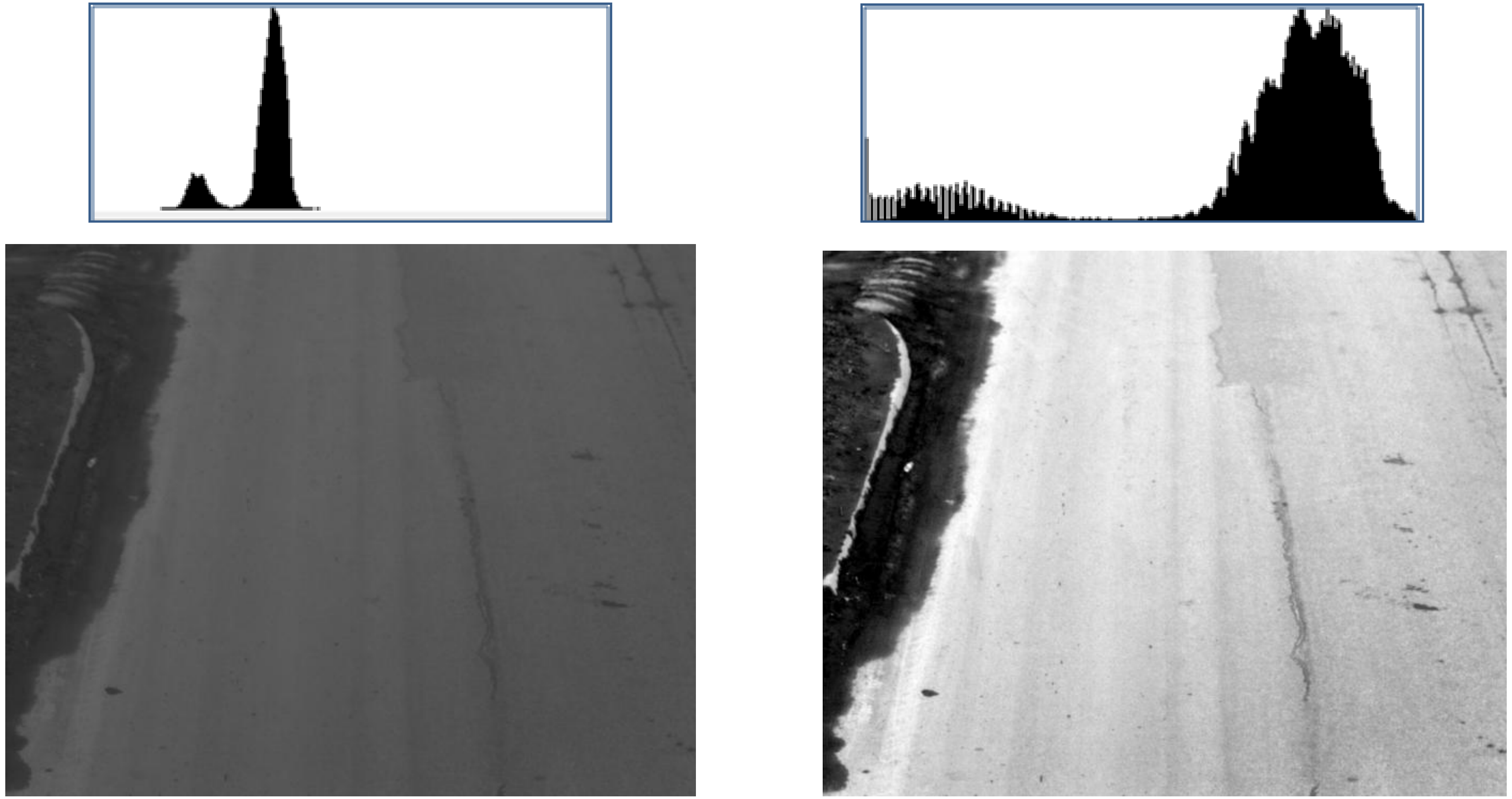
$y = k \cdot x$



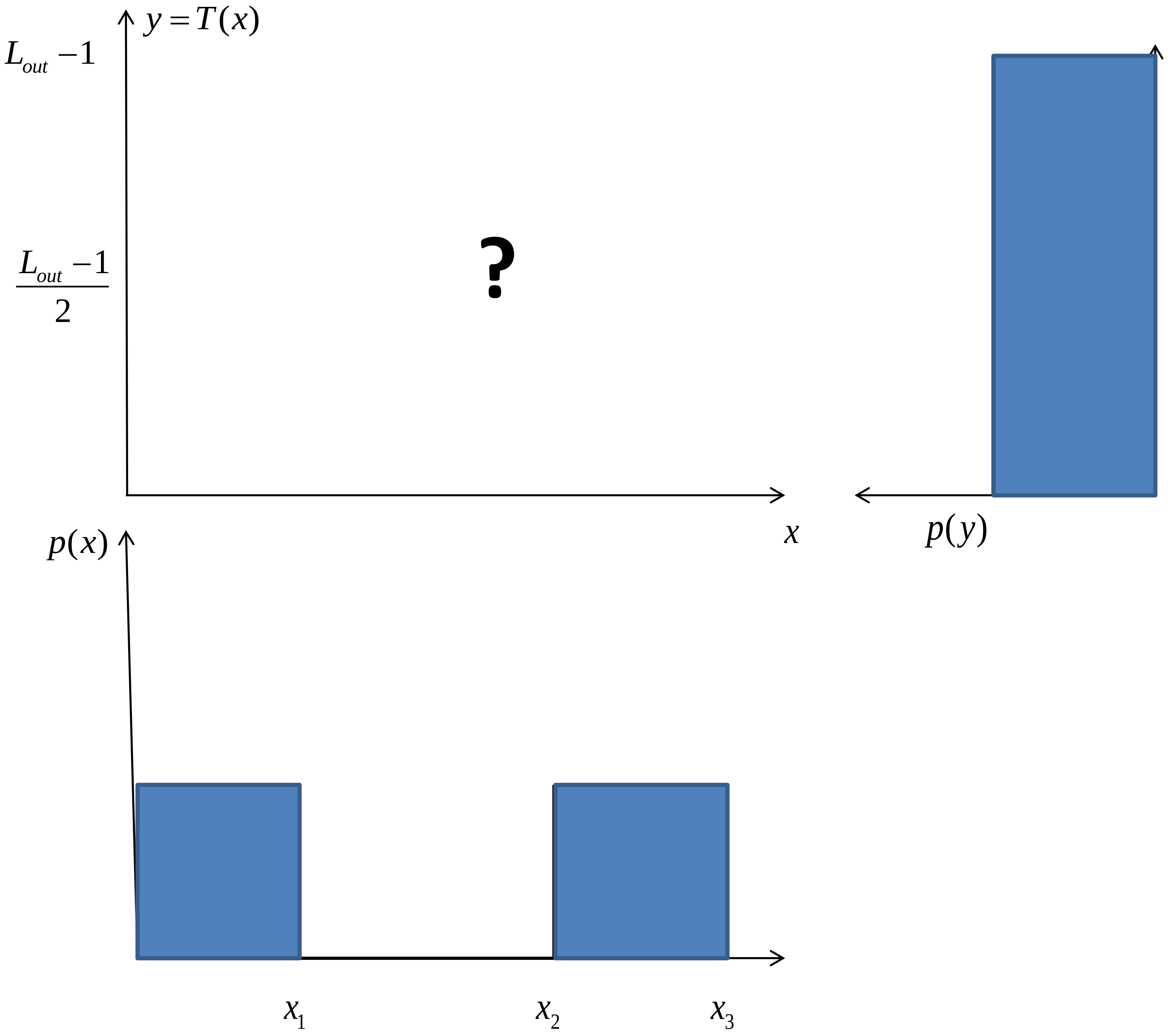
Разрыв между градациями



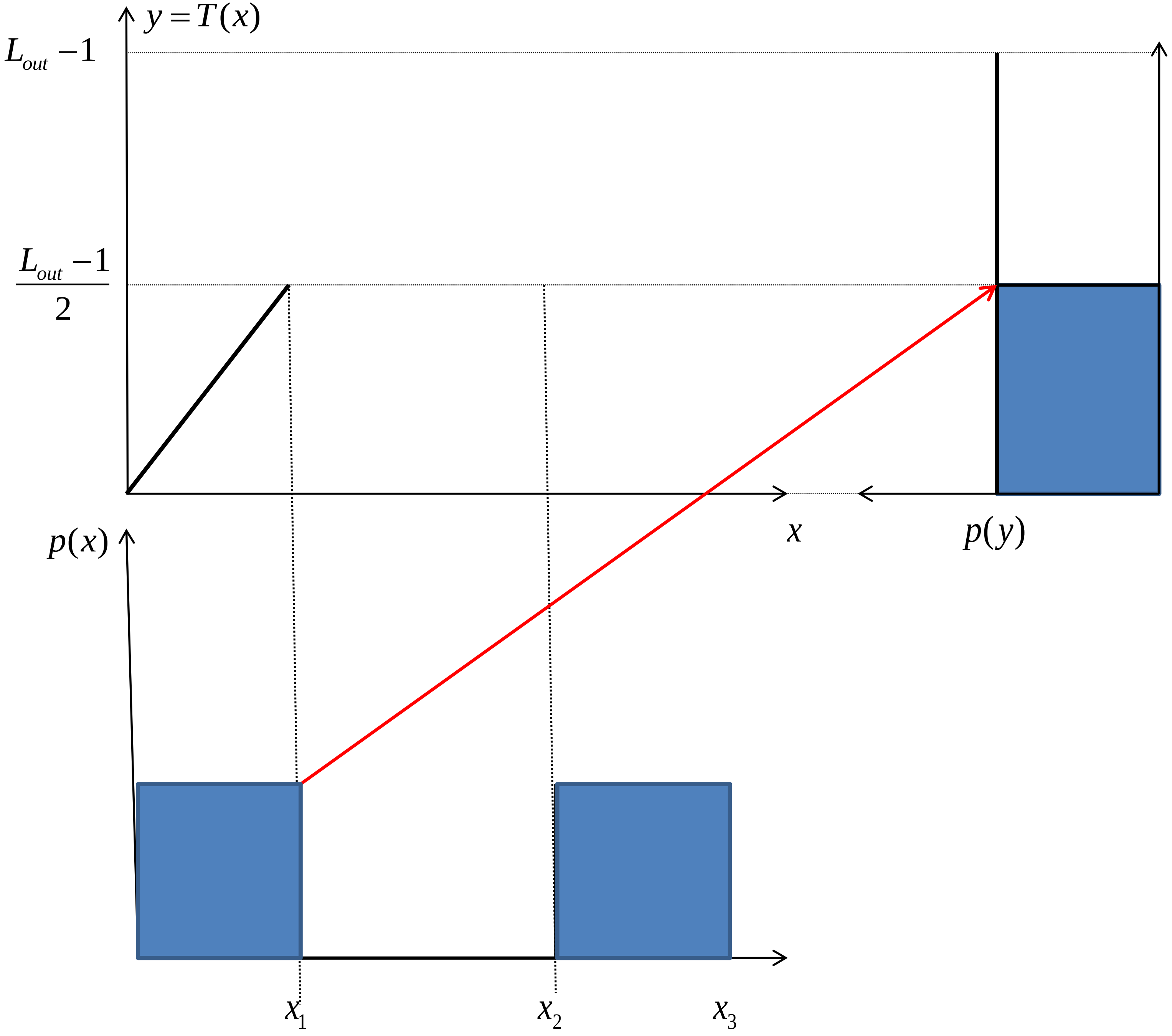
$$k_{\max} = \frac{2^c}{2^b} = 2^{c-b}$$



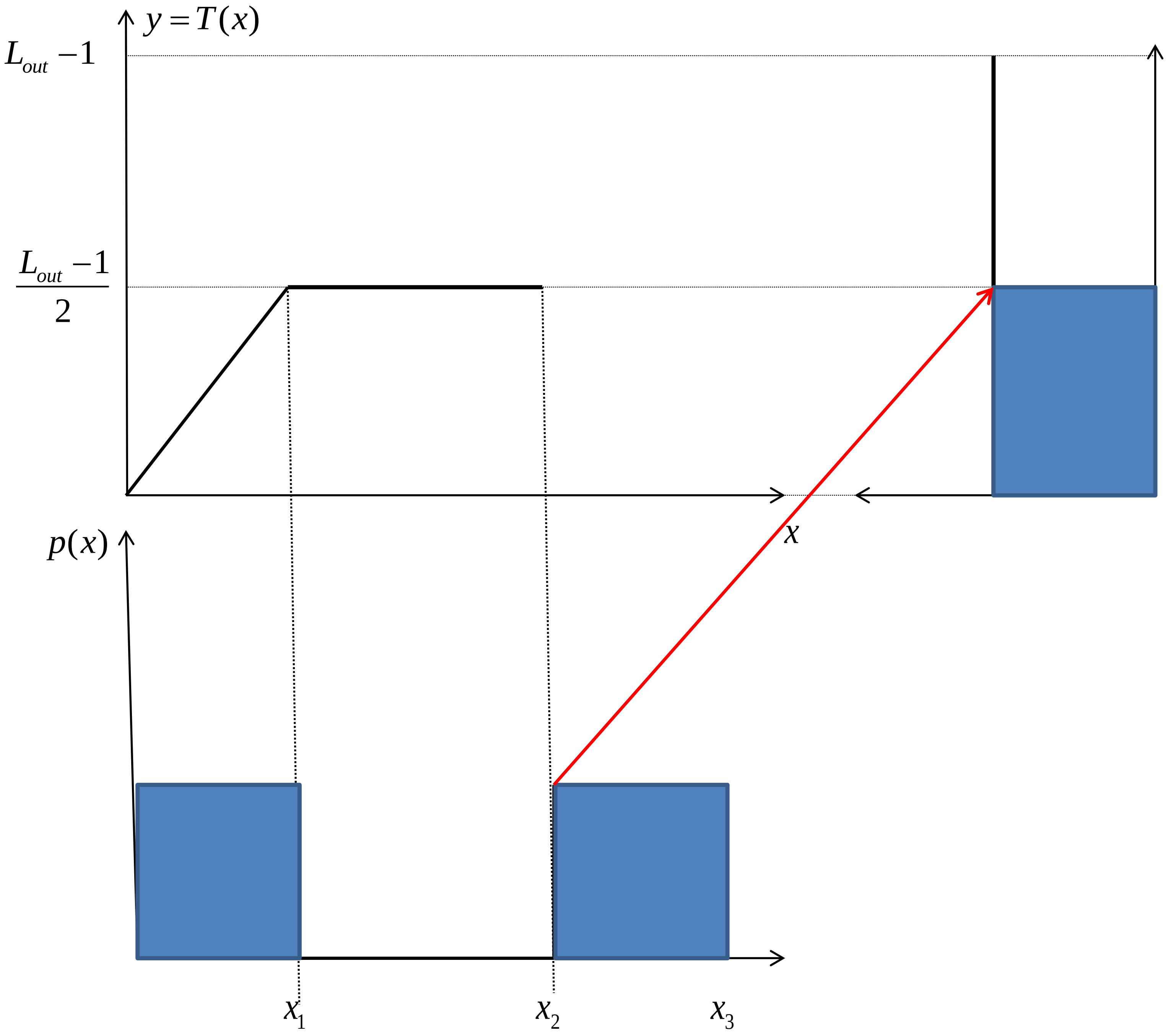
Частный случай кусочно-линейного преобразования



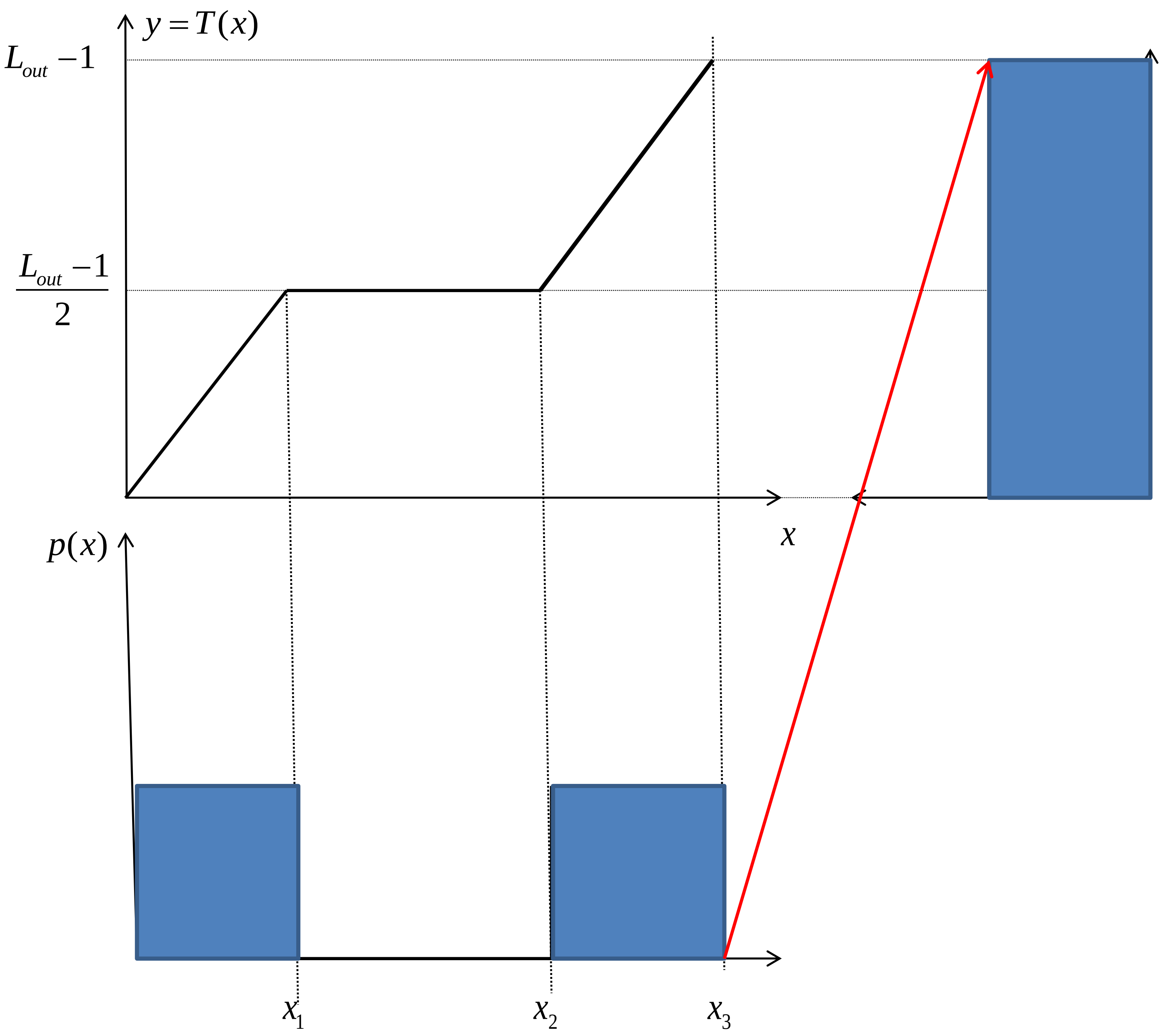
Частный случай кусочно-линейного преобразования



Частный случай кусочно-линейного преобразования

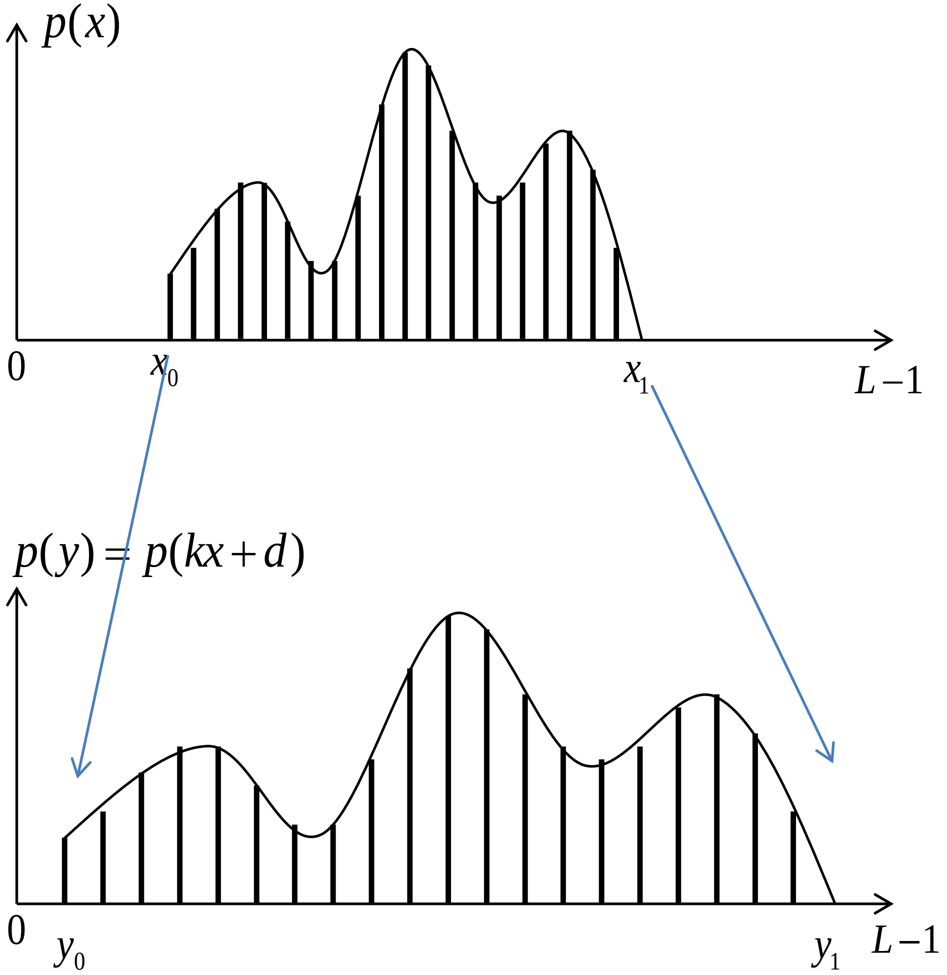


Частный случай кусочно-линейного преобразования



Линейные преобразования

Нормализация яркости и контраста



$$\boxed{y = kx + d}$$ - модель преобразования

Постановка задачи:

$$x_0 \to y_0$$

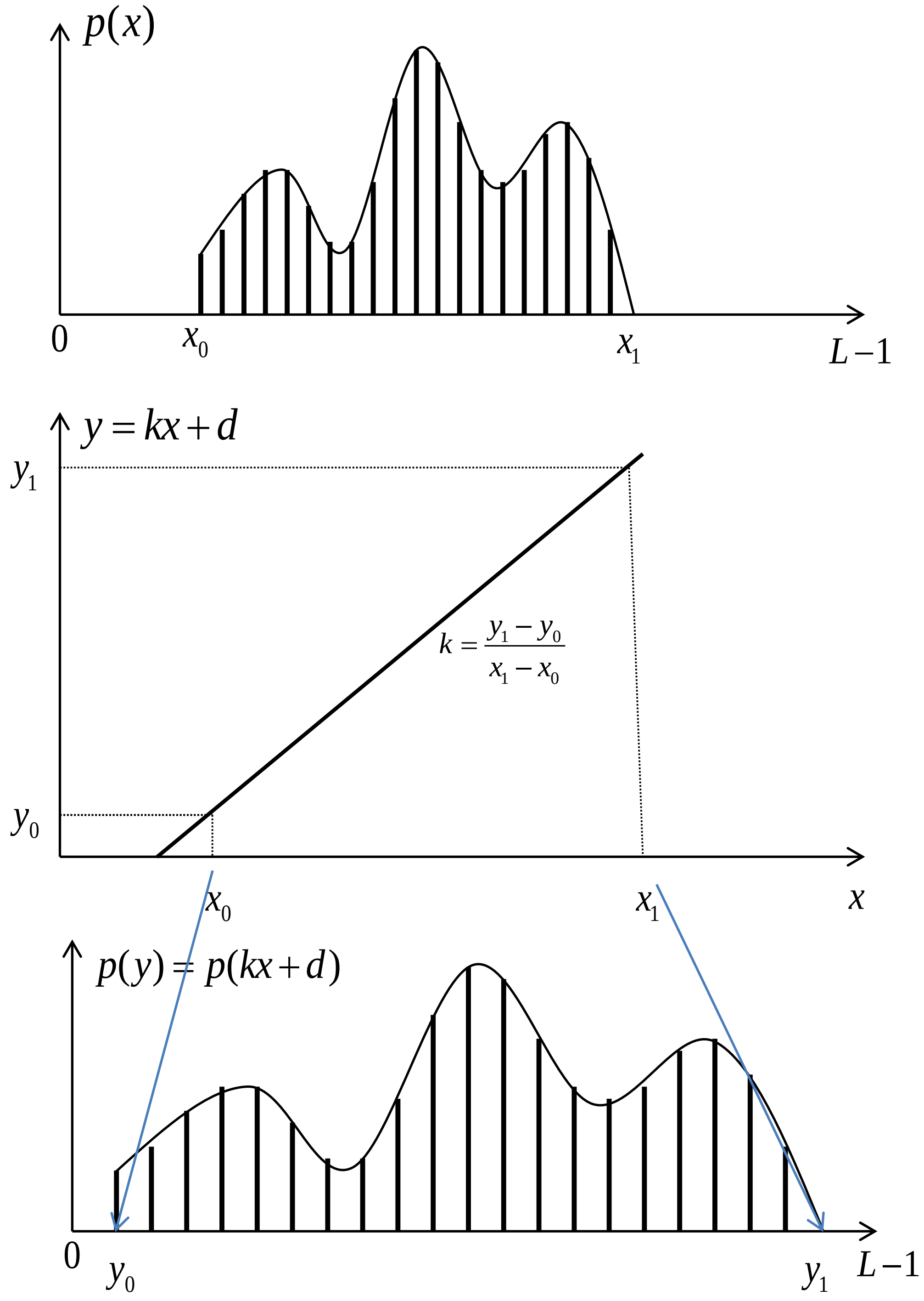
$$x_1 \to y_1$$

Решение:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + d \\ y_1 = kx_1 + d \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ d = y_0 - kx_0 \end{array}} \rightarrow y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

