MIPT

ВЦ РАН

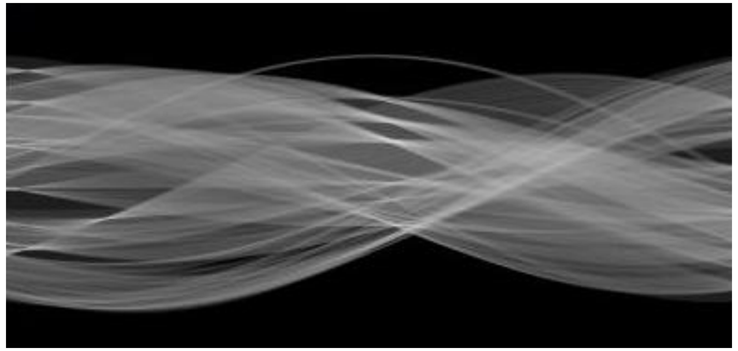
Федеральный исследовательский центр
Информатика и Управление
Российской академии наук

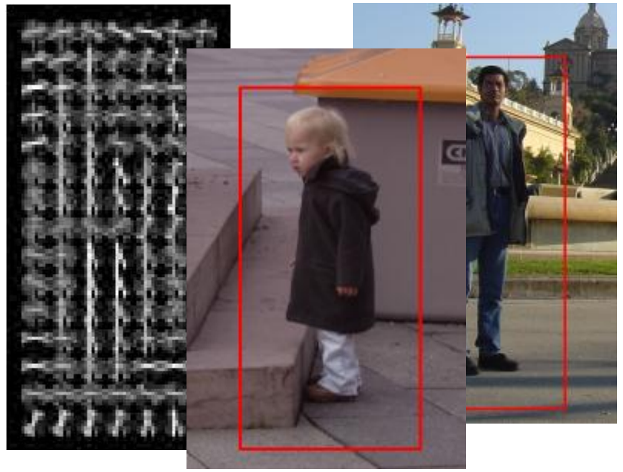
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

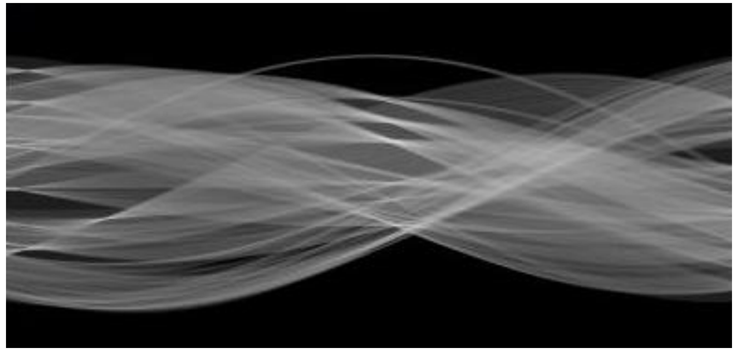


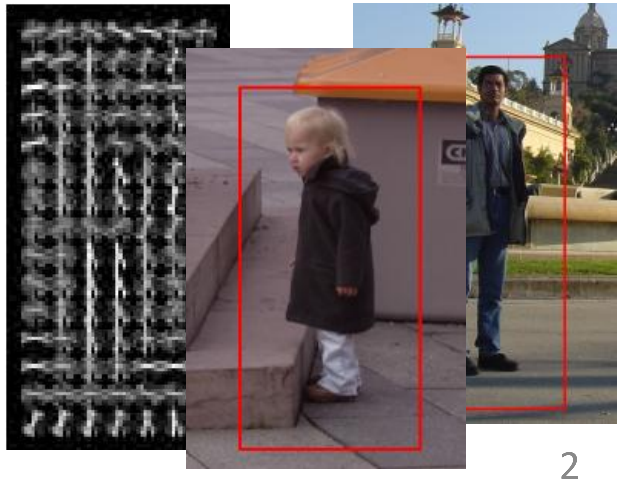


Нестационарные модели изображения

Тема 12

20.03.2026





Многомасштабный анализ

Изображения разного разрешения, содержащие один и тот же объект разного размера (масштаба)

Одни и те же элементы разного масштаба на разных изображениях будут иметь разный вклад в представление.
Преобразование Фурье для $\mathbf{f}(x) \in L^2(0, 2\pi)$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\varphi}_k^*(x) dx$$

Целочисленное растяжение базисной функции реализует многомасштабный анализ:

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \boldsymbol{\varphi}(kx), \ \boldsymbol{\varphi}(x) = \exp(jx), \quad k = 1, 2, ..$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \boldsymbol{\varphi}(kx)$$

- “суперпозиция” целочисленных растяжений базисной функции.

Многомасштабный анализ

Изображения разного разрешения, содержащие один и тот же объект разного размера (масштаба)

Одни и те же элементы разного масштаба на разных изображениях будут иметь разный вклад в представление.