Линейные преобразования

Нормализация яркости и контраста



$$\boxed{y = kx + d}$$ - модель преобразования

Постановка задачи:

$$x_0 \to y_0$$

$$x_1 \to y_1$$

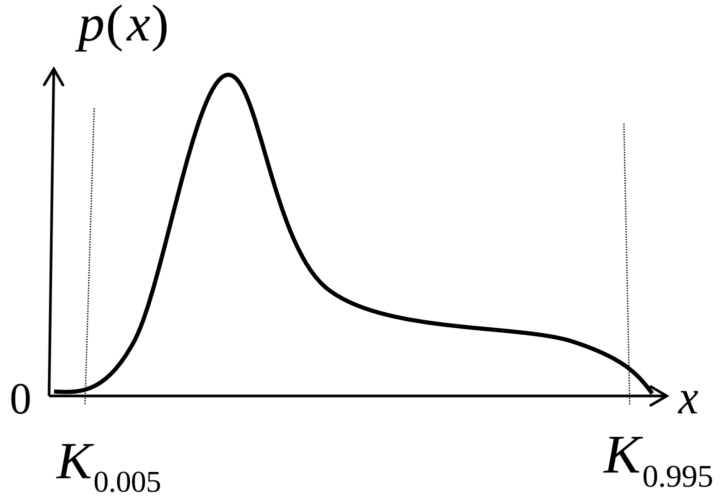
Решение:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + d \\ y_1 = kx_1 + d \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} k &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ d &= y_0 - kx_0 \end{aligned}} \rightarrow y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

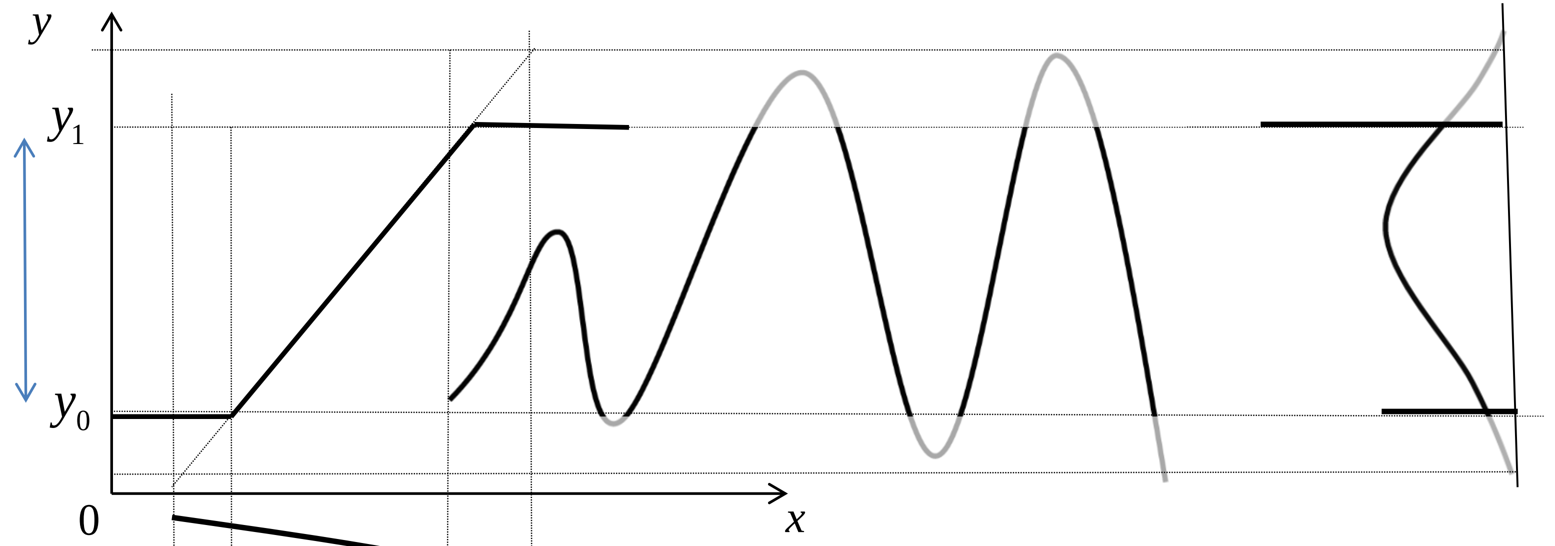
Как оценить x_0, x_1:

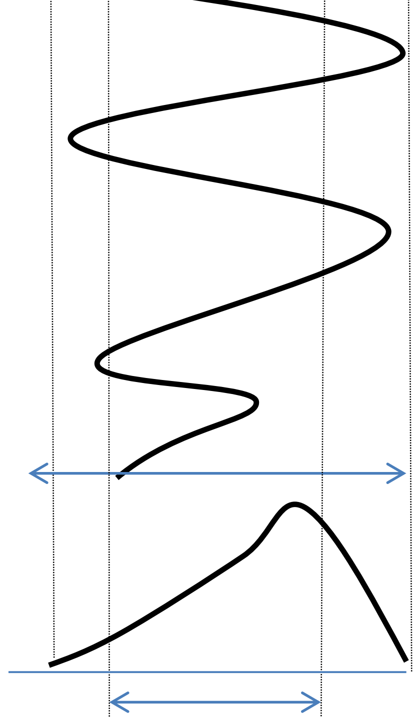
$$x_0 = K_{0.005}$$

$$x_1 = K_{0.995}$$

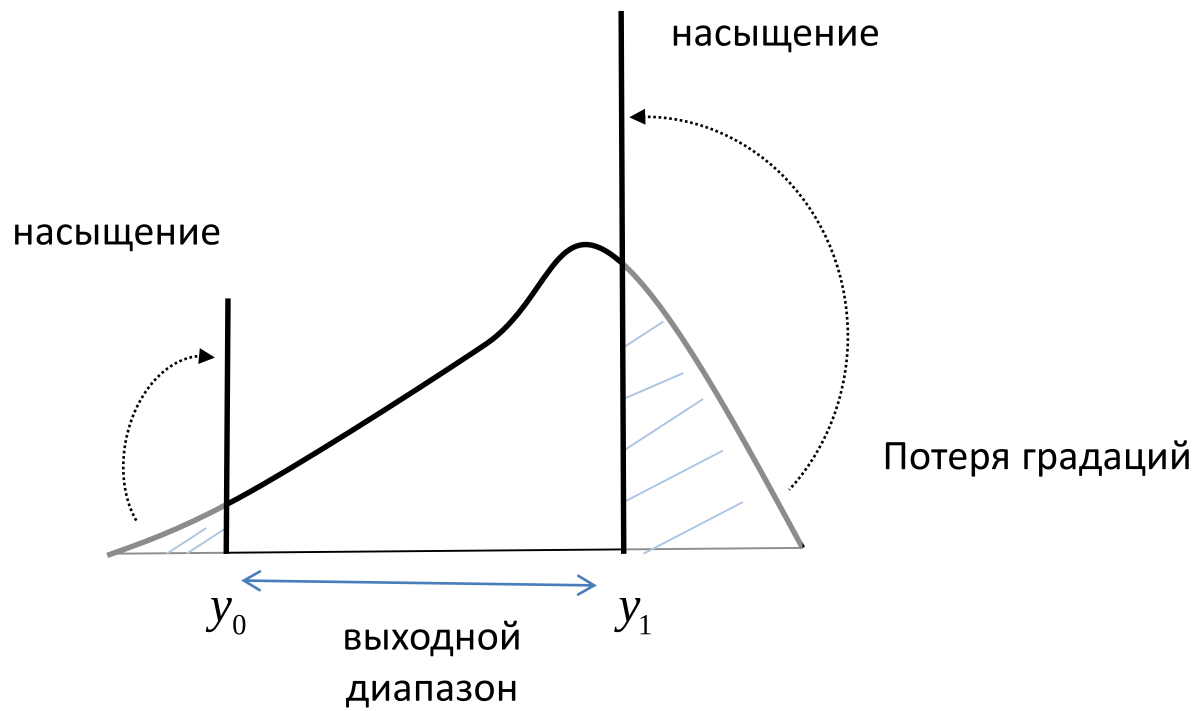


Нелинейные эффекты
насыщение

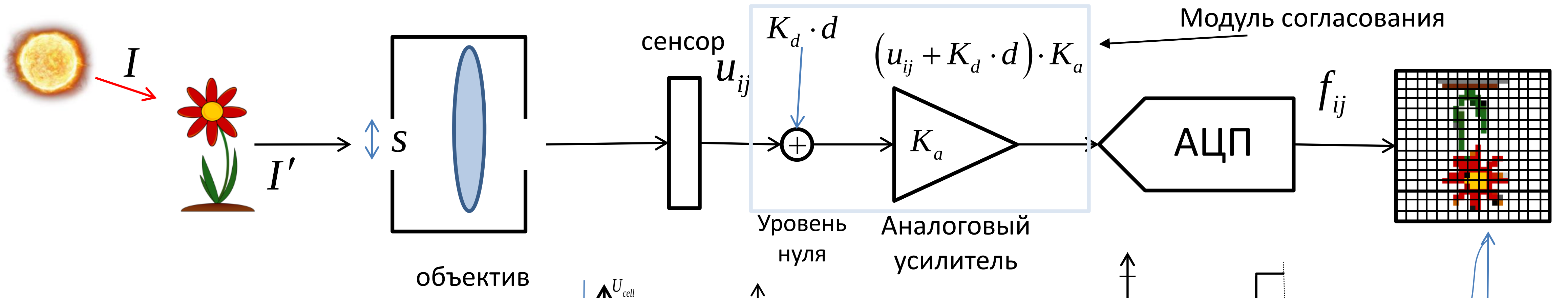




Для сохранения линейной зависимости, без потерь экстремальных значений яркости важно попасть в рабочий диапазон

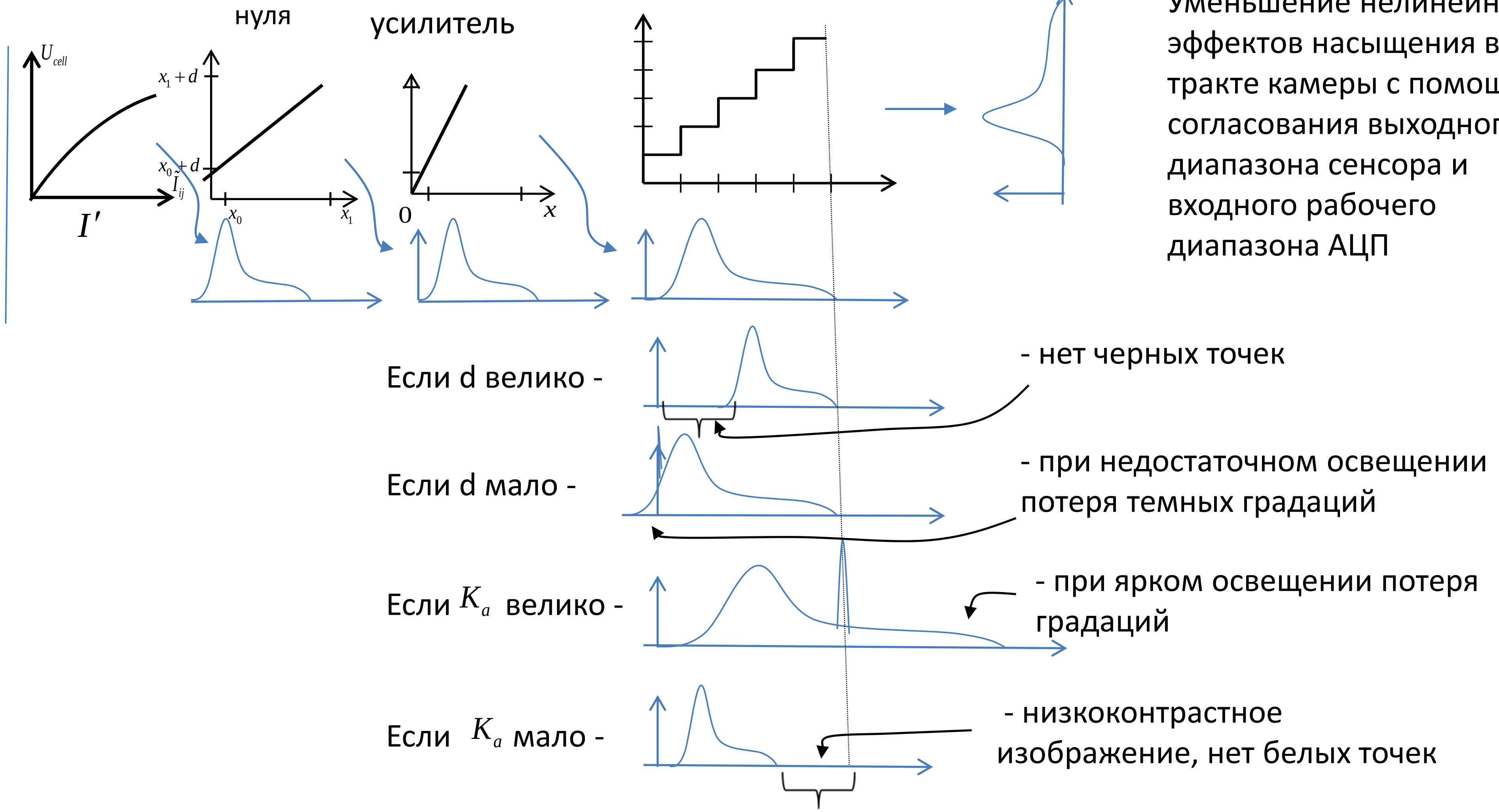


Поэлементные преобразования в видеокамере



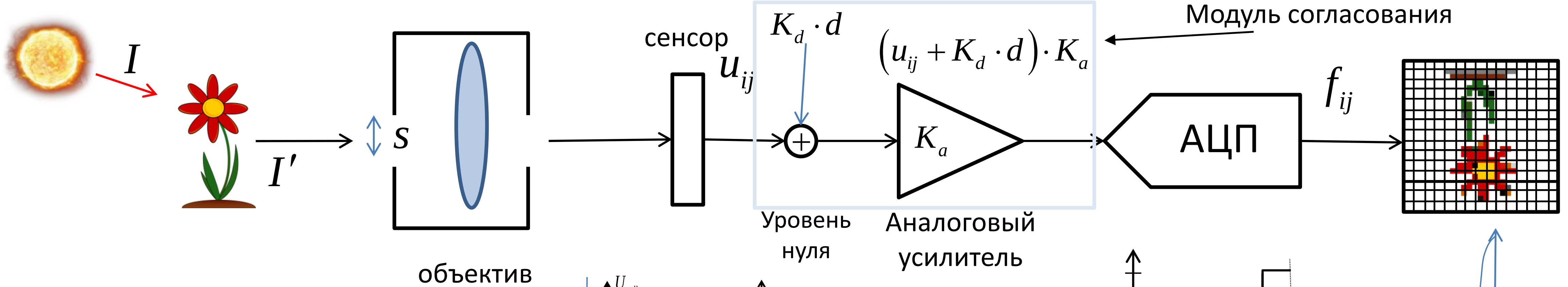
$f_{i,j} \subset \{0,..,2^b - 1\}$,
$i = \overline{0, W-1},\ j = \overline{0, H-1}$

$$f_{i,j}\left(E, S, I'_{i,j}\right) = ADC\left(\left(U_{i,j}\left(\tilde{I}_{i,j}\right) + K_d \cdot d\right) K_a\right) =$$
$$= ADC\left(\underbrace{K_u \cdot K_a \cdot S \cdot E}_{\tilde{E}} \cdot I'_{i,j} + \underbrace{K_d \cdot K_a}_{C_1} \cdot d + \underbrace{U_0 \cdot K_a}_{C_2}\right) =$$
$$= ADC\left(\tilde{E} \cdot I'_{i,j} + C_1 \cdot d + C_2\right)$$



Уменьшение нелинейных эффектов насыщения в тракте камеры с помощью согласования выходного диапазона сенсора и входного рабочего диапазона АЦП

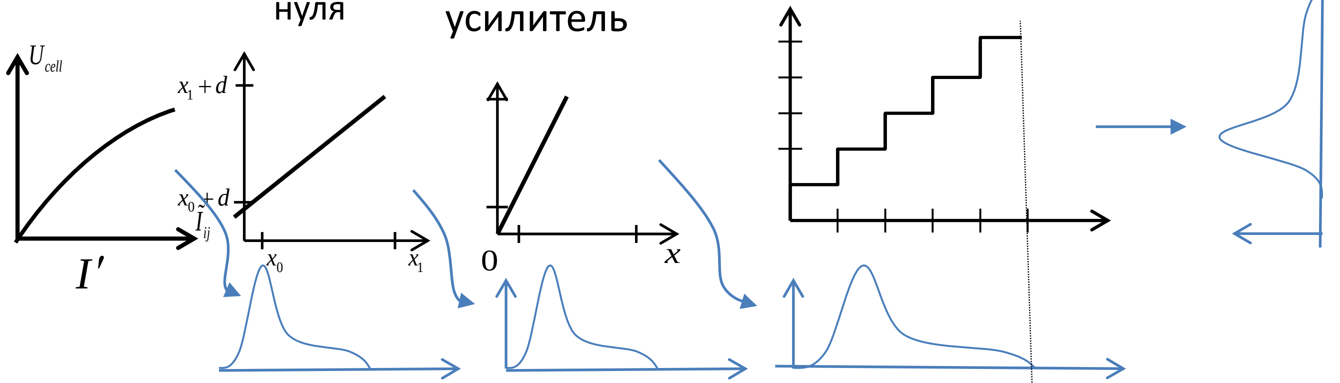
Поэлементные преобразования в видеокамере



$$f_{i,j}\subset\left\{0,..,2^b-1\right\},$$
$$i=\overline{0,W-1},\ j=\overline{0,H-1}$$

Уменьшение нелинейных эффектов насыщения в тракте камеры с помощью согласования выходного диапазона сенсора и входного рабочего диапазона АЦП

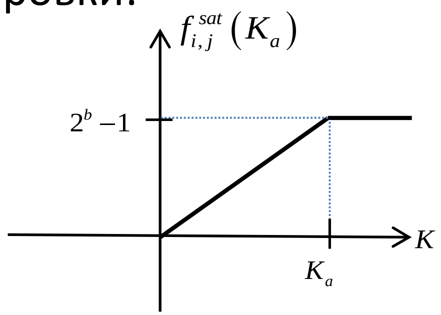
$$f_{i,j}\left(E,S,I'_{i,j}\right)=ADC\left(\left(U_{i,j}\left(\tilde I_{i,j}\right)+K_d\cdot d\right)K_a\right)=$$
$$=ADC\left(\underbrace{K_u\cdot K_a\cdot S\cdot E}_{\tilde E}\cdot I'_{i,j}+\underbrace{K_d\cdot K_a}_{C_1}\cdot d+\underbrace{U_0\cdot K_a}_{C_2}\right)=$$
$$=ADC\left(\tilde E\cdot I'_{i,j}+C_1\cdot d+C_2\right)$$



K_a, C_1, C_2 - находятся из условий калибровки:

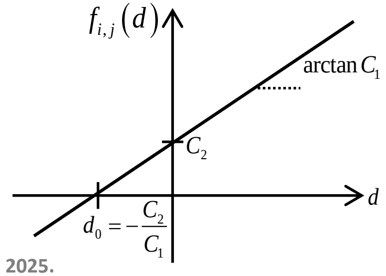
1. $K_a:\ f_{i,j}\left(\tilde E_{\max}, I'_{sat}, K_a\right)=ADC\left(U_{sat}\cdot K_a\right)=2^b-1$

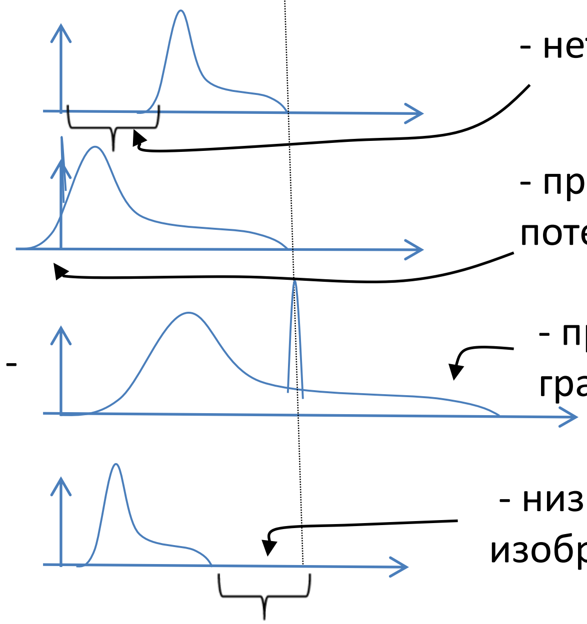
объектив засвечен:



2. $C_1, C_2:\ f_{i,j}\left(\tilde E=0, d_0\right)=ADC\left(C_1\cdot d_0+C_2\right)=0$

диафрагма закрыта:





Если d велико - - нет черных точек

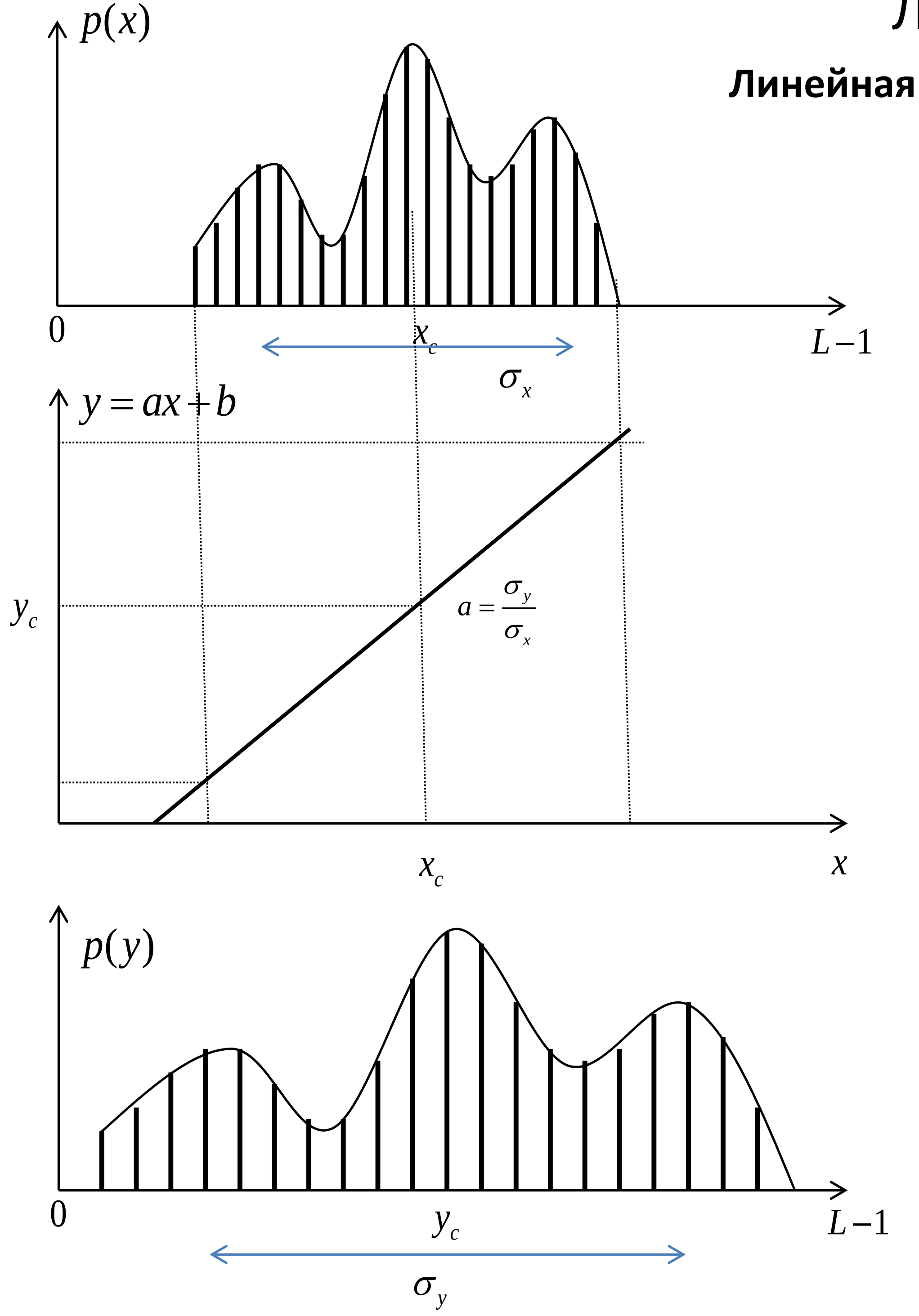
Если d мало - - при недостаточном освещении потеря темных градаций

Если K_a велико - - при ярком освещении потеря градаций

Если K_a мало - - низкоконтрастное изображение, нет белых точек

Линейные преобразования

Линейная нормализация средней яркости и контраста



$$\boxed{y = ax + b}$$ - модель преобразования

Постановка задачи:

$$x_c \to y_c$$
$$\sigma_x \to \sigma_y$$

$$x_c = \sum xP(x) = \langle x \rangle$$
$$\sigma_x{}^2 = \sum (x - x_c)^2 P(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

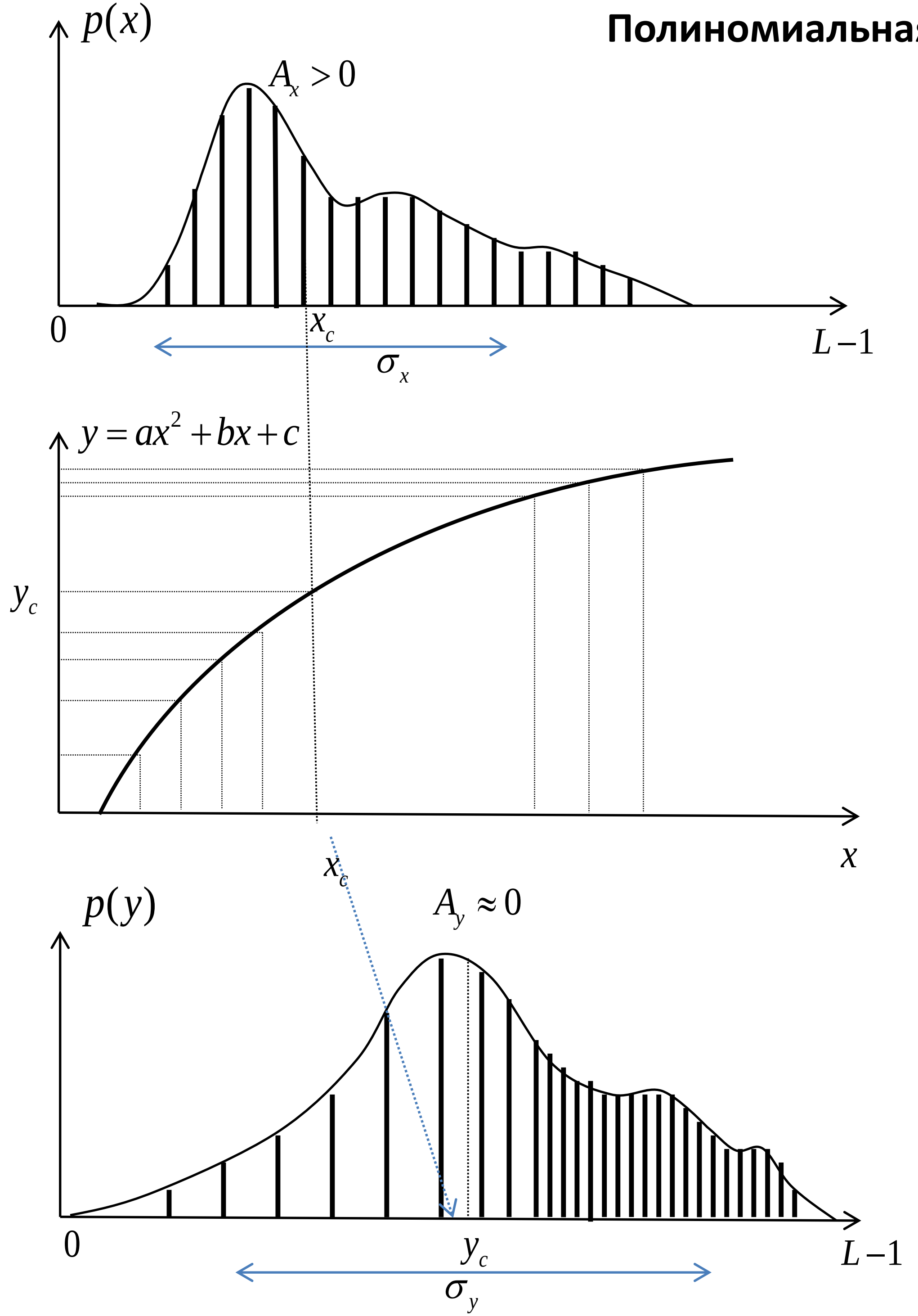
Решение:

$$\begin{cases} ax_c + b = y_c \\ a^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$
$$b = y_c - \frac{\sigma_y x_c}{\sigma_x} = y_c - \frac{\sigma_y \langle x \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{\sigma_y \left(x - \langle x \rangle \right)}{\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} + y_c}$$

Нелинейные преобразования



Полиномиальная нормализация средней яркости, контраста и асимметрии

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Постановка задачи: $x_c \to y_c$, $\sigma_x \to \sigma_y$, $A_x \to A_y$

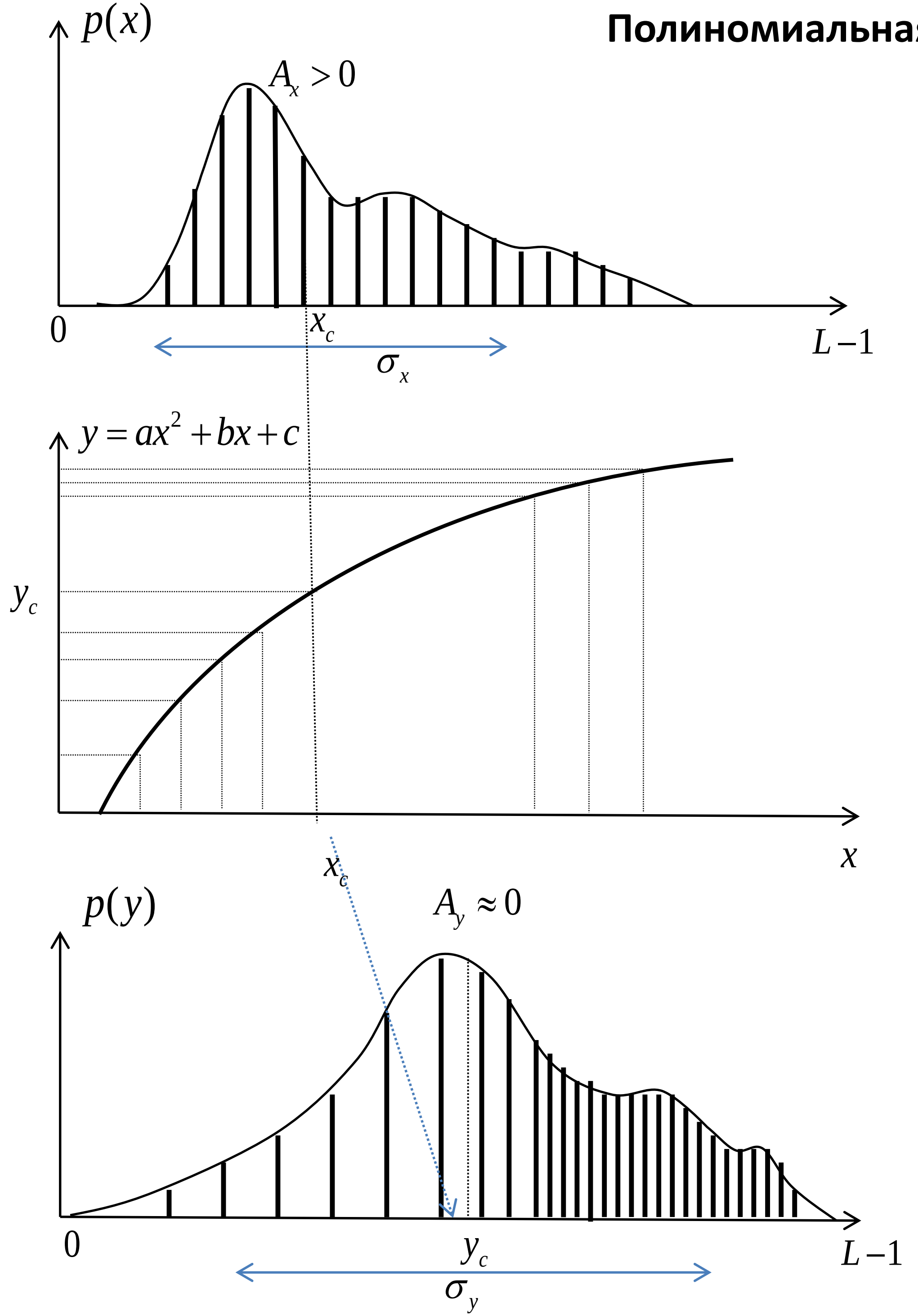
$$x_c = \sum xP(x) = \langle x \rangle$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x - x_c)^2 P(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$A_x = \sum (x - x_c)^3 P(x) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3$$

Нелинейные преобразования

Полиномиальная нормализация средней яркости, контраста и асимметрии



$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Постановка задачи: $x_c \to y_c$, $\sigma_x \to \sigma_y$, $A_x \to A_y$

$$x_c = \sum xP(x) = \langle x \rangle$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x - x_c)^2 P(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$A_x = \sum (x - x_c)^3 P(x) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3$$

Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} ax_c^2 + bx_c + c = y_c \\ a^2\sigma_{x^2}^2 + 2abK_3 + b^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ a^3 A_{x^2} + 3ab(aK_5 + bK_4) + b^3 A_x = A_y \end{cases}$$

$$\sigma_{x^2}^2 = \langle x^4 \rangle - \langle x^2 \rangle^2$$

$$A_{x^2} = \langle x^6 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle + 2\langle x^2 \rangle^3$$

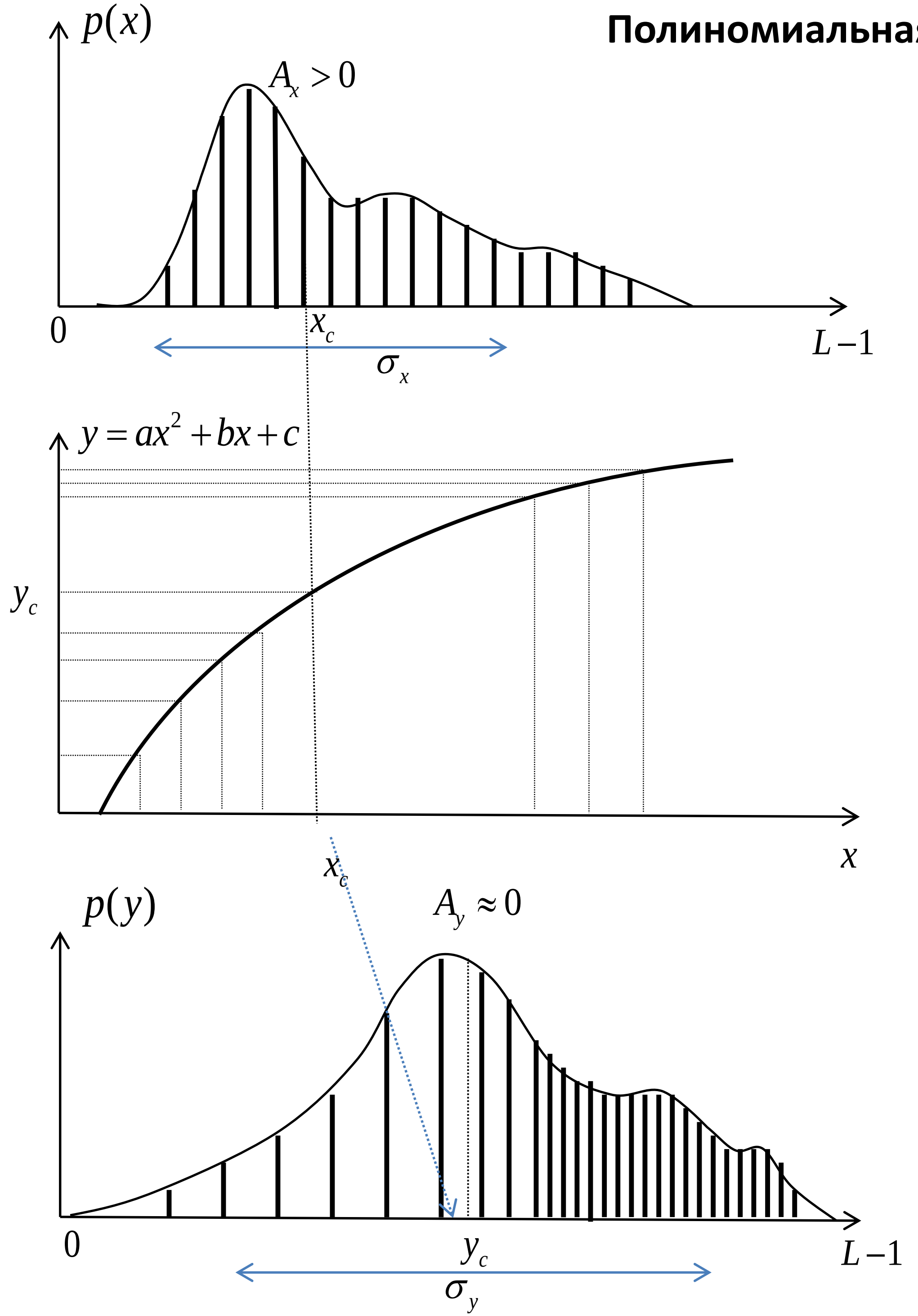
$$K_3 = \langle x^3 \rangle - x_c \langle x^2 \rangle$$

$$K_4 = \sigma_{x^2}^2 - 2x_c K_3$$

$$K_5 = \left(\langle x^5 \rangle - x_c \langle x^4 \rangle\right) - 2\langle x^2 \rangle K_3$$

Нелинейные преобразования

Полиномиальная нормализация средней яркости, контраста и асимметрии



$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$$x_c = \sum xP(x) = \langle x \rangle$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x - x_c)^2 P(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$A_x = \sum (x - x_c)^3 P(x) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3$$

Постановка задачи: $x_c \to y_c$, $\sigma_x \to \sigma_y$, $A_x \to A_y$

Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} ax_c^2 + bx_c + c = y_c \\ a^2\sigma_{x^2}^2 + 2abK_3 + b^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ a^3 A_{x^2} + 3ab(aK_5 + bK_4) + b^3 A_x = A_y \end{cases}$$

$$\sigma_{x^2}^2 = \langle x^4 \rangle - \langle x^2 \rangle^2$$

$$A_{x^2} = \langle x^6 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x^4 \rangle + 2\langle x^2 \rangle^3$$

$$K_3 = \langle x^3 \rangle - x_c \langle x^2 \rangle$$

$$K_4 = \sigma_{x^2}^2 - 2x_c K_3$$

$$K_5 = \left(\langle x^5 \rangle - x_c \langle x^4 \rangle \right) - 2\langle x^2 \rangle K_3$$

Система численно решается методом Ньютона:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a^2\sigma_{x^2}^2 + 2abK_3 + b^2\sigma_x^2 - \sigma_y^2 \\ a^3 A_{x^2} + 3ab(aK_5 + bK_4) + b^3 A_x - A_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{X}}$$

Линейная аппроксимация в окрестности $\mathbf{X}^{(k)}$:

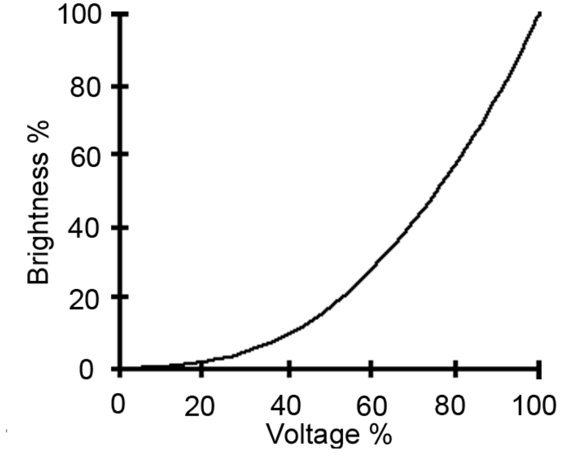
$$\mathbf{F}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)} \right) = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{X}^{(0)} = \left(0, \sigma_y / \sigma_x\right)^T \\ \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k-1)} - \left[\mathbf{D}^{(k-1)}\right]^{-1} \mathbf{F}^{(k-1)} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{X}^{(k)} \\ c = y_c - ax_c^2 + bx_c \end{gathered}}$$

Нелинейные преобразования

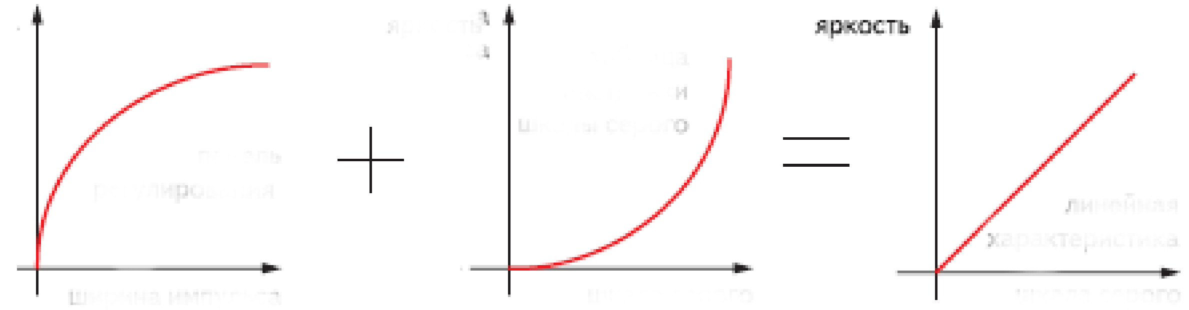
Специальные функции

Монитор отображает изображение темнее, чем необходимо:



$$y = 100x^{2.5}$$

$$y = \left(x^{0.4}\right)^{2.5} = x$$



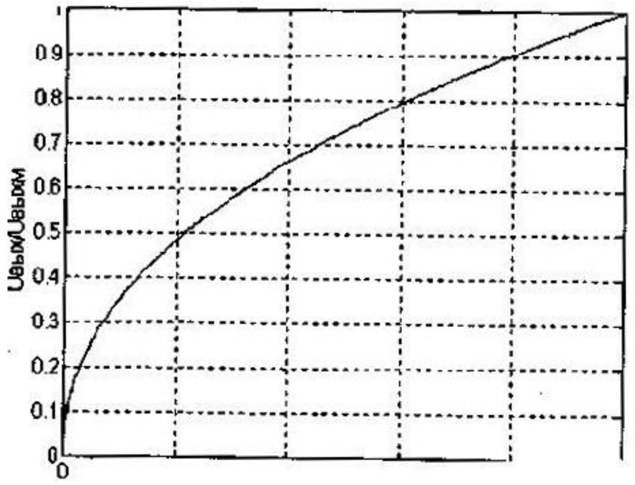
коррекция

Характеристика монитора

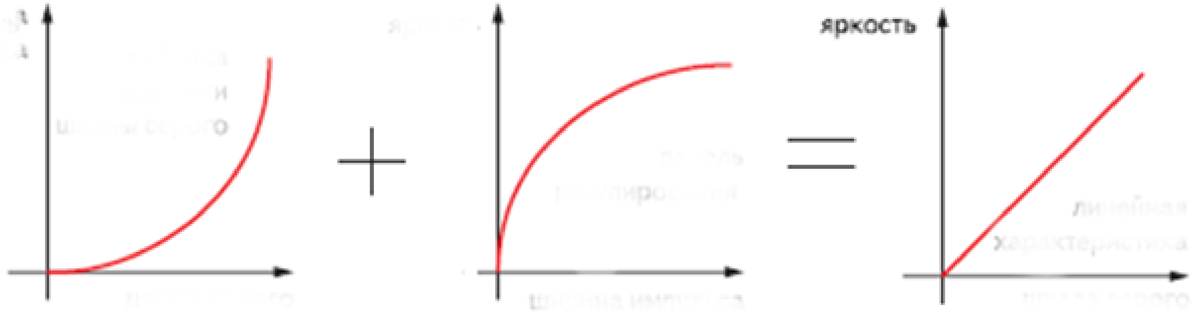
Выходной сигнал

Для корректировки используется **гамма коррекция**:

$$y = x^{\frac{1}{2.5}} = x^{0.4}$$



$$y = \left(x^{2.5}\right)^{0.4} = x$$



Характеристика приемника

коррекция

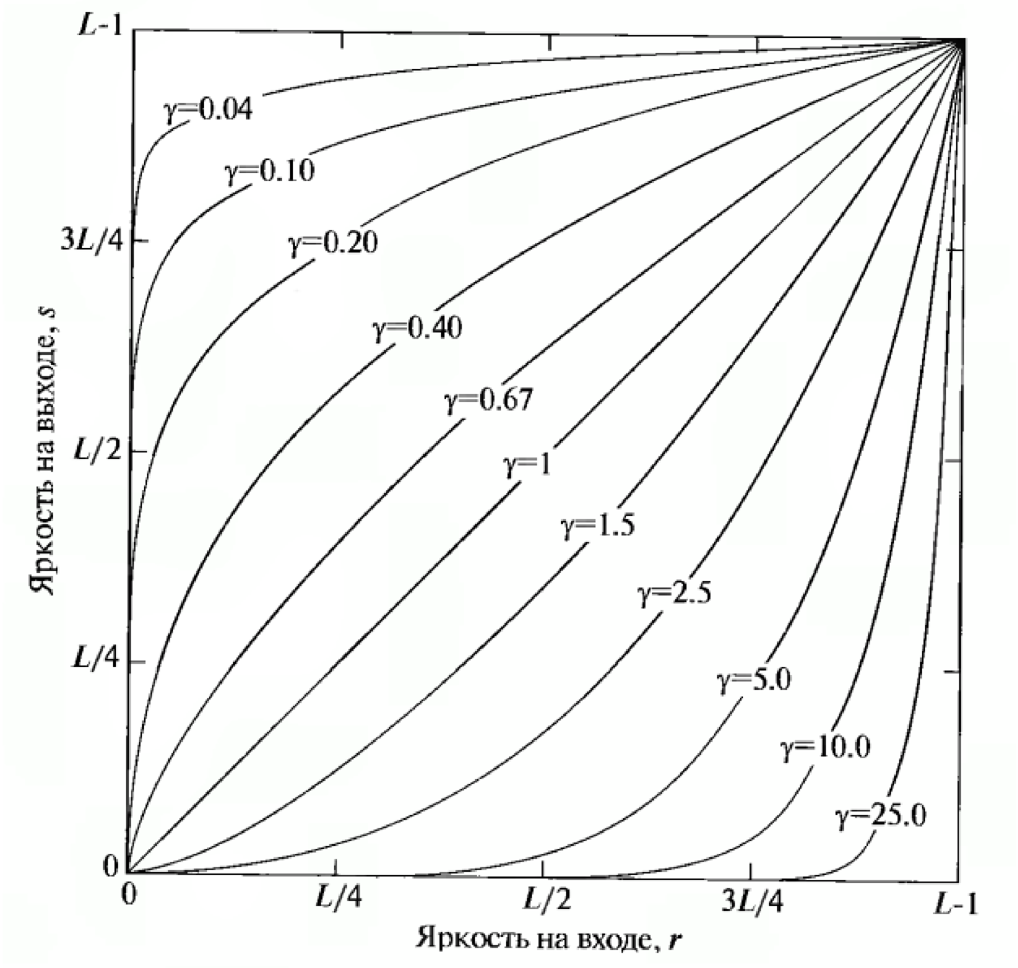
Выходной сигнал

Нелинейные преобразования

Специальные функции

Гамма коррекция

$$y = cx^{\gamma},\ 0 \le x \le 1$$



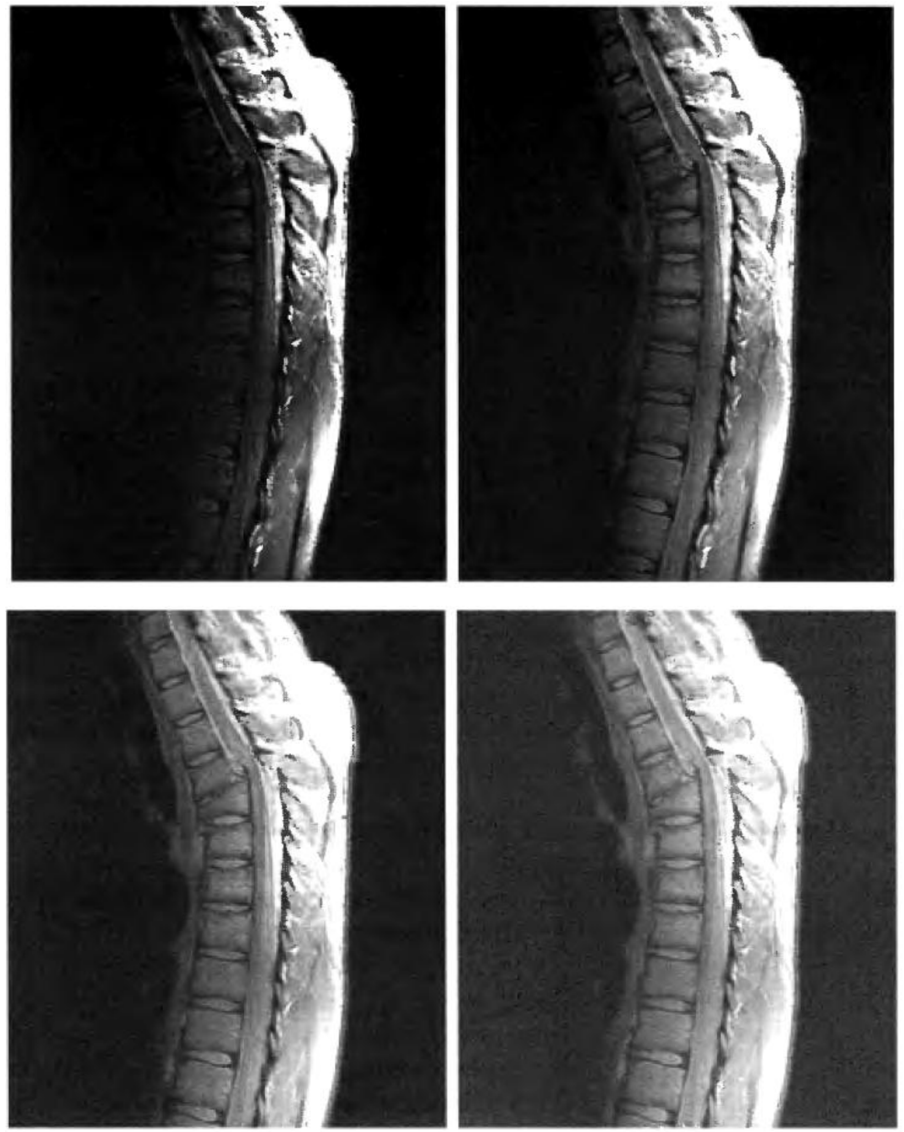


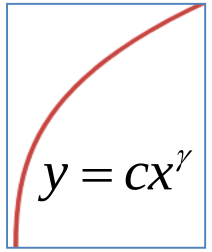
Рис. Снимок позвоночника человека с переломом; изображение получено с помощью ЯМР-томографа. (б – г) Результаты преобразований по формуле (3.2-3) с $c = 1$ и $\gamma = 0{,}6$, $0{,}4$ и $0{,}3$ соответственно. (Исходное изображение предоставил д-р Дэвид Пикенс, Отделение радиологии и рентгенологии Медицинского центра Университета Вандербильта).

Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

Нелинейные преобразования

Специальные функции

Снимок астронавта с сайта НАСА (недоступен)
http://grin.hq.nasa.gov/IMAGES/LARGE/GPN-2000-001137.jpg



Гамма коррекция

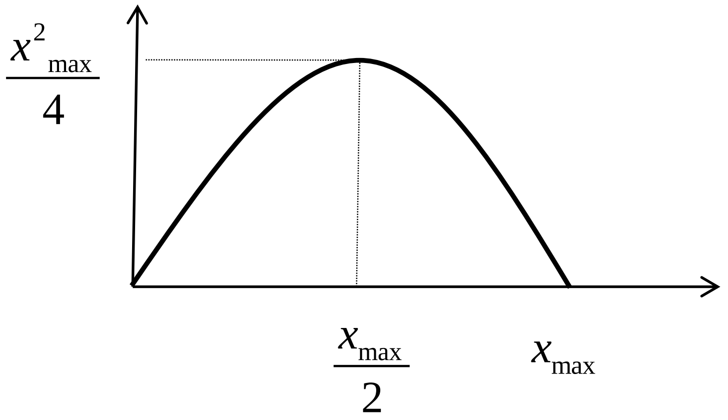
Доступен в архиве:
https://web.archive.org/web/20090109130304/http://grin.hq.nasa.gov/IMAGES/LARGE/GPN-2000-001137.jpg

Отретушированная версия:
https://history.nasa.gov/alsj/a17/AS17-134-20384HR.jpg

Нелинейные преобразования

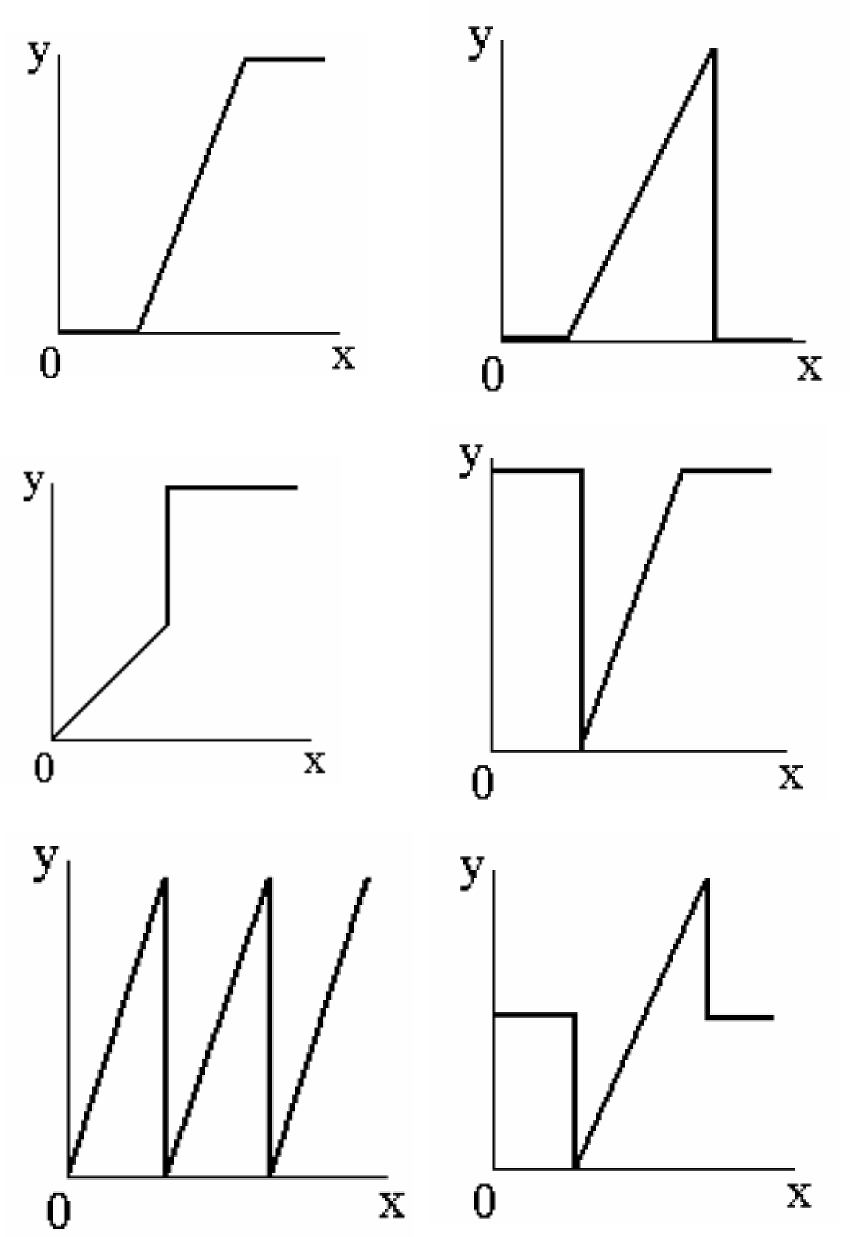
Соляризация

$$y = kx(x_{\max} - x)$$



Нелинейные преобразования

Вырезание диапазона яркостей
Препарирование



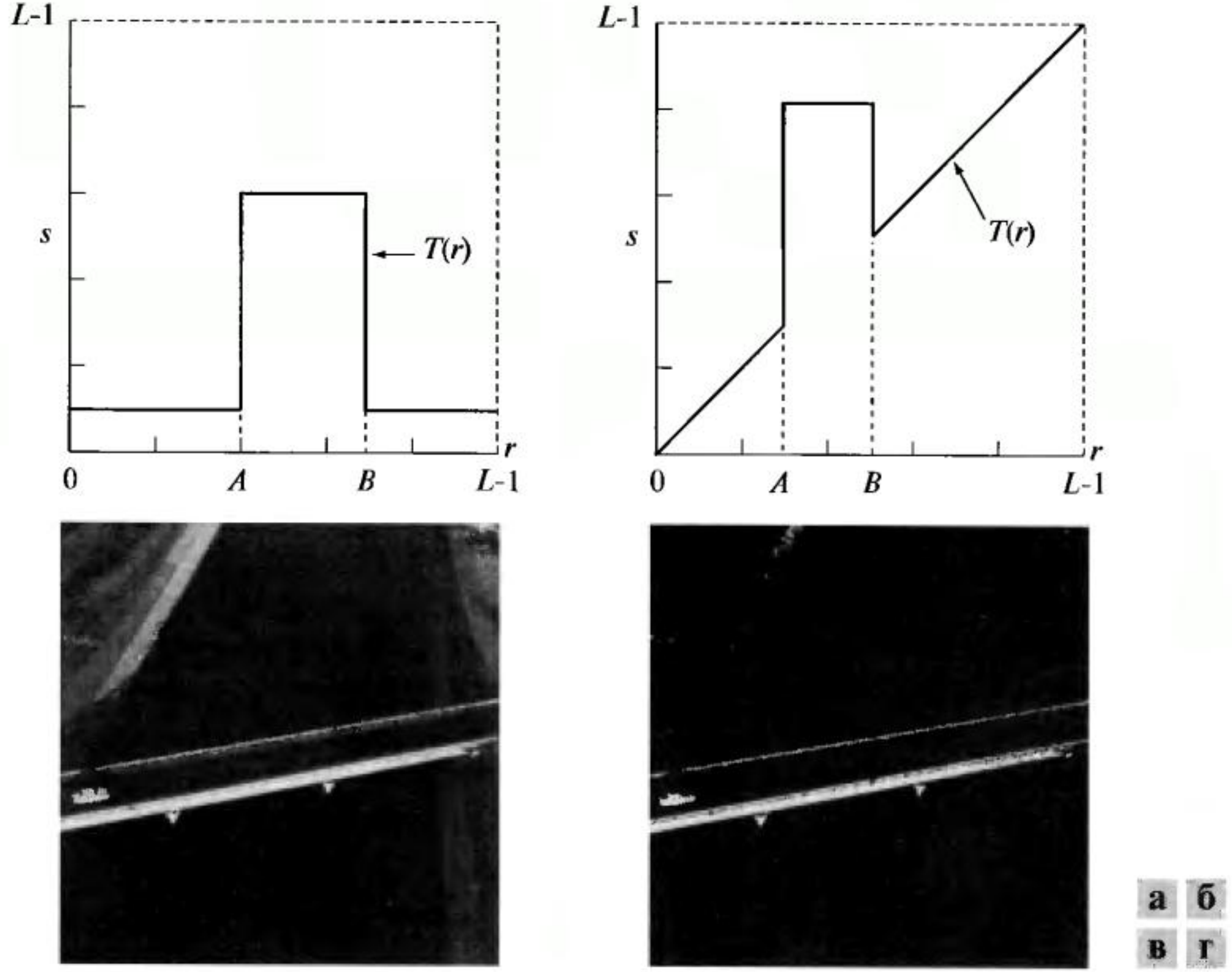


Рис. (а) Данное преобразование выделяет диапазон яркостей $[A, B]$ и приводит остальные значения к уровню константы. (б) Данное преобразование выделяет диапазон яркостей $[A, B]$, но сохраняет все остальные уровни. (в) Исходное полутоновое изображение. (г) Результат преобразования с использованием функции (а).

Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

Кусочно-линейные преобразования

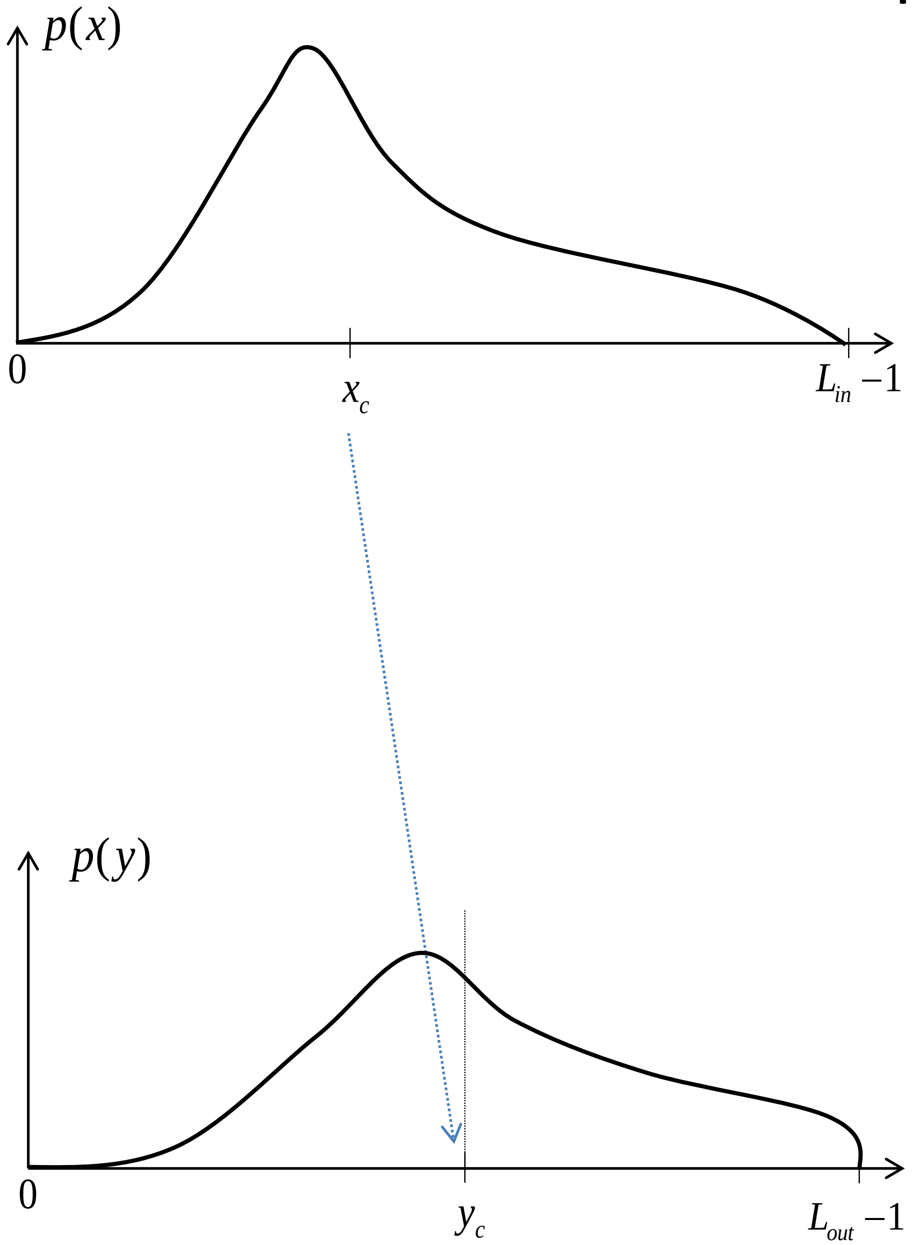
Корректировка средней яркости

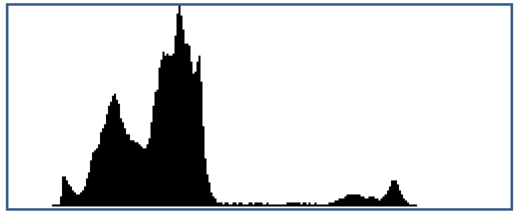
Постановка задачи:

$x_c \to y_c$

$0 \to 0$

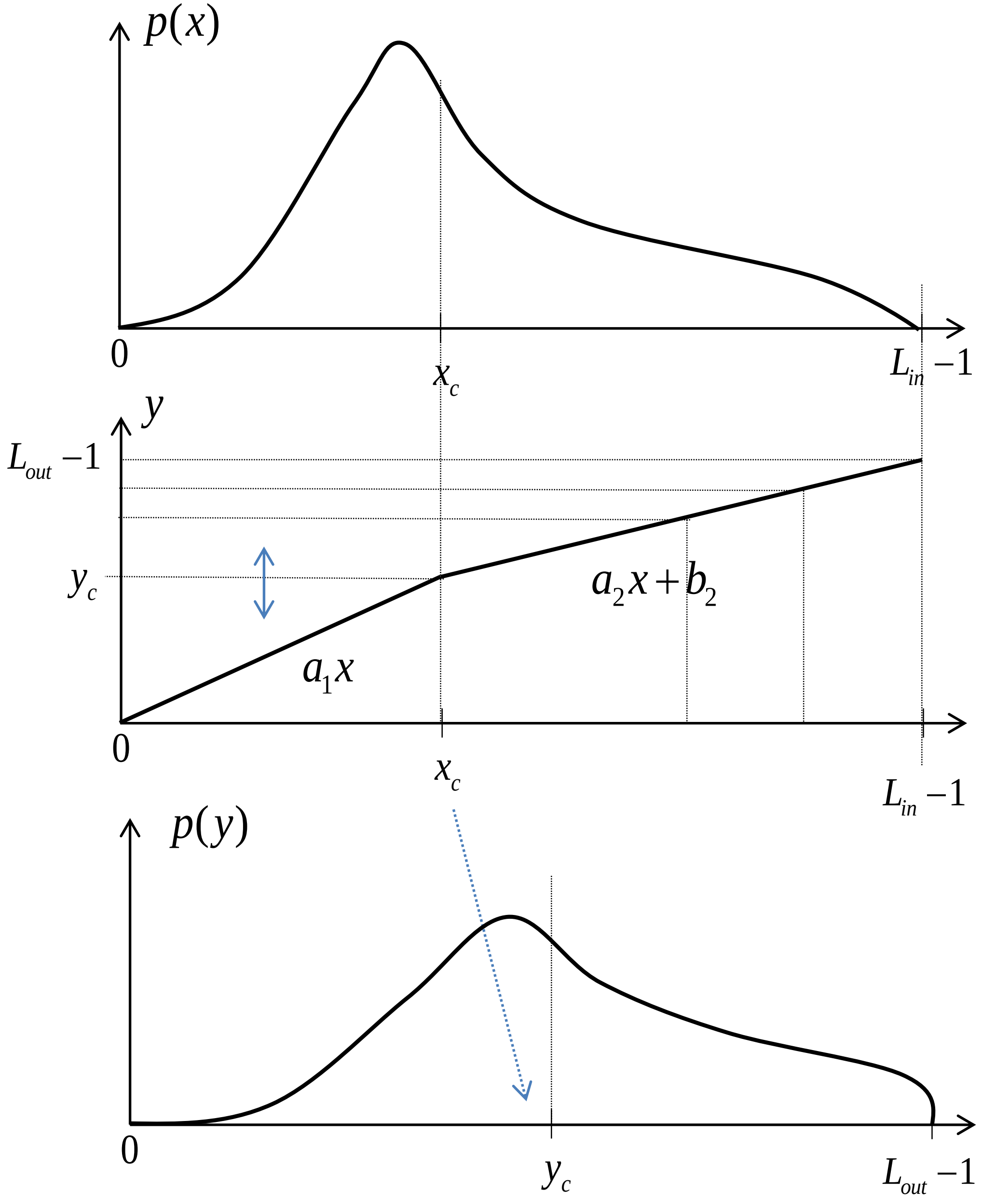
$(L_{in} - 1) \to (L_{out} - 1)$





Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости



Постановка задачи:

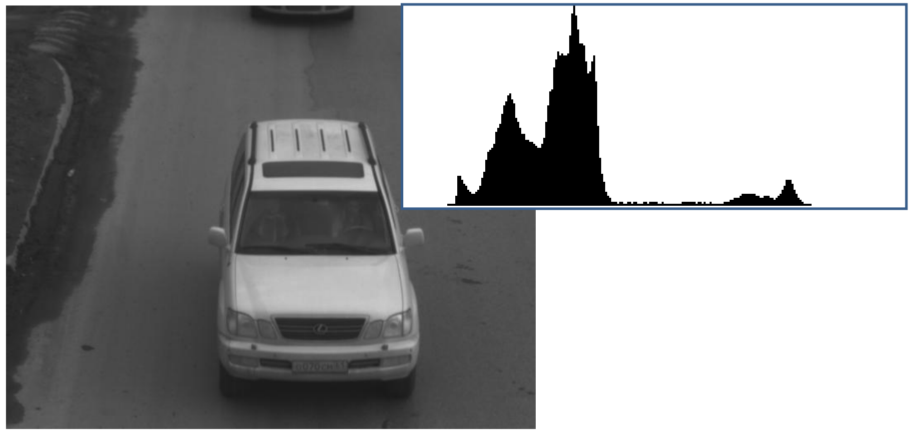
$x_c \to y_c$

$0 \to 0$

$(L_{in}-1) \to (L_{out}-1)$

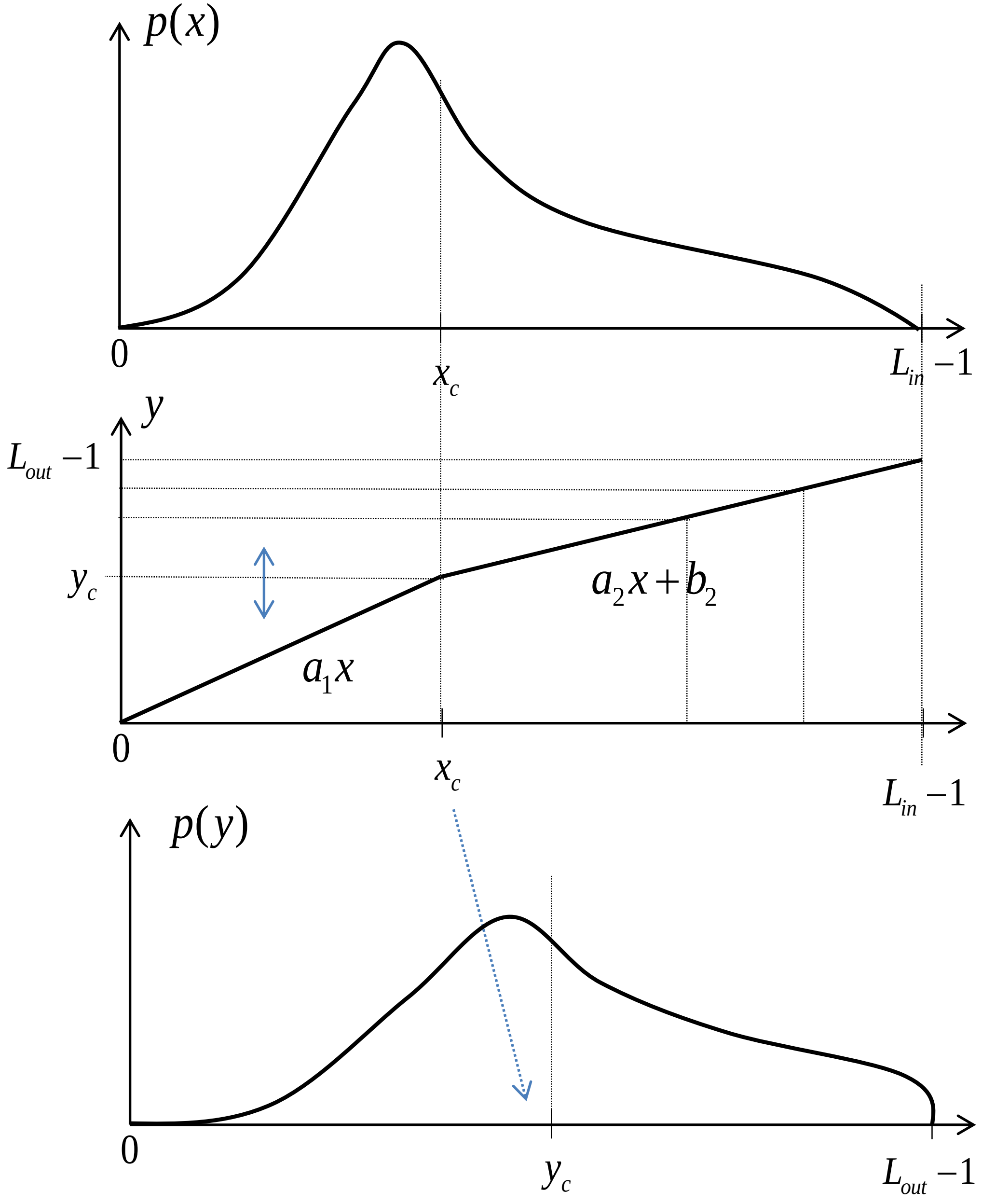
Решение:

$$\begin{cases} y_c = a_1x_c = a_2x_c + b_2 \\ L_{out}-1 = a_2(L_{in}-1) + b_2 \end{cases}$$



Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости



Постановка задачи:

$$x_c \to y_c$$

$$0 \to 0$$

$$(L_{in}-1) \to (L_{out}-1)$$

Решение:

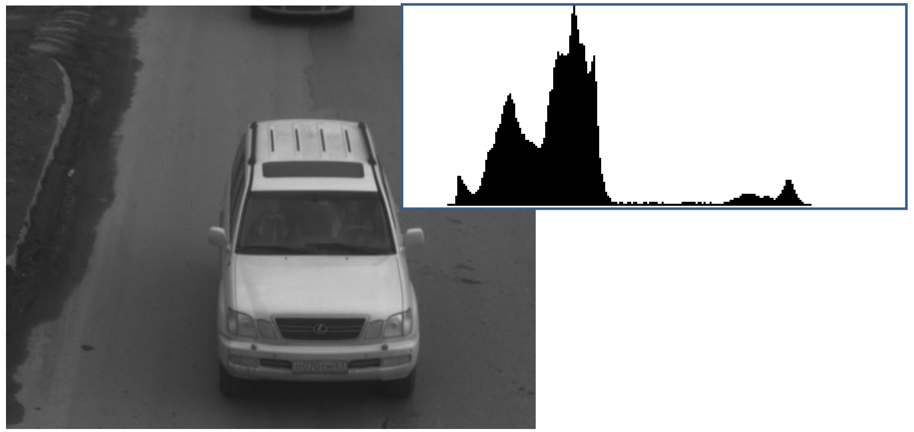
$$\begin{cases} y_c = a_1 x_c = a_2 x_c + b_2 \\ L_{out}-1 = a_2(L_{in}-1)+b_2 \end{cases}$$

$$\boxed{y = \begin{cases} a_1 x, & 0 \le x \le x_c \\ a_2 x + b_2, & x_c < x \le L_{in}-1 \end{cases}}$$

где

$$a_1 = \frac{y_c}{x_c}, \quad a_2 = \frac{L_{out}-1-y_c}{L_{in}-1-x_c},$$

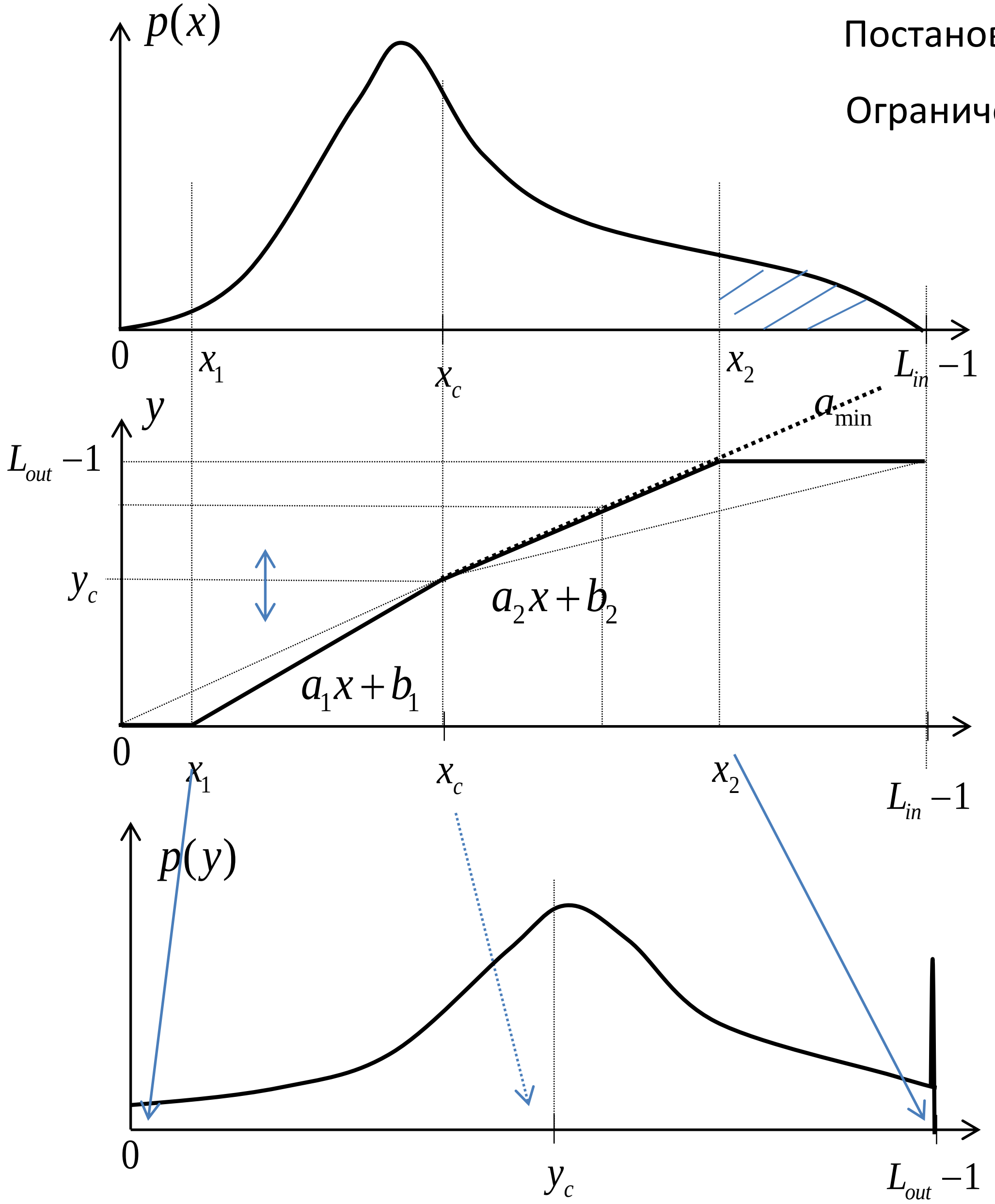
$$b_2 = y_c - \frac{L_{out}-1-y_c}{L_{in}-1-x_c} x_c$$



Недостаток – возможное уменьшение контраста в верхнем яркостном диапазоне.

Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости с насыщением

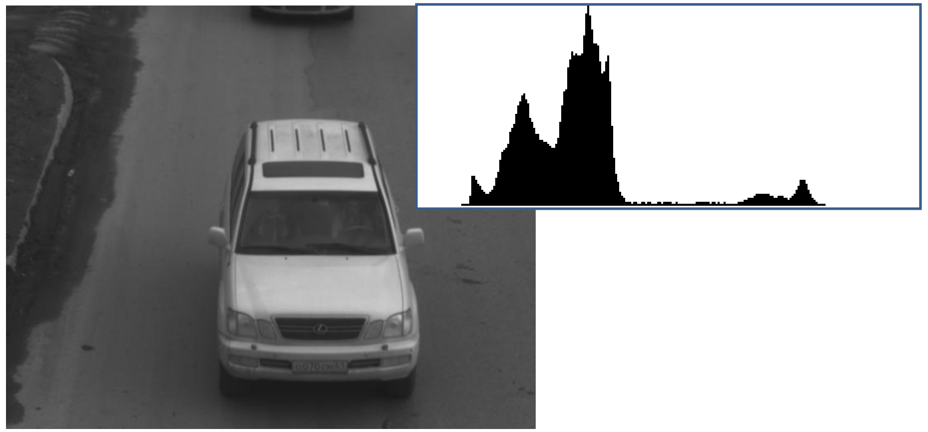


Постановка задачи: $x_c \to y_c$

Ограничения: $a_1 > a_{\min}, \quad a_2 > a_{\min}$

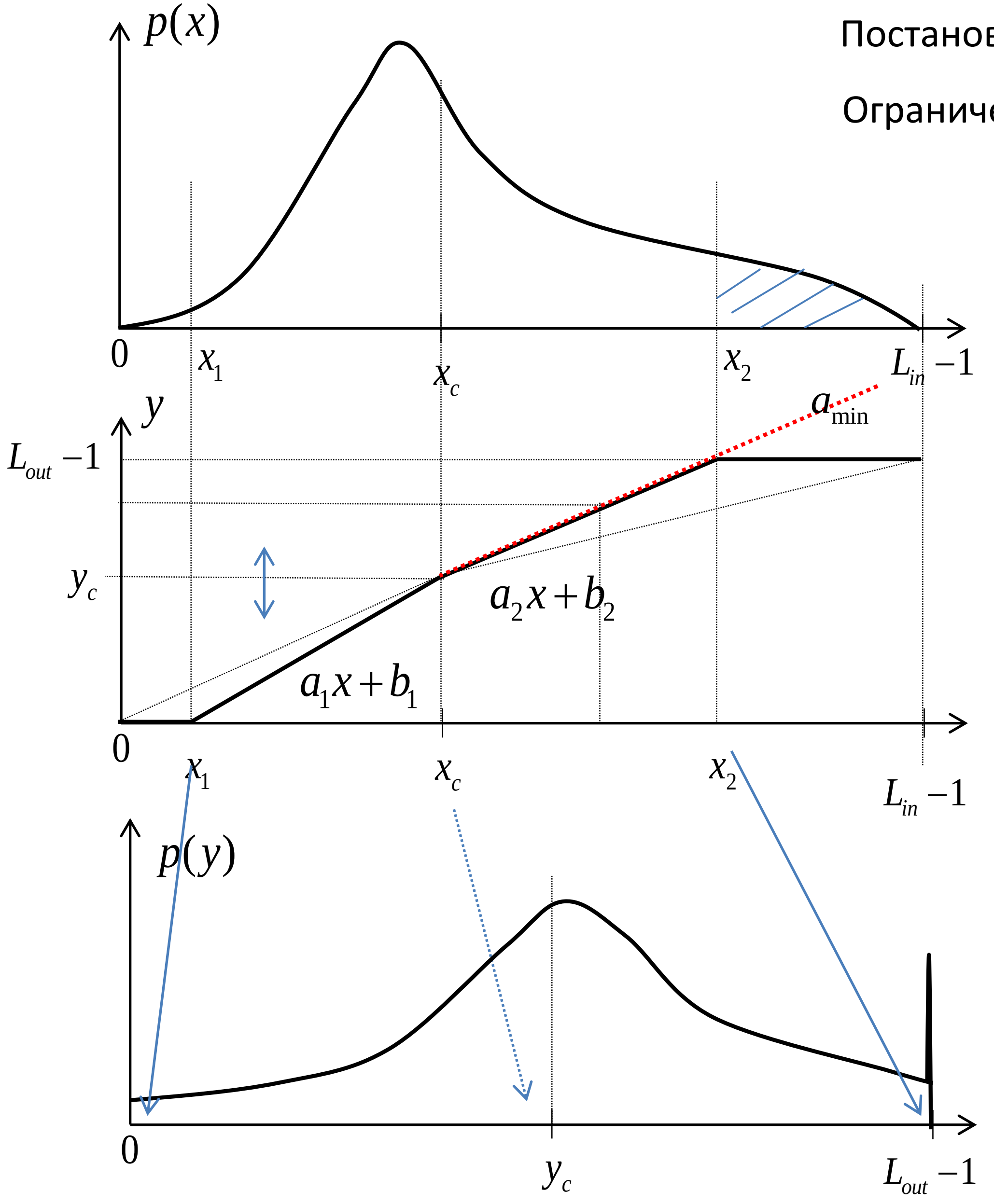
Решение:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le -\dfrac{b_1}{a_1} = x_1 \\ a_1x+b_1, & -\dfrac{b_1}{a_1} < x \le x_c \\ a_2x+b_2, & x_c < x \le \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2} = x_2 \\ L_{out}-1, & \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2} < x \le L_{in}-1 \end{cases}$$



Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости с насыщением



Постановка задачи: $x_c \to y_c$

Ограничения: $a_1 > a_{\min},\ \ a_2 > a_{\min}$

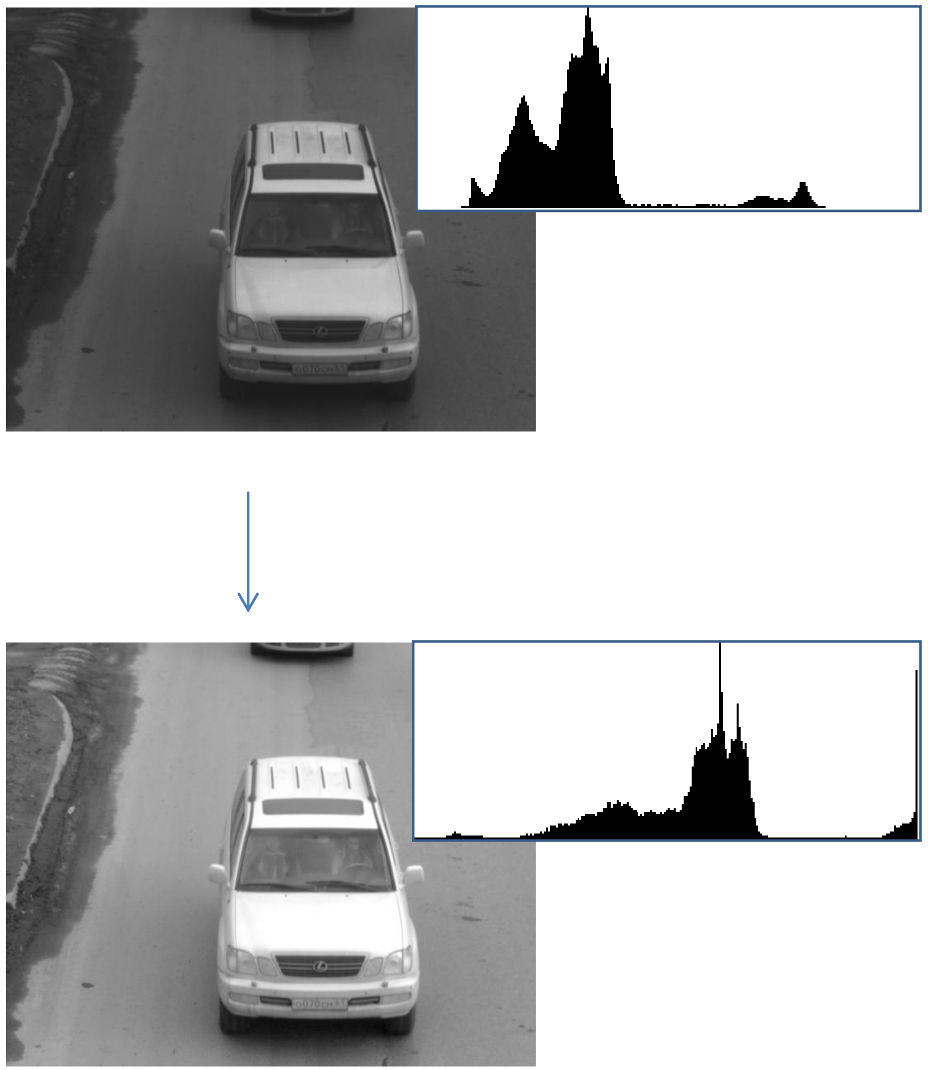
Решение:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le -\dfrac{b_1}{a_1} = x_1 \\ a_1x + b_1, & -\dfrac{b_1}{a_1} < x \le x_c \\ a_2x + b_2, & x_c < x \le \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2} = x_2 \\ L_{out}-1, & \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2} < x \le L_{in}-1 \end{cases}$$

где

$$a_1 = MAX\left(a_{\min}, \frac{y_c}{x_c}\right),\quad b_1 = y_c - a_1x_c$$

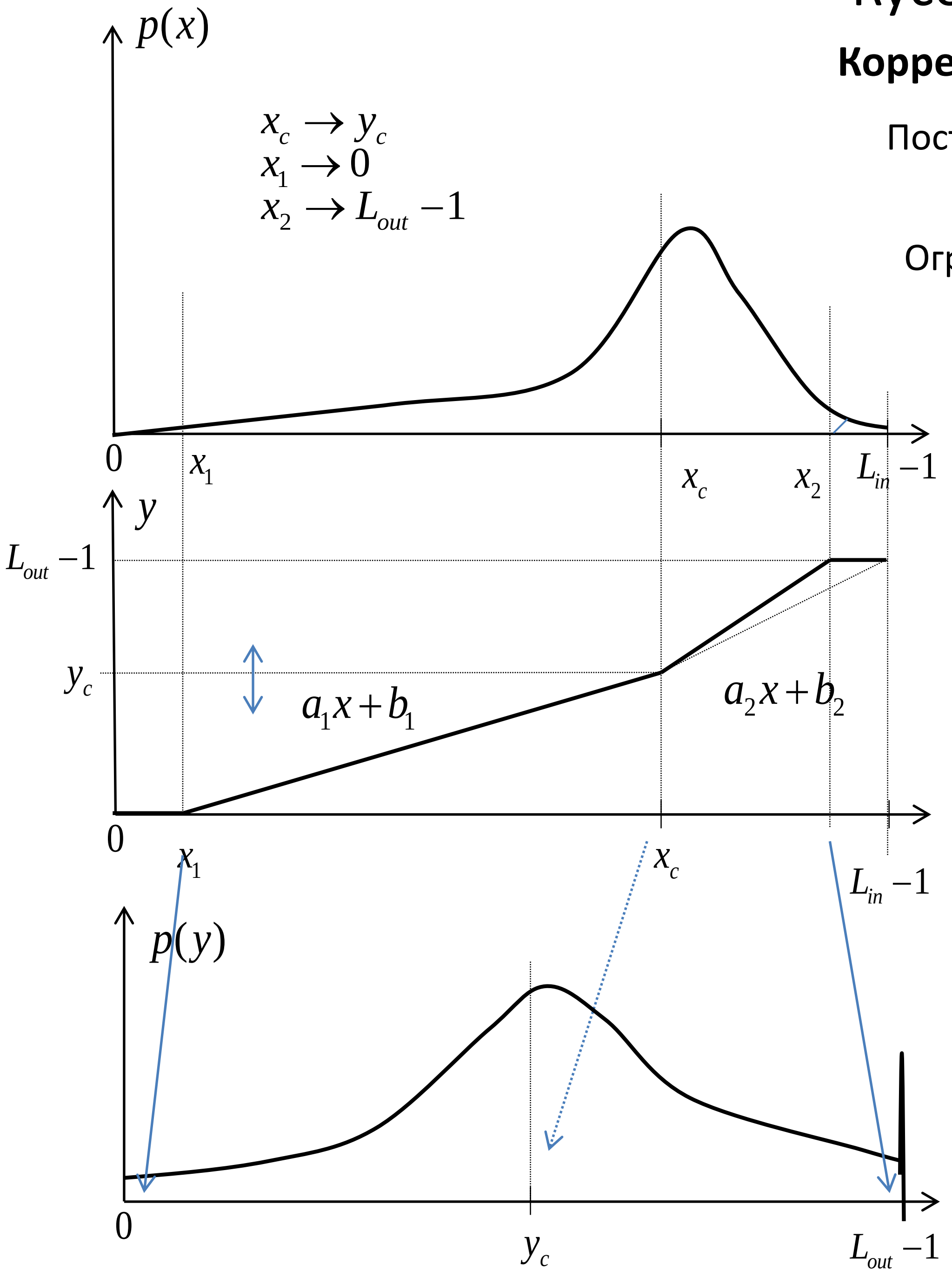
$$a_2 = MAX\left(a_{\min}, \frac{L_{out}-1-y_c}{L_{in}-1-x_c}\right),\quad b_2 = y_c - a_2x_c$$



Недостаток – возможное переконтростирование в верхнем яркостном диапазоне если средняя яркость значительно выше середины диапазона.

Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости и контрастности



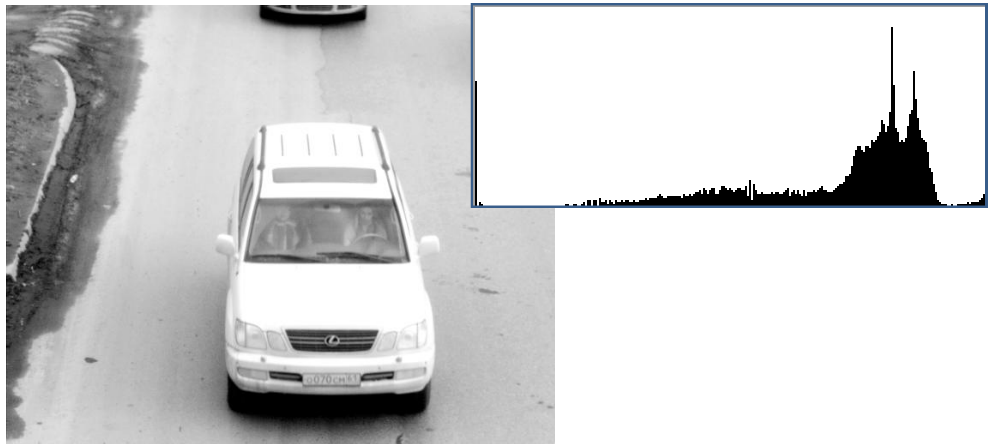
Постановка задачи: $x_c \to y_c$

Ограничения: $a_{\min} \le a_1 \le a_{\max}$,

$a_{\min} \le a_2 \le a_{\max}$

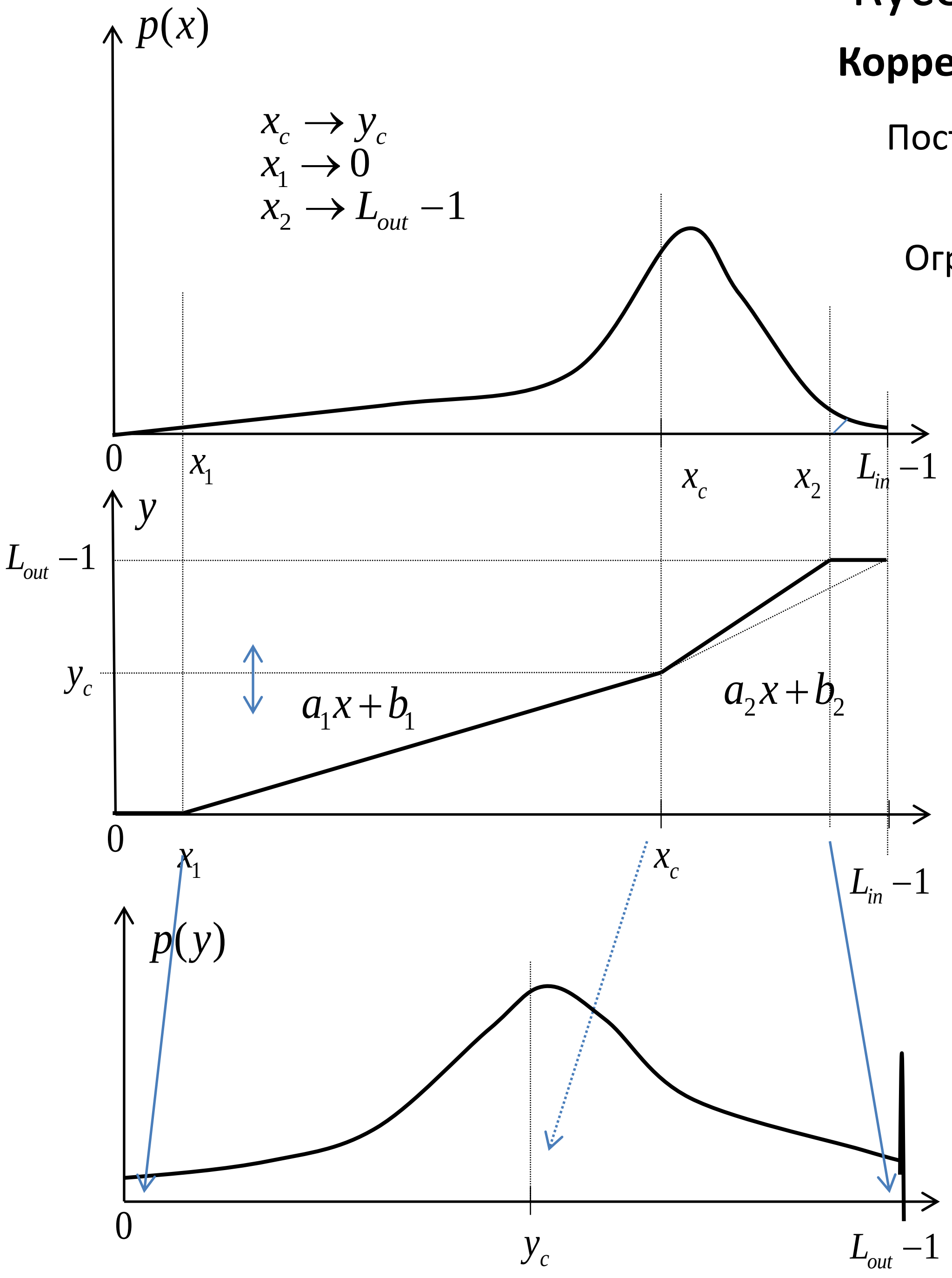
Решение:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le -\dfrac{b_1}{a_1} = x_1 \\ a_1 x + b_1, & -\dfrac{b_1}{a_1} < x \le x_c \\ a_2 x + b_2, & x_c < x \le \dfrac{L_{out} - 1 - b_2}{a_2} = x_2 \\ L_{out} - 1, & \dfrac{L_{out} - 1 - b_2}{a_2} < x \le L_{in} - 1 \end{cases}$$



Кусочно-линейные преобразования

Коррекция средней яркости и контрастности



Постановка задачи: $x_c \to y_c$

Ограничения: $a_{\min} \le a_1 \le a_{\max}$, $a_{\min} \le a_2 \le a_{\max}$

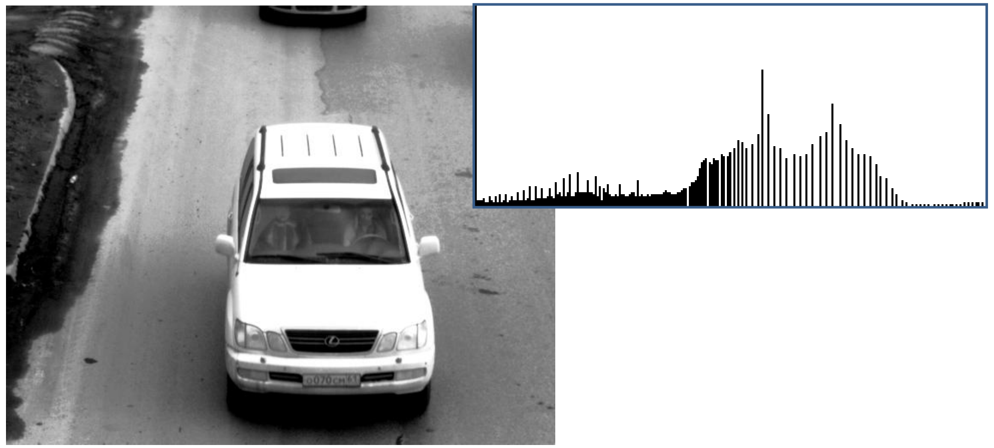
Решение:

$$y=\begin{cases} 0, & 0 \le x \le -\dfrac{b_1}{a_1}=x_1 \\ a_1x+b_1, & -\dfrac{b_1}{a_1} < x \le x_c \\ a_2x+b_2, & x_c < x \le \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2}=x_2 \\ L_{out}-1, & \dfrac{L_{out}-1-b_2}{a_2} < x \le L_{in}-1 \end{cases}$$

где

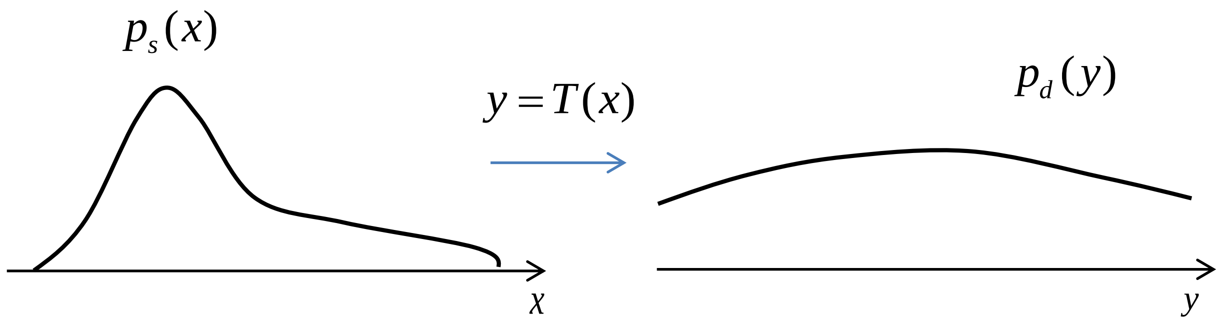
$$a_1 = BOUND\left(\frac{y_c}{x_c-x_1}, a_{\min}, a_{\max}\right), \quad b_1 = y_c - a_1x_c$$

$$a_2 = BOUND\left(\frac{L_{out}-1-y_c}{x_2-x_c}, a_{\min}, a_{\max}\right), \quad b_2 = y_c - a_2x_c$$



Недостаток – плохо корректирует неунимодальные гистограммы.

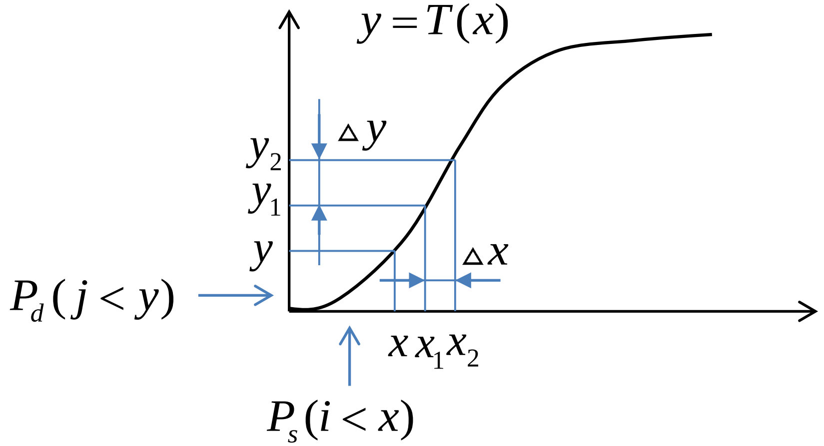
Приведение гистограммы



При заданном преобразовании $y = T(x)$ - монотонное, обратимое изменяется гистограмма исходного изображения: $p_s(x) \to p_d(y)$

Пусть x - случайная величина, $p_s(x)$ - плотность распределения,

$$P_s(i < x) = \frac{1}{\int p_s(i)} \int_0^x p_s(i)\,di$$ - закон распределения.

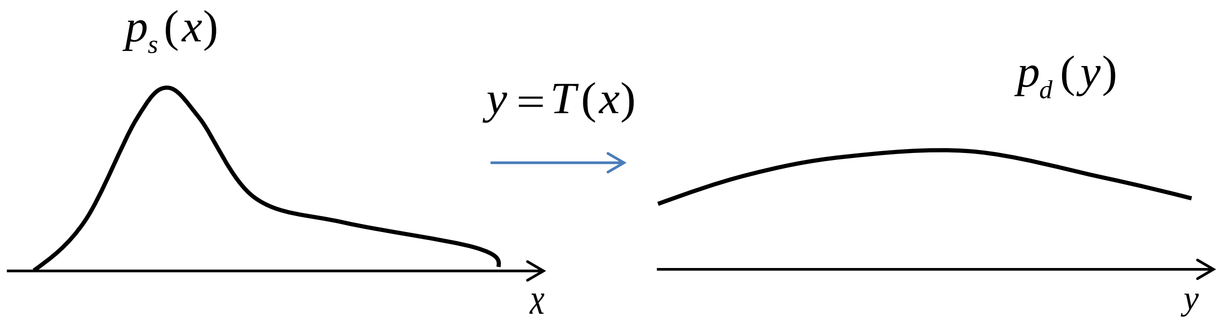


$$P_s(i < x) = P_d(j < y)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y} p_d(j)}$$

$$T(x):\ \ x \to y$$

Приведение гистограммы



При заданном преобразовании $y = T(x)$ - монотонное, обратимое изменяется гистограмма исходного изображения: $p_s(x) \to p_d(y)$

Пусть $y = T(x)$, найдем $p_d(y)$:

$$P_s(x_1 < i < x_2) = P_d(y_1 < j < y_2)$$

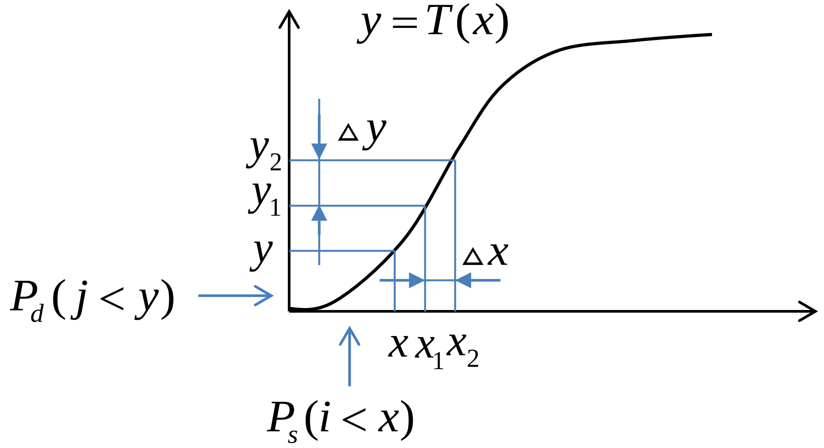
$$\sum_{i=x_1}^{x_1+\triangle x} p_s(i) = \sum_{j=y_1}^{y_1+\triangle y} p_d(j)$$

при $\triangle x, \triangle y \to 0$: $p_s(x)dx = p_d(y)dy$

$$x = T^{-1}(y) \Rightarrow dx = \frac{dT^{-1}(y)}{dy}dy$$

$$p_s(x)\frac{dT^{-1}(y)}{dy}dy = p_d(y)dy$$

$$\Rightarrow \boxed{p_d(y) = p_s(x)\frac{dT^{-1}(y)}{dy}}$$

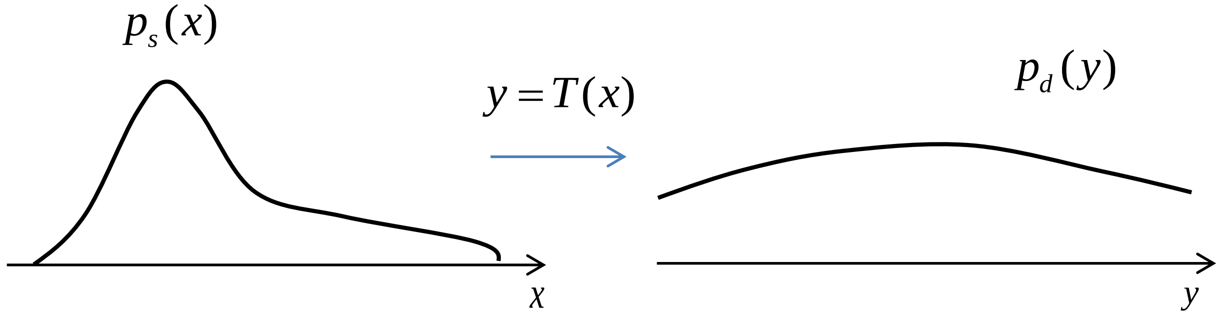


$$P_s(i < x) = P_d(j < y)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y} p_d(j)}$$

$$T(x):\ x \to y$$

Приведение гистограммы



$$\boxed{T(x) - ?}$$

$$p_s(x) \to p_d(y)$$

$$P_s(i < x) = P_d(j < y)$$

$$\sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y} p_d(j) \qquad T(x):\ x \to y$$

<u>Алгоритм построения преобразования</u>

$k = 0:$

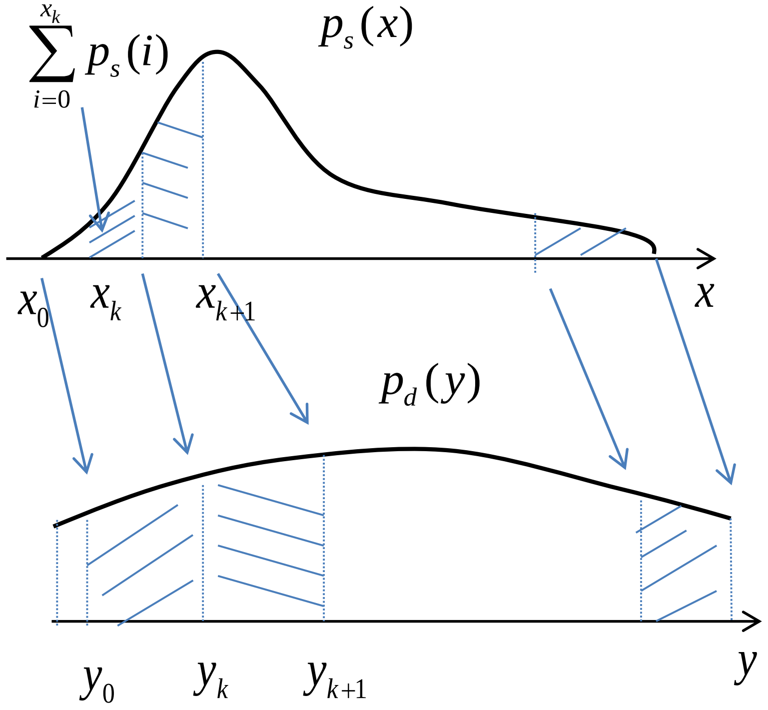
$$p_s(x_0) = \sum_{j=0}^{y_0} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_0 - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_0 + 1)}{2}$$

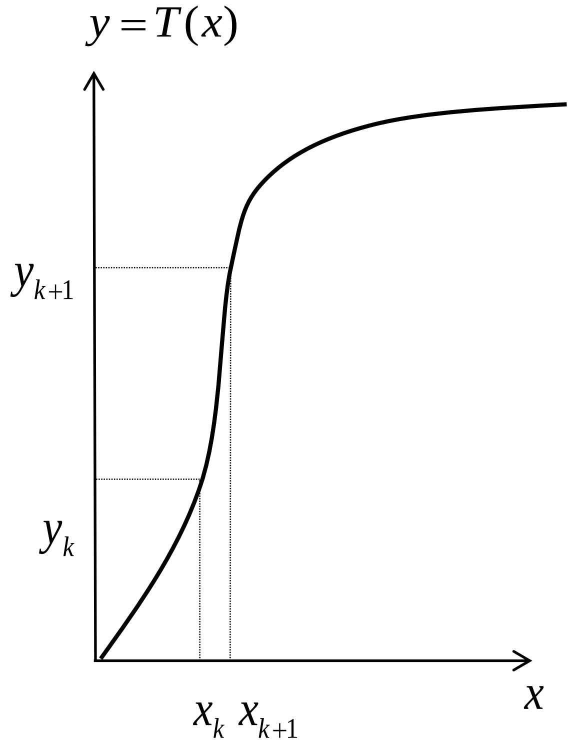
$x_0 \to y_0$

$k + 1:$

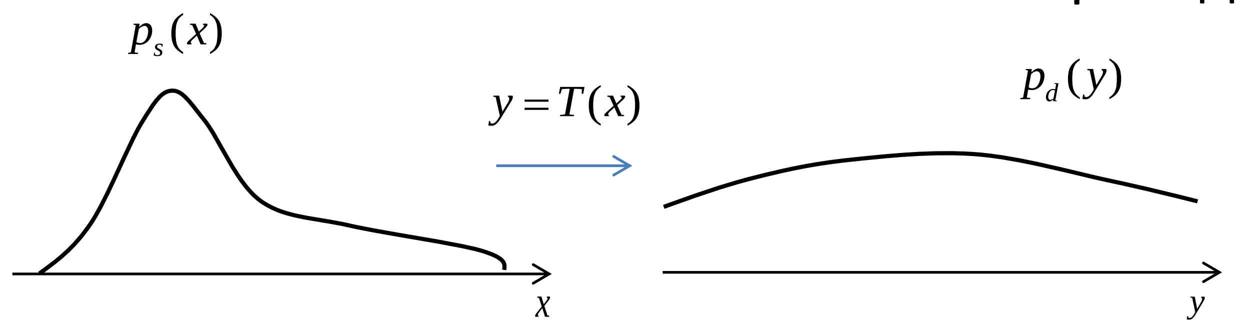
$$\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i) + p_s(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{y_k} p_d(j) + \sum_{j=y_k}^{y_{k+1}} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_{k+1} - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_{k+1} + 1)}{2}$$

$x_{k+1} \to y_{k+1}$





Приведение гистограммы



$T(x) - ?$

$p_s(x) \to p_d(y)$

$P_s(i < x) = P_d(j < y)$

$\sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y} p_d(j) \quad T(x): \; x \to y$

<u>Алгоритм построения преобразования</u>

$k = 0:$

$$p_s(x_0) = \sum_{j=0}^{y_0} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_0 - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_0 + 1)}{2}$$

$x_0 \to y_0$

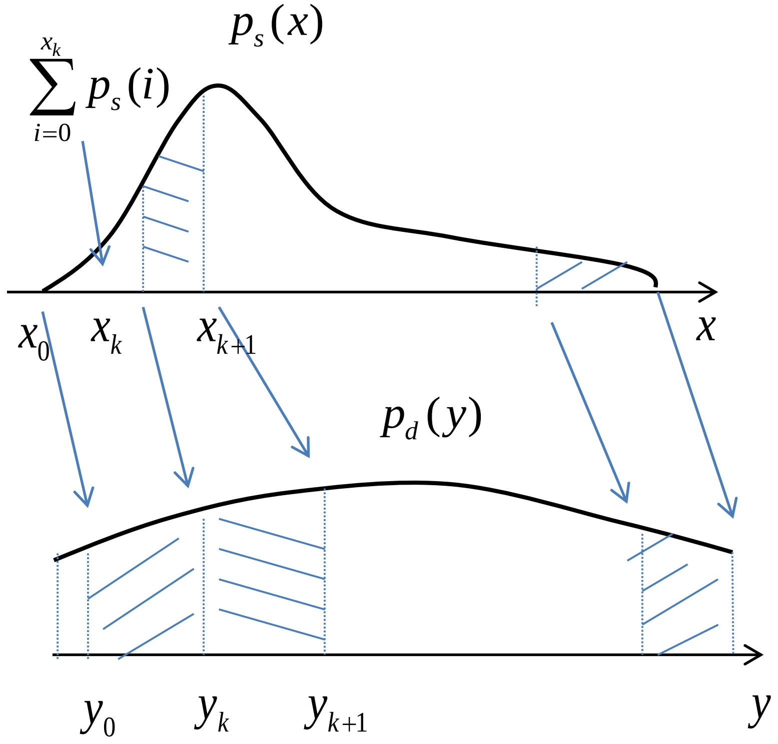
$k + 1:$

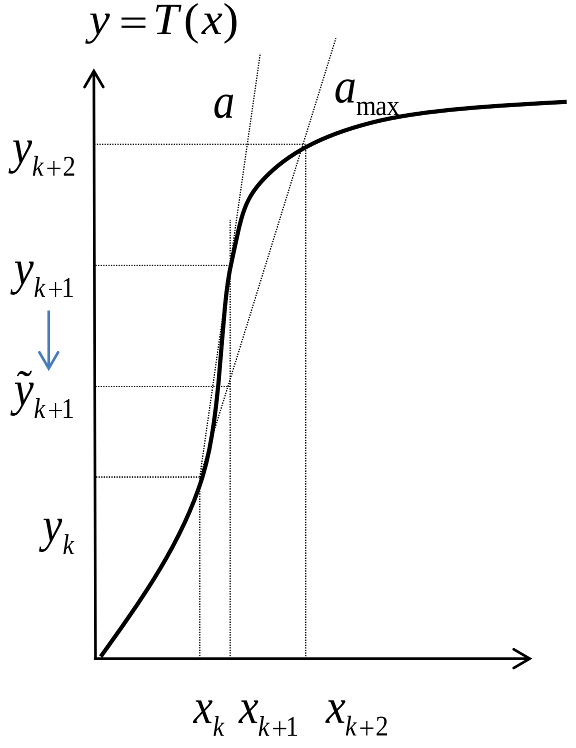
$$\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i) + p_s(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{y_k} p_d(j) + \sum_{j=y_k}^{y_{k+1}} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_{k+1} - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_{k+1} + 1)}{2}$$

$x_{k+1} \to y_{k+1}$

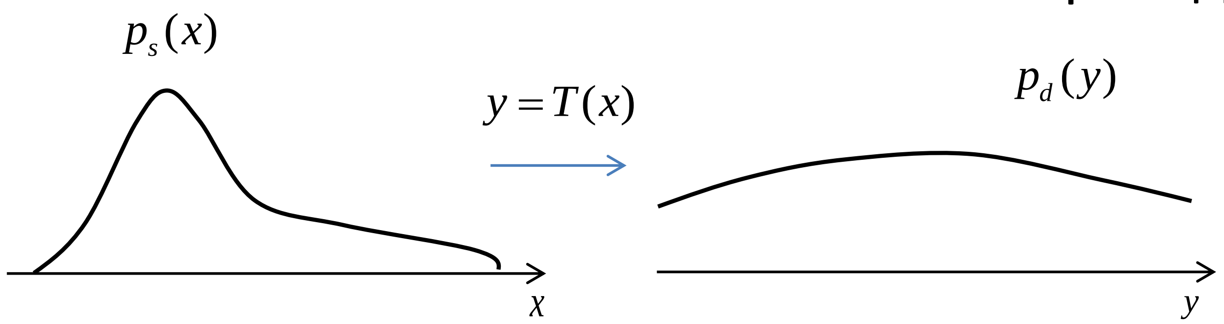
Ограничение на производную:

$$y_{k+1} = \begin{cases} y_{k+1}, & \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \le a_{\max} \\ \tilde{y}_{k+1} = a_{\max}(x_{k+1} - x_k) + y_k, & \text{иначе} \end{cases}$$





Приведение гистограммы



$T(x) - ?$

$p_s(x) \to p_d(y)$

$P_s(i < x) = P_d(j < y)$

$\sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y} p_d(j) \quad T(x):\ x \to y$

<u>Алгоритм построения преобразования</u>

$k = 0:$

$$p_s(x_0) = \sum_{j=0}^{y_0} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_0 - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_0 + 1)}{2}$$

$x_0 \to y_0$

$k + 1:$

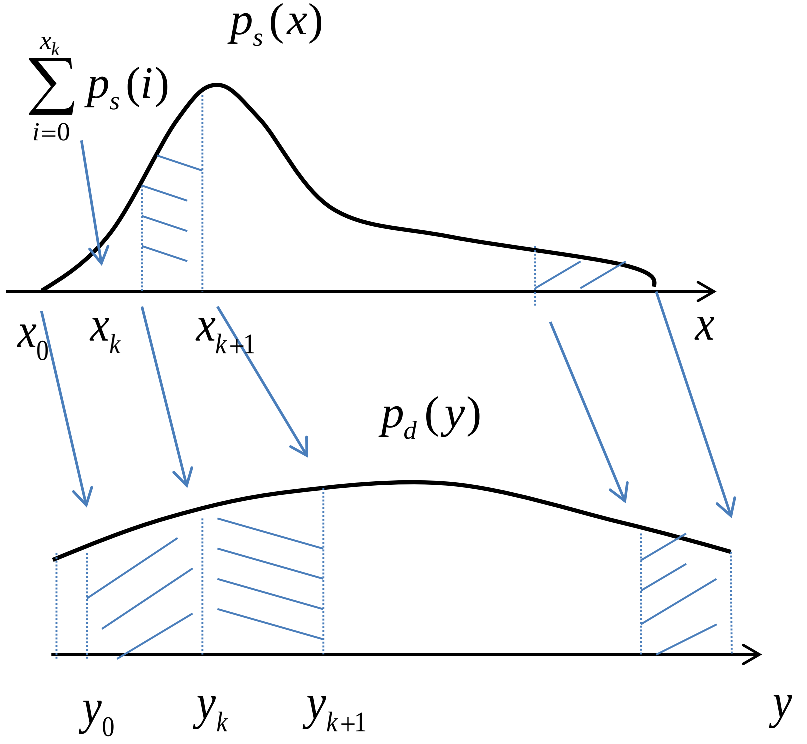
$$\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i) + p_s(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{y_k} p_d(j) + \sum_{j=y_k}^{y_{k+1}} p_d(j) + \varepsilon, \quad -\frac{p_d(y_{k+1} - 1)}{2} \le \varepsilon < \frac{p_d(y_{k+1} + 1)}{2}$$

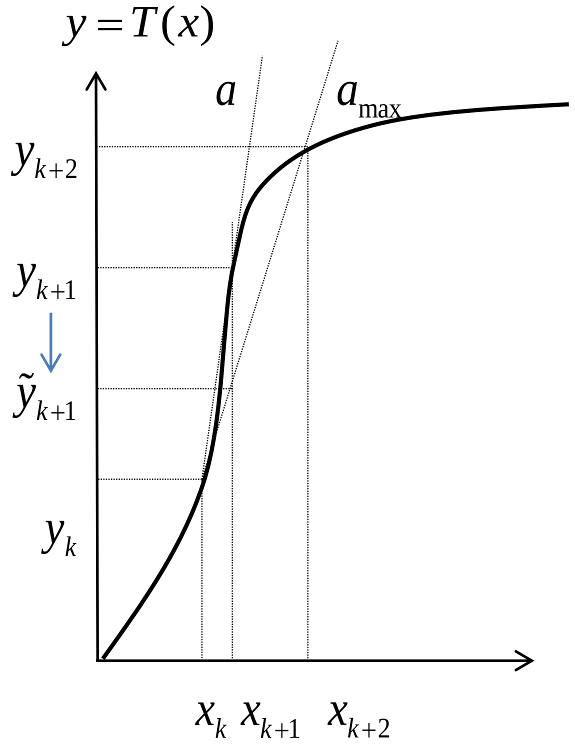
$x_{k+1} \to y_{k+1}$

Ограничение на производную:

$$y_{k+1} = \begin{cases} y_{k+1}, & \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \le a_{\max} \\ \tilde{y}_{k+1} = a_{\max}(x_{k+1} - x_k) + y_k, & \text{иначе} \end{cases}$$

$T(x):\quad \{x_k\} \to \{y_k\}$



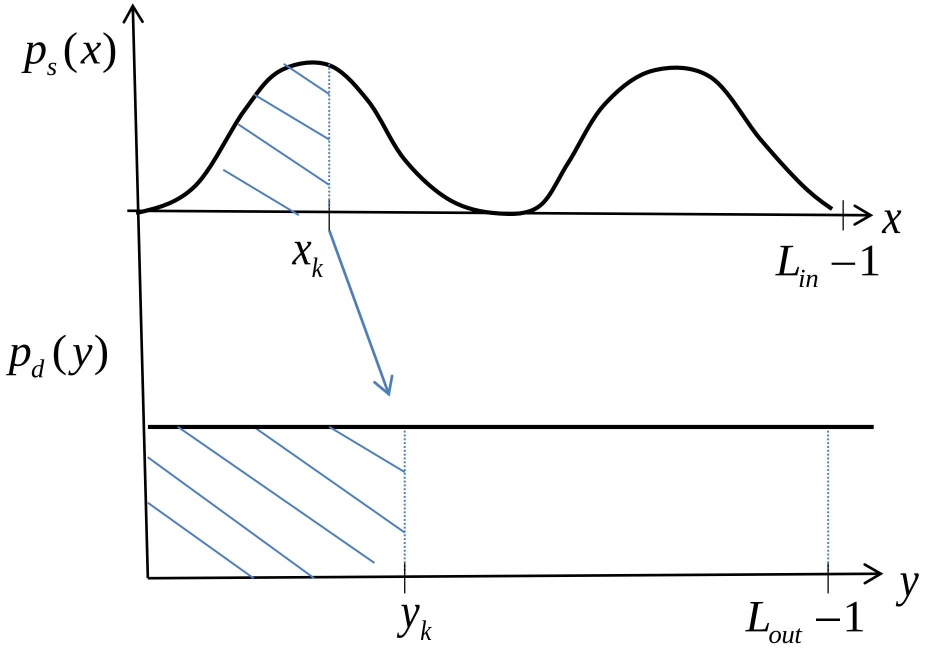


$$y = T(x) = \frac{y_{k+1}(x - x_k) + y_k(x_{k+1} - x)}{x_{k+1} - x_k}, \quad x_k \le x \le x_{k+1}$$

В разных диапазонах яркости можно использовать разные преобразования.

Приведение гистограммы

эквализация



$$p_d(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{L_{out}-1} \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), & 0 \le y \le L_{out}-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

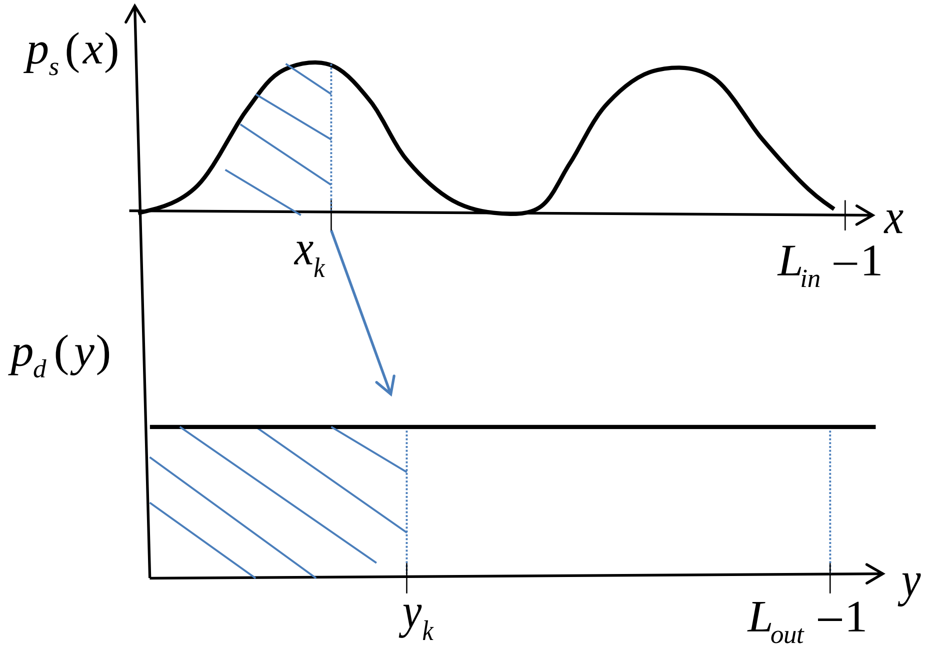
$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{L_{out}-1} p_d(j) = \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$

$$\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y_k} p_d(j) = \sum_{j=0}^{y_k} \left[\frac{1}{L_{out}-1} \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i) \right] = \frac{y_k}{L_{out}-1} \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_k = \frac{\left(L_{out}-1\right) \sum_{i=0}^{x_k} p_s(i)}{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)}}$$

Приведение гистограммы

эквализация



$$p_d(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{L_{out}-1}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), & 0 \le y \le L_{out}-1 \\ 0, & иначе \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{L_{out}-1} p_d(j) = \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$

$$\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i) = \sum_{j=0}^{y_k} p_d(j) = \sum_{j=0}^{y_k}\left[\frac{1}{L_{out}-1}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)\right] = \frac{y_k}{L_{out}-1}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_k = \frac{\left(L_{out}-1\right)\sum_{i=0}^{x_k} p_s(i)}{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)}}$$

Обратно, пусть функция преобразования задана выражением:

$$T(x) = \frac{L_{out}-1}{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)}\sum_{i=0}^{x} p_s(i) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dT(x)}{dx} \simeq \frac{L_{out}-1}{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)}\, p_s(x)$$

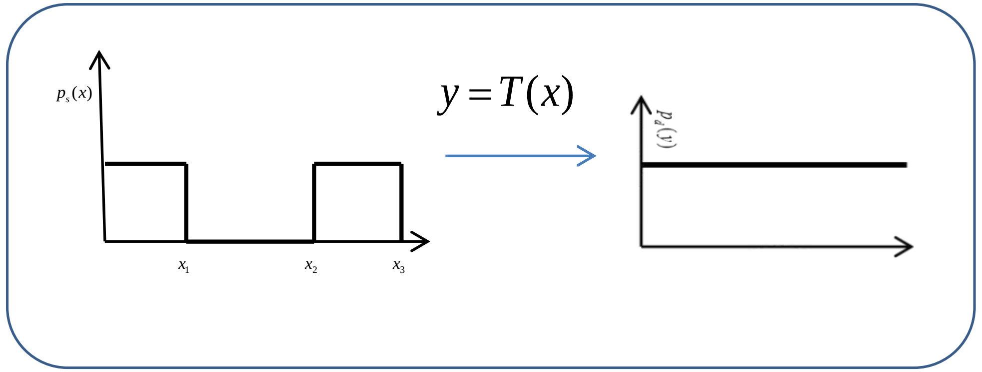
Из формулы:

$$p_d(y) = p_s(x)\frac{dT^{-1}(y)}{dy} = p_s(x)\frac{dx}{dy} = p_s(x)\frac{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)}{(L_{out}-1)\,p_s(x)} = \frac{1}{(L_{out}-1)}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$

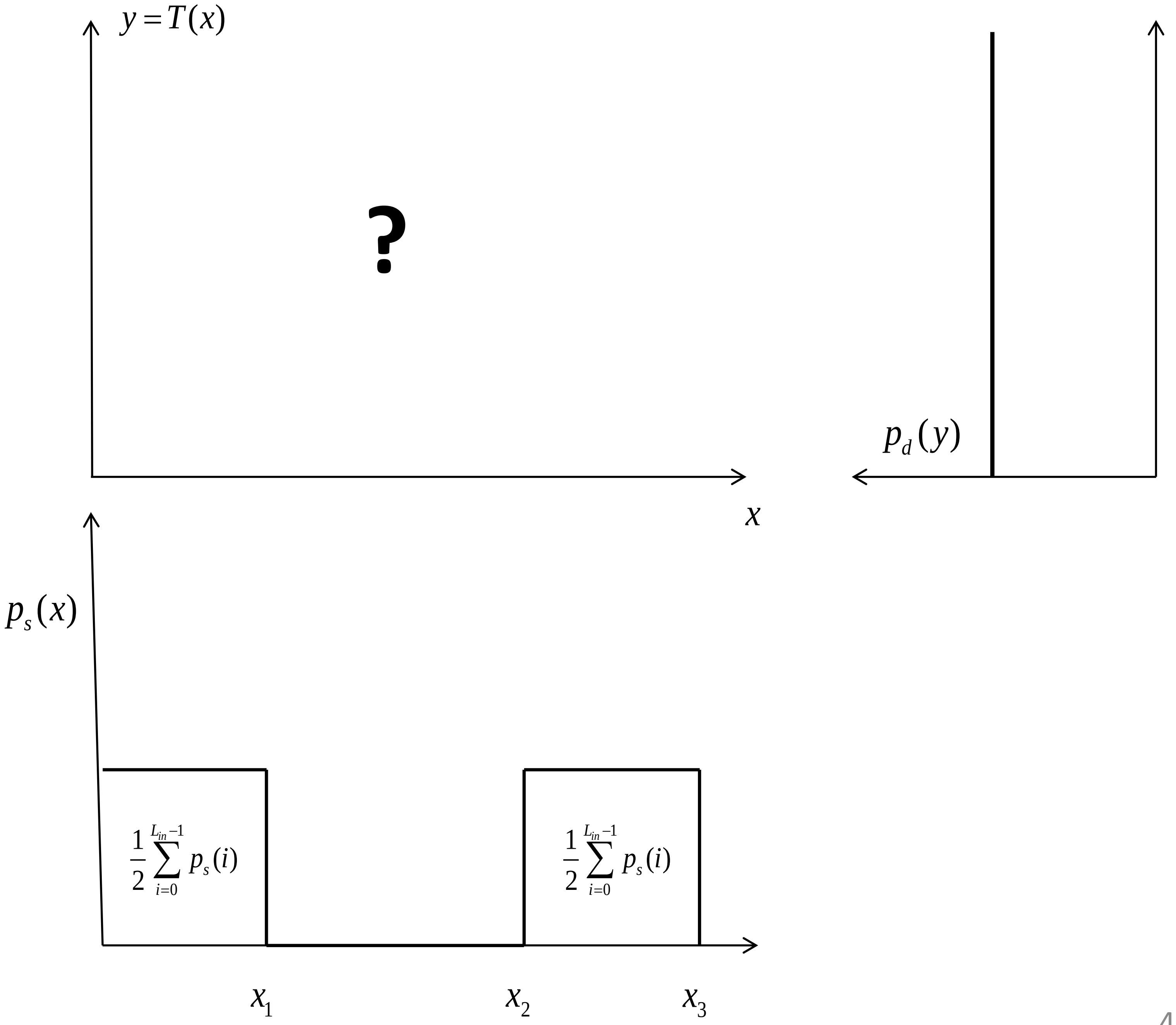
- равномерное распределение

Приведение гистограммы

эквализация

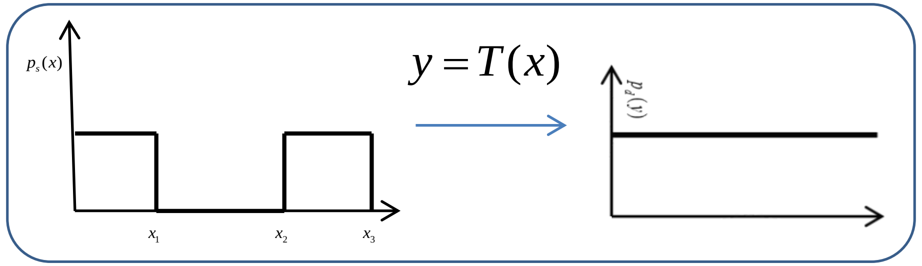


$$p_s(x) = \begin{cases} A_1,\ 0 \le x < x_1, & A_1 = \dfrac{1}{2x_1} \sum\limits_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), \\ 0,\ x_1 \le x < x_2, & \\ A_2,\ x_2 \le x < x_3, & A_2 = \dfrac{1}{2(x_3 - x_2)} \sum\limits_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), \end{cases}$$



Приведение гистограммы

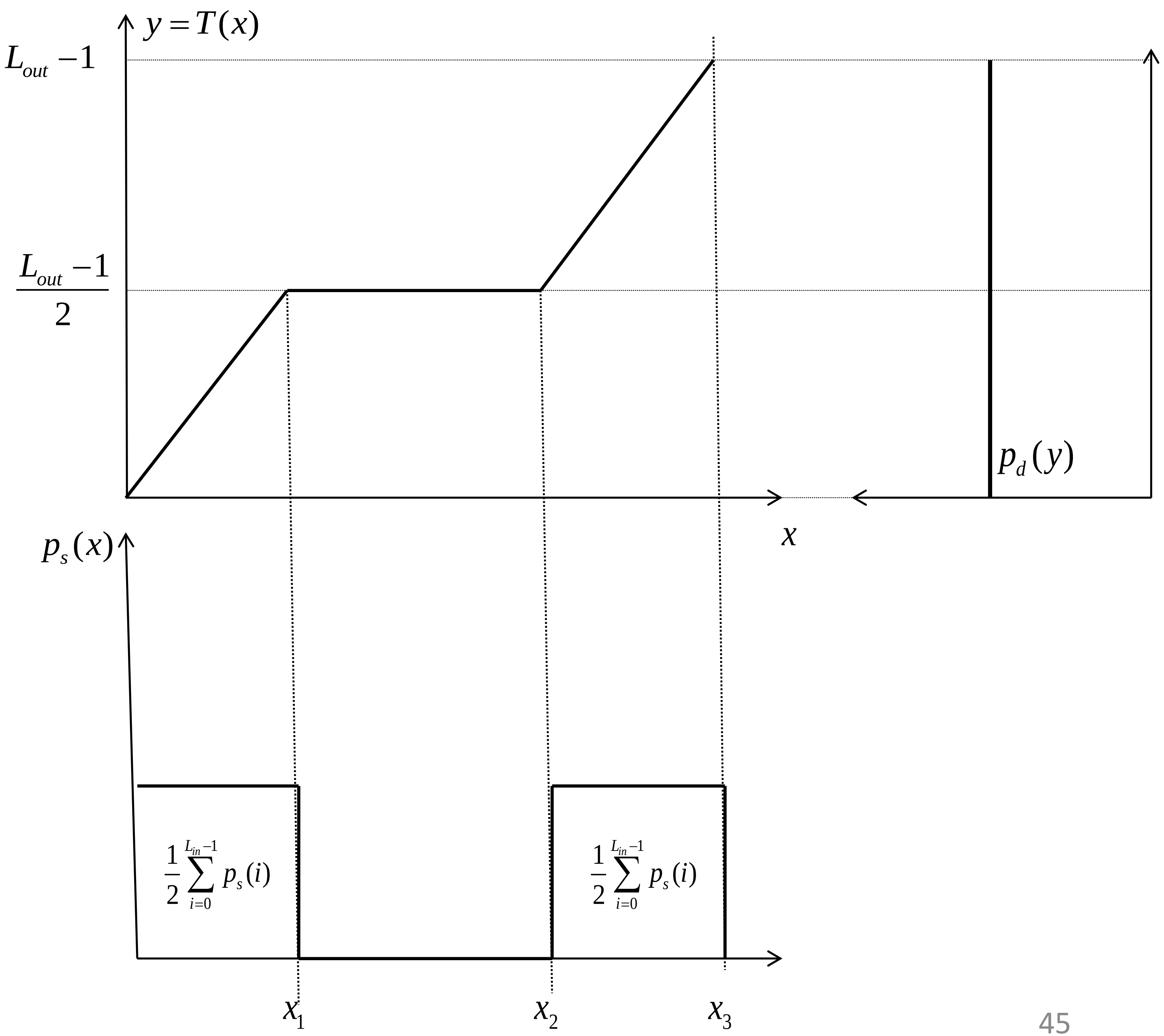
эквализация



$$p_s(x) = \begin{cases} A_1,\ 0 \le x < x_1, \quad A_1 = \dfrac{1}{2x_1}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), \\ 0,\ x_1 \le x < x_2, \\ A_2,\ x_2 \le x < x_3,\ A_2 = \dfrac{1}{2(x_3 - x_2)}\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i), \end{cases}$$

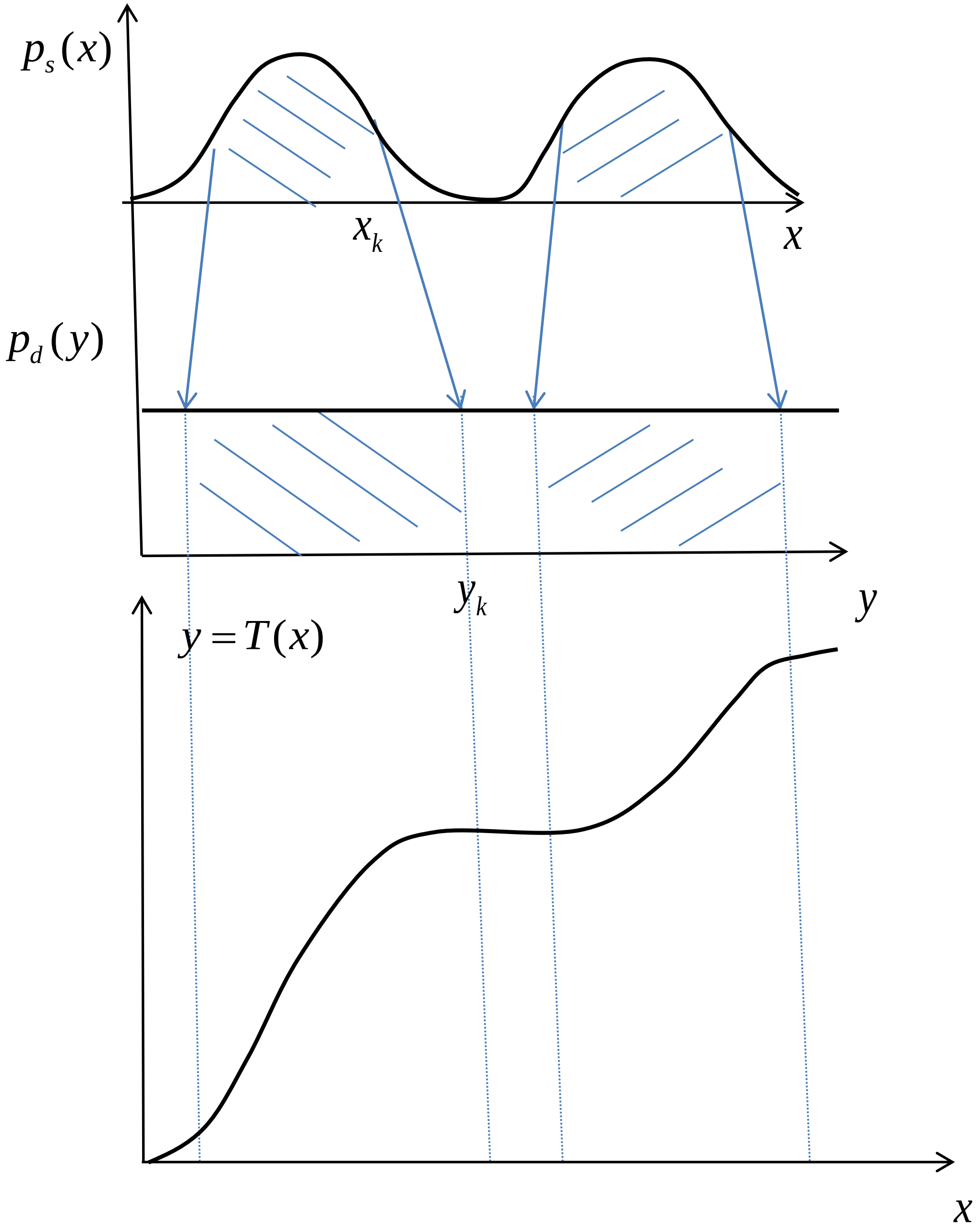
$$y = T(x) = \frac{L_{out}-1}{\sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)} \sum_{i=0}^{x} p_s(i) = \begin{cases} \dfrac{L_{out}-1}{2x_1} x, & 0 \le x < x_1 \\ \dfrac{L_{out}-1}{2}, & x_1 \le x < x_2 \\ \dfrac{L_{out}-1}{2} + \dfrac{L_{out}-1}{2(x_3 - x_2)}(x - x_2), & x_2 \le x < x_3 \end{cases}$$

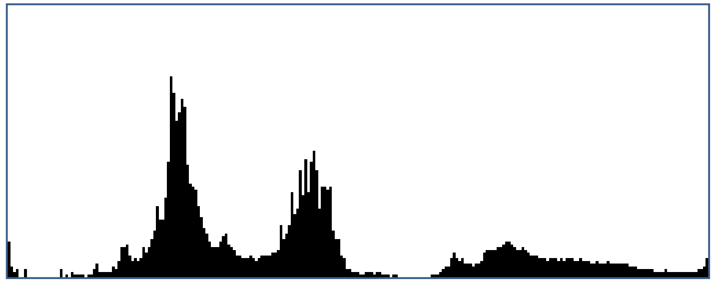
$$p_d(y) = \frac{1}{(L_{out}-1)} \sum_{i=0}^{L_{in}-1} p_s(i)$$



Приведение гистограммы

эквализация





Приведение гистограммы

эквализация

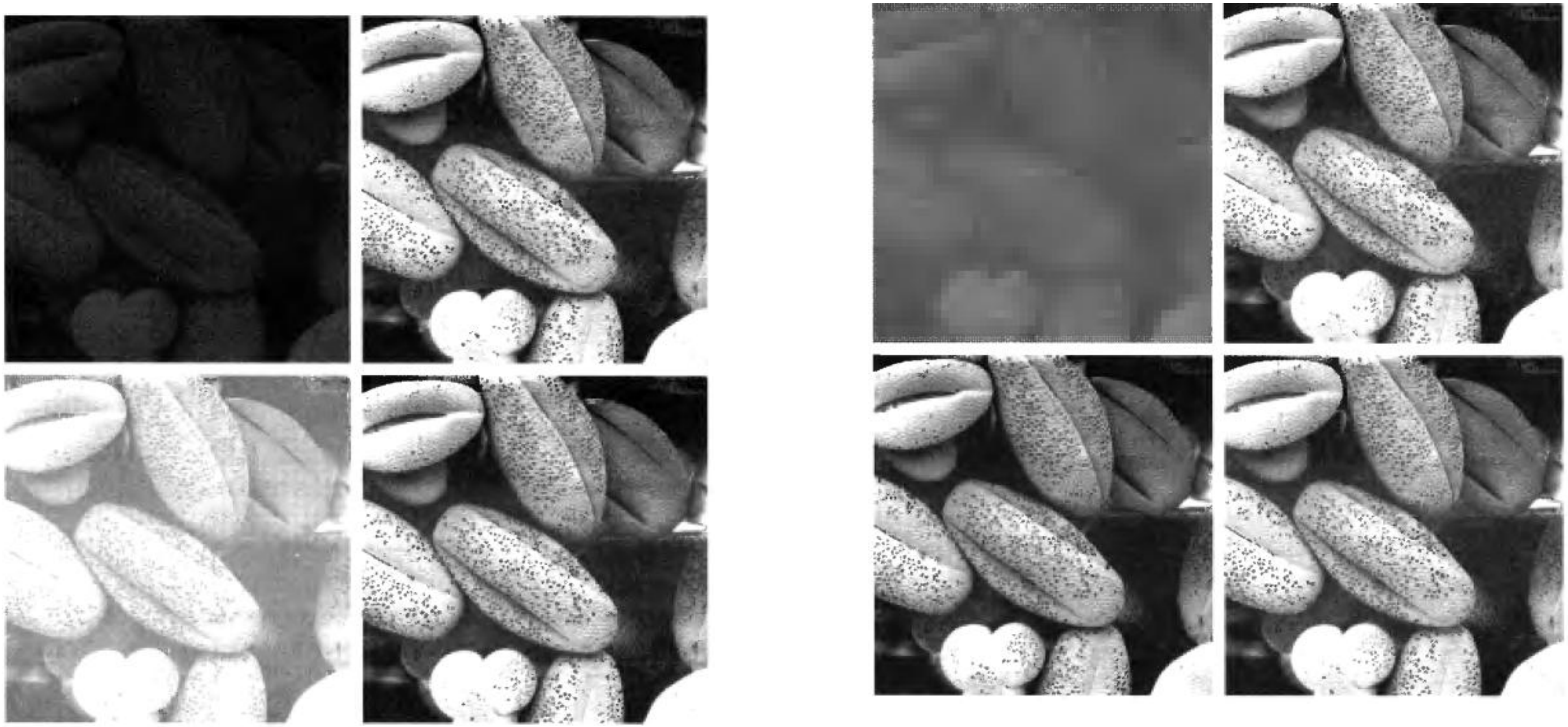


Рис. (а) Изображения из рисунка 3.15. (б) Результаты эквализации гистограммы.

Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

Приведение гистограммы

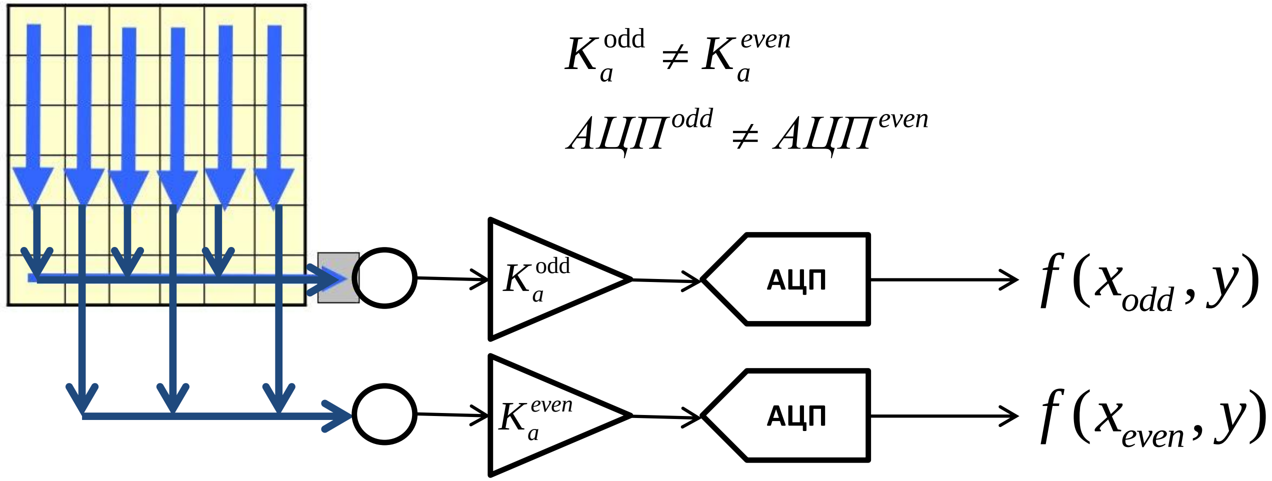
Коррекция искажений

$$f(x_{even}, y) = T(f(x_{odd}, y)): \quad p(f(x_{odd}, y)) \to p(f(x_{even}, y))$$

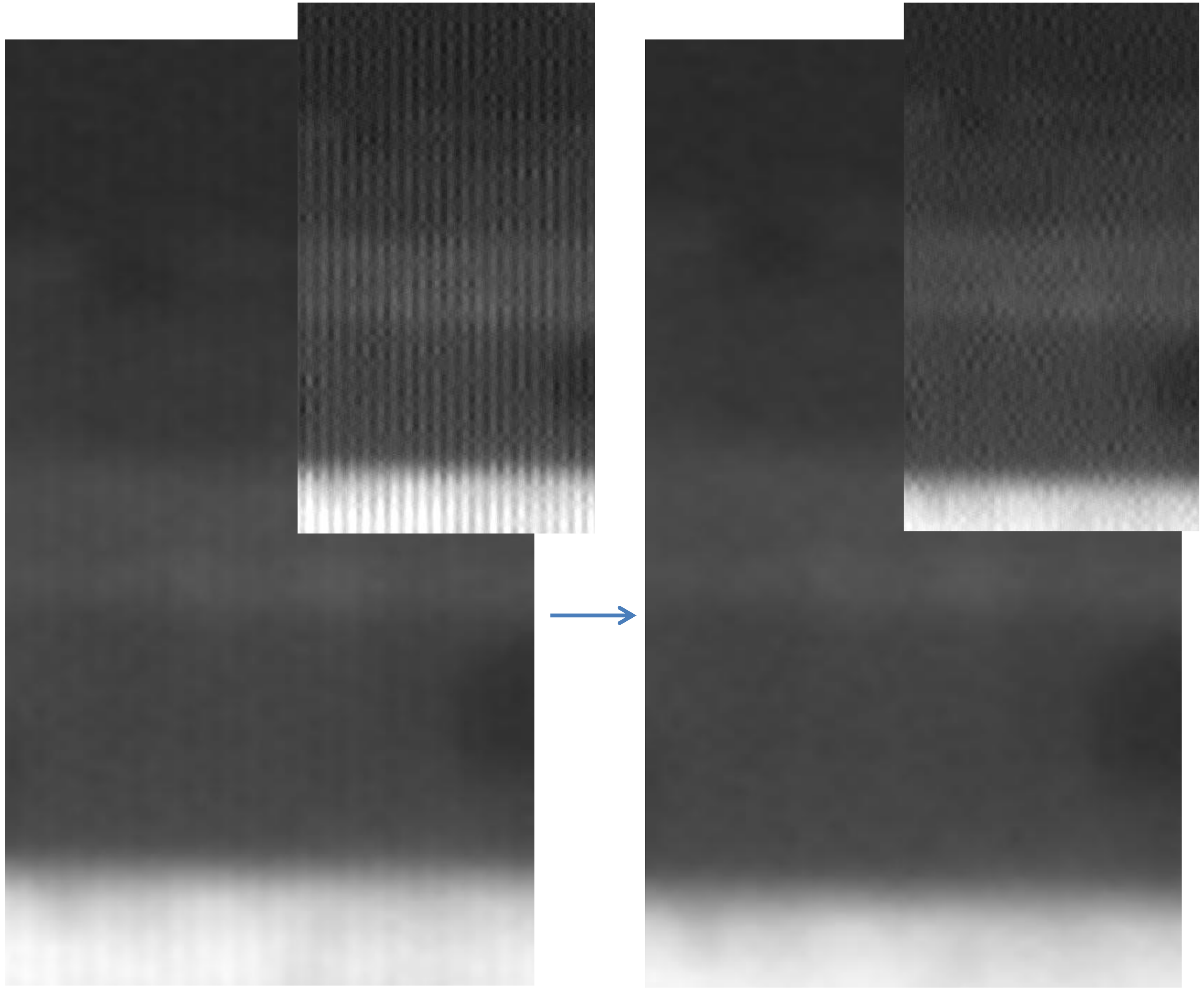
ПЗС сенсор

$$K_a^{odd} \neq K_a^{even}$$

$$АЦП^{odd} \neq АЦП^{even}$$



Искажения вследствие различия параметров элементной базы обработки четных и нечетных столбцов

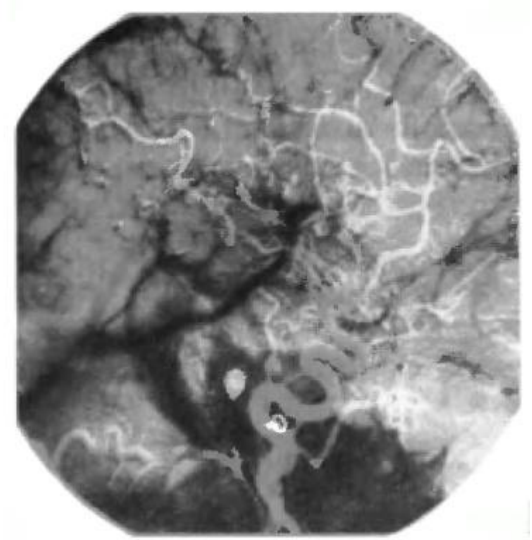


приведение гистограммы яркости нечетных столбцов к гистограмме яркости четных столбцов

Арифметические операции с изображением

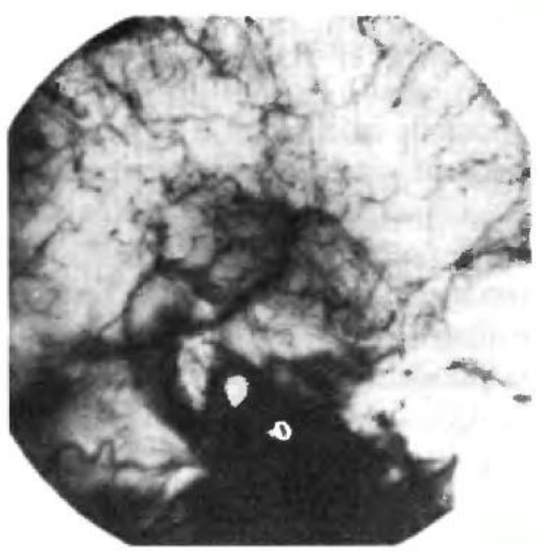
Вычитание

Пример:



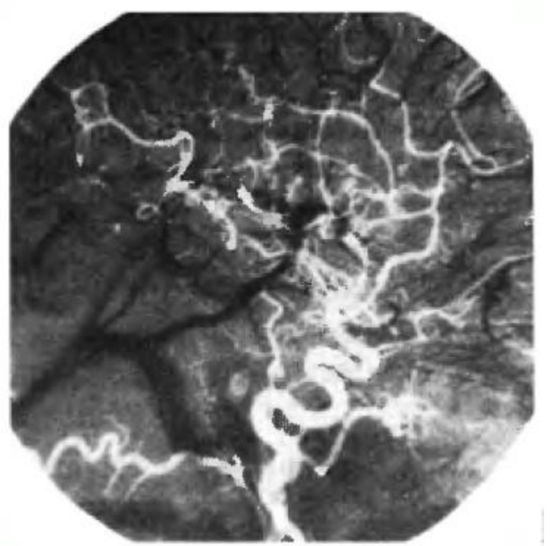
Наблюдаемое изображение (ренген с контрастным веществом)

$g(x, y)$



Фоновое изображение печени (опорное)

$f(x, y)$



Оцениваемое изображение сосудов

$h(x, y)$

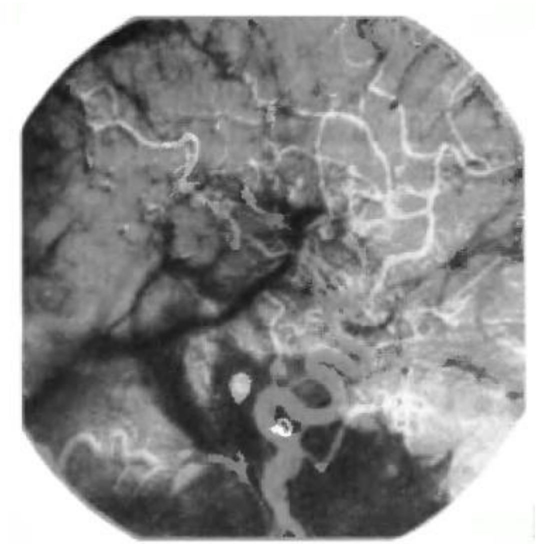
Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) + k \cdot \boxed{h(x, y)}$ ← оценить

Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

Арифметические операции с изображением

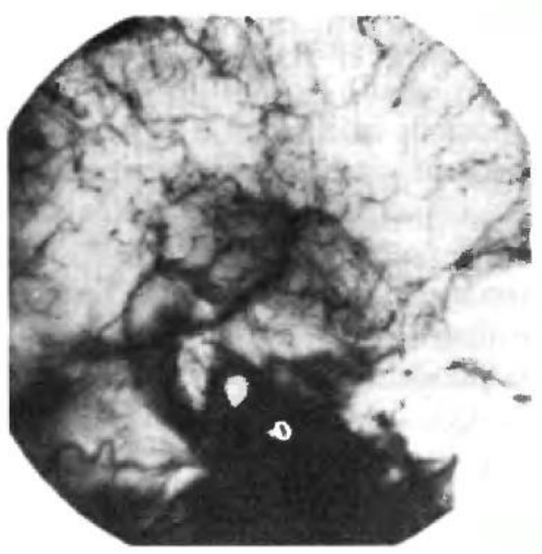
Вычитание

Пример:



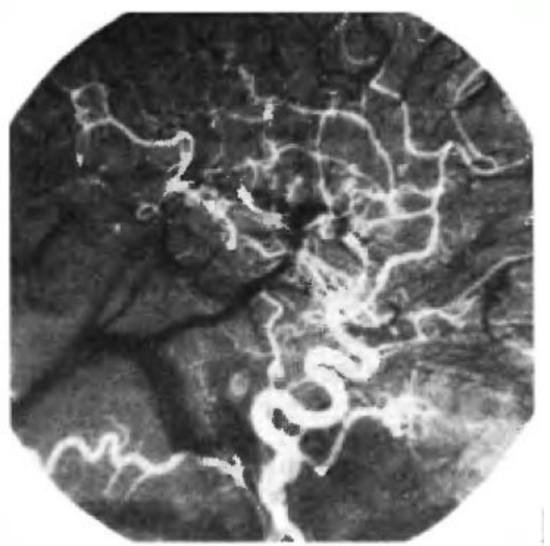
Наблюдаемое изображение (ренген с контрастным веществом)

$g(x,y)$



Фоновое изображение печени (опорное)

$f(x,y)$



Оцениваемое изображение сосудов

$h(x,y)$

Модель наблюдения: $g(x,y) = f(x,y) + k \cdot \boxed{h(x,y)} \leftarrow$ оценить

$$\boxed{h(x,y) \approx \frac{1}{k}(g(x,y) - f(x,y))} \longrightarrow \begin{array}{l} h_{\min} \approx \min\limits_{x,y}(g(x,y) - f(x,y)) \\ h_{\max} \approx \max\limits_{x,y}(g(x,y) - f(x,y)) \end{array} \longrightarrow h(x,y) \approx \frac{255}{(h_{\max} - h_{\min})}(g(x,y) - f(x,y) - h_{\min})$$

Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

Арифметические операции с изображением

Линейное наложение, альфа-блендинг

$$g(x,y) = a \cdot f(x,y) + (1-a) \cdot h(x,y), \quad 0 \le a \le 1$$ - коэффициент прозрачности, вес изображения

$a = a(x,y)$ - альфа канал

$$g(x,y) = a(x,y) \cdot f(x,y) + (1-a(x,y)) \cdot h(x,y), \quad a(x,y) = \{0,1\}$$ - бинарная маска

Для 8 битного альфа-канала

$$g(x,y) = (a(x,y) \cdot f(x,y) + (255-a(x,y)) \cdot h(x,y)) / 255, \quad a(x,y) = \{0,255\}$$

Арифметические операции с изображением

Линейное наложение, альфа-блендинг

$g(x,y) = a \cdot f(x,y) + (1-a) \cdot h(x,y), \quad 0 \le a \le 1$ - коэффициент прозрачности, вес изображения

$a = a(x,y)$ - альфа канал

$g(x,y) = a(x,y) \cdot f(x,y) + (1 - a(x,y)) \cdot h(x,y), \quad a(x,y) = \{0,1\}$ - бинарная маска

Для 8 битного альфа-канала

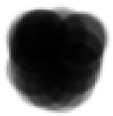
$g(x,y) = (a(x,y) \cdot f(x,y) + (255 - a(x,y)) \cdot h(x,y)) / 255, \quad a(x,y) = \{0,255\}$

Маскирование для задания ROI (Region Of Interest):

$g(x,y) =$

$f(x,y)$

$\times$

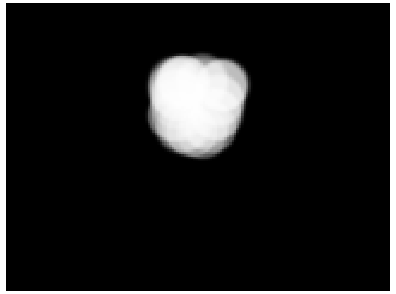


$a(x,y)$

$+$

$h(x,y)$

$\times$



$1 - a(x,y)$

$=$

$g(x,y)$

Арифметические операции с изображением

Усреднение

Модель наблюдения

$g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y), \quad \eta(x,y) = N(0,\sigma_\eta)$ - Нормальный шум, некоррелированный с $f(x,y)$

Пусть $g_i(x,y)$ - реализация наблюдения, i - номер наблюдения:

$$g_i(x,y) = f(x,y) + \eta_i(x,y)$$

Метод накопления:

$$\tilde{g}(x,y) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\eta_i(x,y)$$

При $K \to \infty, \ \tilde{g}(x,y) \to f(x,y)$

$$M\{\tilde{g}(x,y)\} = M\left\{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y)\right\} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} M\{g_i(x,y)\} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\Big[M\{f(x,y)\} + M\{\eta_i(x,y)\}\Big] = f(x,y)$$

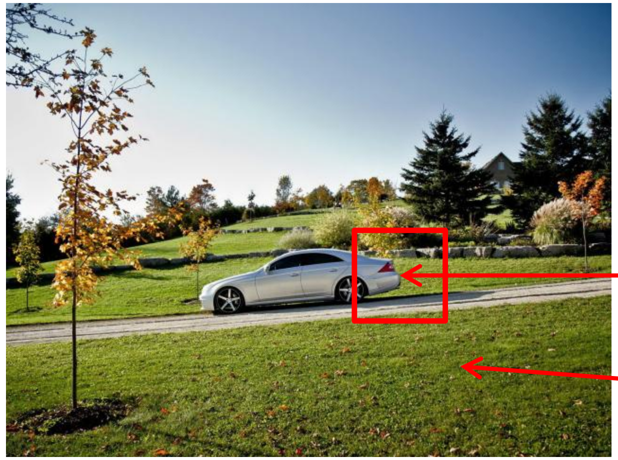
$$D\{\tilde{g}(x,y)\} = D\left\{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y)\right\} = \frac{1}{K^2}\sum_{i=1}^{K} D\{g_i(x,y)\} = \frac{K\sigma_\eta^2}{K^2} = \frac{\sigma_\eta^2}{K} \qquad \Rightarrow \sigma_{\tilde{g}} = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{K}}$$

- при увеличении К отклонение оценки уменьшается

Арифметические операции с изображением

Оценка фона

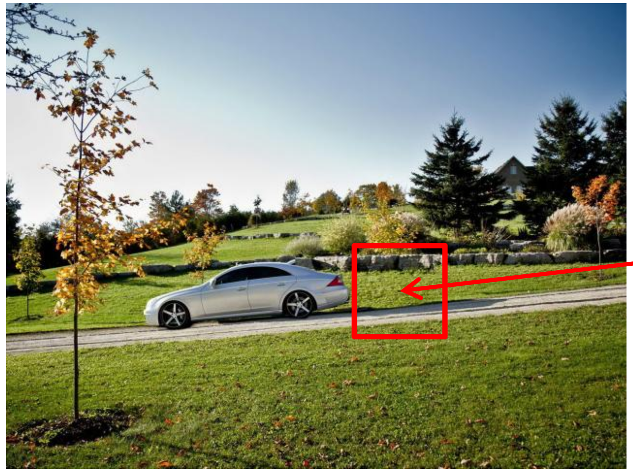
$g(x,y,t)$ $\quad t=t_i$



$h(x_i,y_i,t_i)$

$f(x,y)$

$t=t_i+\Delta t_i$



$h(x_i,y_i,t_i+\Delta t_i)$

Модель наблюдения: $g(x,y,t)=\underbrace{f(x,y)}_{\text{фон}}+\underbrace{h(x,y,t)}_{\text{поле подвижных объектов}}$

Подвижный объект находится в точке (x,y) в течении времени Δt_i :

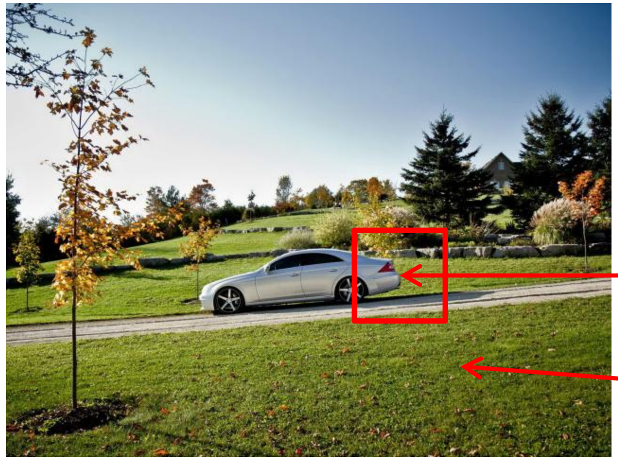
$$h(x,y,t)=\begin{cases} h(x,y,t), & t_i<t<t_i+\Delta t_i, \quad i=\overline{1,I-1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

индекс события: нахождение объекта

Арифметические операции с изображением

Оценка фона

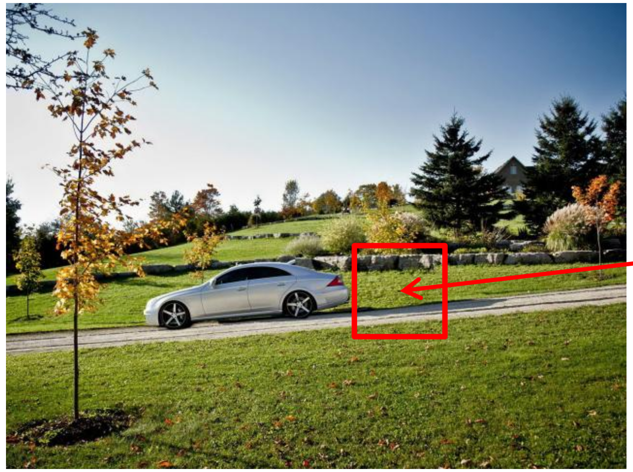
$g(x,y,t)$ $\qquad t = t_i$



$h(x_i, y_i, t_i)$

$f(x,y)$

$t = t_i + \Delta t_i$



$h(x_i, y_i, t_i + \Delta t_i)$

фон $\qquad$ поле подвижных объектов

Модель наблюдения: $g(x,y,t) = f(x,y) + h(x,y,t)$

Подвижный объект находится в точке (x,y) в течении времени Δt_i :

$$h(x,y,t) = \begin{cases} h(x,y,t), & t_i < t < t_i + \Delta t_i, \quad i = \overline{1, I-1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

индекс события: нахождение объекта

Усредним наблюдения по истории T :

$$\tilde{g}_t(x,y,t) = \frac{1}{T}\sum_{\tau=t-T}^{t} g_i(x,y,\tau) = f(x,y) + \frac{1}{T}\sum_{\tau=t-T}^{t} h(x,y,\tau) = f(x,y) + \tilde{h}(x,y,t)$$

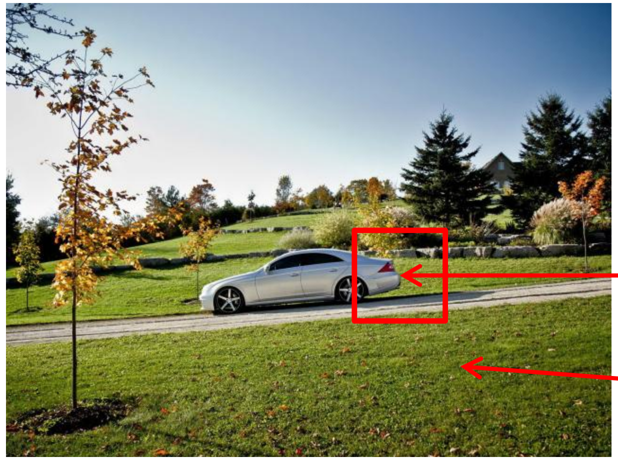
$$\tilde{h}(x,y,t) \le \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{I-1} h_{\max}(x,y,t_i)\Delta t_i \le \frac{\sum_{i=0}^{I-1}\Delta t_i}{T} h_{\max}(x,y) < 1$$

условие малости вклада движения в точке (x,y)

Арифметические операции с изображением

Оценка фона

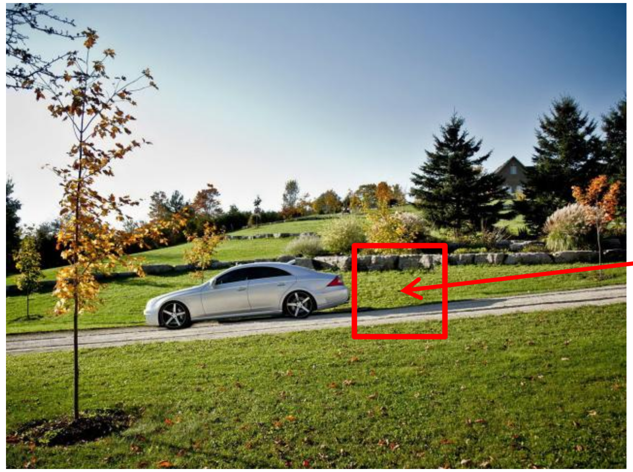
$g(x, y, t)$ $\quad t = t_i$



$h(x_i, y_i, t_i)$

$f(x, y)$

$t = t_i + \Delta t_i$



$h(x_i, y_i, t_i + \Delta t_i)$

фон $\quad$ поле подвижных объектов

Модель наблюдения: $g(x, y, t) = f(x, y) + h(x, y, t)$

Подвижный объект находится в точке (x, y) в течении времени Δt_i :

$$h(x, y, t) = \begin{cases} h(x, y, t), & t_i < t < t_i + \Delta t_i, \quad i = \overline{1, I-1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

индекс события: нахождение объекта

Усредним наблюдения по истории T :

$$\tilde{g}_t(x, y, t) = \frac{1}{T} \sum_{\tau = t-T}^{t} g_i(x, y, \tau) = f(x, y) + \frac{1}{T} \sum_{\tau = t-T}^{t} h(x, y, \tau) = f(x, y) + \tilde{h}(x, y, t)$$

$$\tilde{h}(x, y, t) \le \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{I-1} h_{\max}(x, y, t_i) \Delta t_i \le \frac{\sum_{i=0}^{I-1} \Delta t_i}{T} h_{\max}(x, y) < 1$$

условие малости вклада движения в точке (x, y)

Условие выполняется при: $\boxed{\frac{\sum_{i=0}^{I-1} \Delta t_i}{T}} < \frac{1}{h_{\max}(x, y)} \le \frac{1}{255}, \quad \sum_{i=0}^{I-1} \Delta t_i \le \frac{T}{255}$

доля времени нахождения подвижных объектов в точке (x, y)

Оценка фона для времени t : $f(x, y) \sim \tilde{g}_t(x, y, t) = \frac{1}{T} \sum_{\tau = t-T}^{t} g_i(x, y, \tau)$

Оценка поля движения: $h(x, y, t) = g(x, y, t) - f(x, y) \sim g(x, y, t) - \boxed{\frac{1}{T} \sum_{\tau = t-T}^{t} g_i(x, y, \tau)}$

Модель фона

Арифметические операции с изображением

Адаптивная временная фильтрация

Модель наблюдения для каждой точки (x, y, t) с памятью T: $g(x,y,t) = f(x,y,t) + h(x,y,t)$

Адаптивная модель фона в пределах T: $f(x,y,t) = \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau) \Rightarrow \boxed{h(x,y,t) = g(x,y,t) - \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau)}$

Коэффициенты $a(t,\tau)$ находятся из условия минимума ошибки по всем точкам изображения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_y \sum_x h^2(x,y,t) \to \min_{a(t,\tau)}$$

Ким. А.К., Колеса А.Е., Лагуткин В.Н., Лотоцкий А.В., Репин В.Г. Алгоритмы подавления нестационарного мешающего фона в сенсорах с неточно известной и меняющейся во времени системой координат // Радиотехника, 1998, Вып.12.С39.

Арифметические операции с изображением

Адаптивная временная фильтрация

Модель наблюдения для каждой точки (x, y, t) с памятью T: $g(x,y,t) = f(x,y,t) + h(x,y,t)$

Адаптивная модель фона в пределах T: $f(x,y,t) = \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau) \Rightarrow \boxed{h(x,y,t) = g(x,y,t) - \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau)}$

Коэффициенты $a(t,\tau)$ находятся из условия минимума ошибки по всем точкам изображения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_y \sum_x h^2(x,y,t) \to \min_{a(t,\tau)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{a(t,\tau)}\left[\frac{1}{N}\sum_y \sum_x \left(g(x,y,t) - \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau)\right)^2\right] = -\frac{2}{N}\sum_y \sum_x g(x,y,\tau)\left(g(x,y,t) - \sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta) g(x,y,\theta)\right) =$$

$$= -\frac{2}{N}\sum_y \sum_x g(x,y,\tau) g(x,y,t) + \frac{2}{N}\sum_y \sum_x \sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta) g(x,y,\tau) g(x,y,\theta) = -\frac{2}{N}\sum_y \sum_x g(x,y,\tau) g(x,y,t) + \frac{2}{N}\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta) \sum_y \sum_x g(x,y,\tau) g(x,y,\theta) = 0$$

Задача оптимизации сводится к системе уравнений:

$$\boxed{\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} R(\tau,\theta) a(t,\theta) = R(t,\tau),} \quad \tau \in (t-T+1, t-1), \quad \text{где} \quad R(\tau,\theta) = R(\theta,\tau) = \frac{1}{N}\sum_x \sum_y g(x,y,\theta) g(x,y,\tau)$$ - автокорреляционная функция

Ким. А.К., Колеса А.Е., Лагуткин В.Н., Лотоцкий А.В., Репин В.Г. Алгоритмы подавления нестационарного мешающего фона в сенсорах с неточно известной и меняющейся во времени системой координат // Радиотехника, 1998, Вып.12.С39.

Арифметические операции с изображением

Адаптивная временная фильтрация

Модель наблюдения для каждой точки (x, y, t) с памятью T: $g(x,y,t) = f(x,y,t) + h(x,y,t)$

Адаптивная модель фона в пределах T: $f(x,y,t) = \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau) \Rightarrow \boxed{h(x,y,t) = g(x,y,t) - \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau) g(x,y,\tau)}$

Коэффициенты $a(t,\tau)$ находятся из условия минимума ошибки по всем точкам изображения:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_y \sum_x h^2(x,y,t) \to \min_{a(t,\tau)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{a(t,\tau)}\left[\frac{1}{N}\sum_y\sum_x\left(g(x,y,t) - \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1} a(t,\tau)g(x,y,\tau)\right)^2\right] = -\frac{2}{N}\sum_y\sum_x g(x,y,\tau)\left(g(x,y,t) - \sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta) g(x,y,\theta)\right) =$$

$$= -\frac{2}{N}\sum_y\sum_x g(x,y,\tau)g(x,y,t) + \frac{2}{N}\sum_y\sum_x\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta)g(x,y,\tau)g(x,y,\theta) = -\frac{2}{N}\sum_y\sum_x g(x,y,\tau)g(x,y,t) + \frac{2}{N}\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} a(t,\theta)\sum_y\sum_x g(x,y,\tau)g(x,y,\theta) = 0$$

Задача оптимизации сводится к системе уравнений:

$$\boxed{\sum_{\theta=t-T+1}^{t-1} R(\tau,\theta)a(t,\theta) = R(t,\tau),} \quad \tau \in (t-T+1, t-1), \quad \text{где} \quad R(\tau,\theta) = R(\theta,\tau) = \frac{1}{N}\sum_x\sum_y g(x,y,\theta)g(x,y,\tau)$$ - автокорреляционная функция

В матричном виде для момента времени t:

$$\boxed{\mathbf{R}\mathbf{a}_t = \mathbf{r}_t} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a}_t = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_t,} \qquad \Rightarrow f(x,y,t) = \sum_{\tau=t-T+1}^{t-1}\left[\mathbf{R}^{-1}\langle g(t), g(\tau)\rangle\right]_{t,\tau} g(x,y,\tau)$$

где $\left[\mathbf{R}_{\theta,\tau}\right] = \frac{1}{N}\sum_x\sum_y g(x,y,\theta)g(x,y,\tau) = \langle g(\theta), g(\tau)\rangle$, $\left[\mathbf{r}_\tau\right] = \frac{1}{N}\sum_x\sum_y g(x,y,\tau)g(x,y,t) = \langle g(\tau), g(t)\rangle$, $\left[\mathbf{a}_\theta\right] = a(t,\theta)$.

Ким. А.К., Колеса А.Е., Лагуткин В.Н., Лотоцкий А.В., Репин В.Г. Алгоритмы подавления нестационарного мешающего фона в сенсорах с неточно известной и меняющейся во времени системой координат // Радиотехника, 1998, Вып.12.С39.