Преобразование Фурье для $\mathbf{f}(x) \in L^2(0, 2\pi)$:

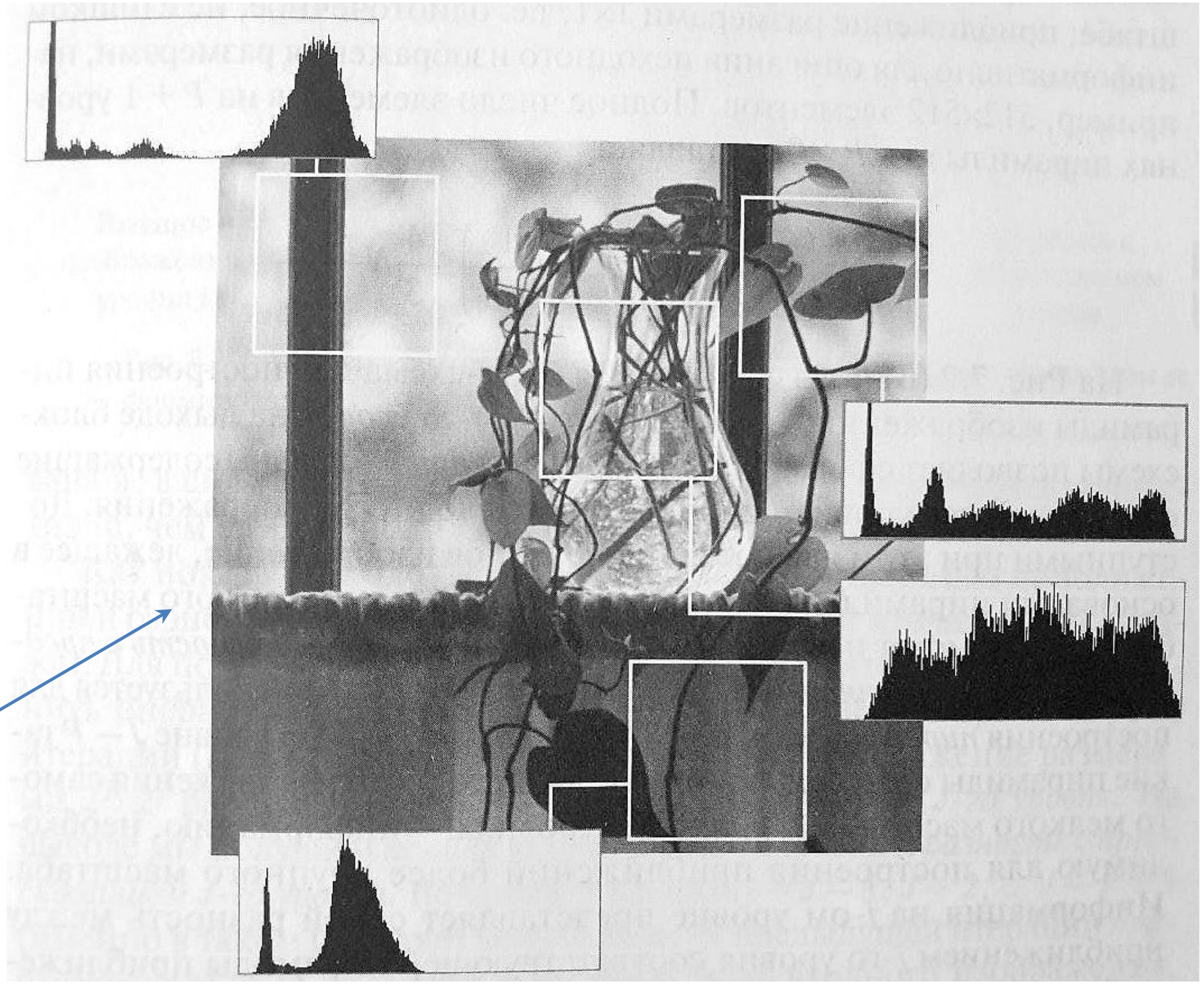
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\varphi}_k^*(x) dx$$

Целочисленное растяжение базисной функции реализует многомасштабный анализ:

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \boldsymbol{\varphi}(kx), \ \boldsymbol{\varphi}(x) = \exp(jx), \quad k = 1, 2, ..$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \boldsymbol{\varphi}(kx)$$ - “суперпозиция” целочисленных растяжений базисной функции.

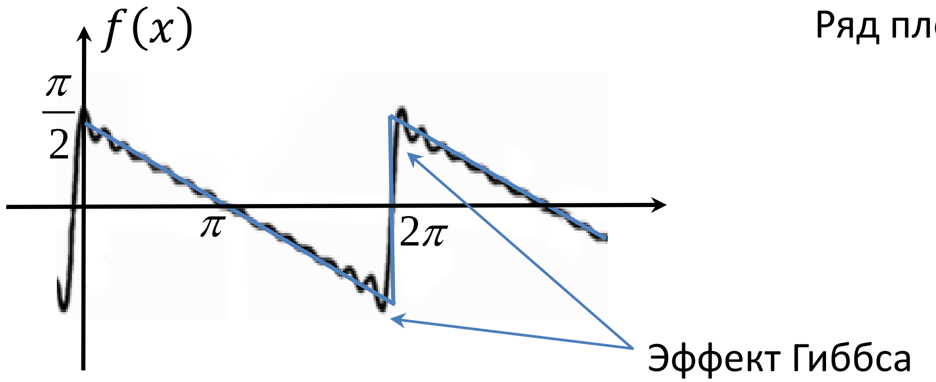
Статистики яркости существенно меняются при переходе от одной части изображения к другой, что мешает применение к изображению одной статистической модели, реализация яркостного случайного процесса **нестационарная**. Локальное отклонение от стационарной модели яркости влияет (увеличивает ошибку) на остальные части представления, т.к. базисные функции $\boldsymbol{\varphi}(kx)$ покрывают всю область определения функции $\mathbf{f}(x)$.



Локально–стационарный анализ.

Разрывная функция:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x<2\pi\\ 0, & x=0\\ \mathrm{f}(x+2\pi), & \forall x\end{cases}$$



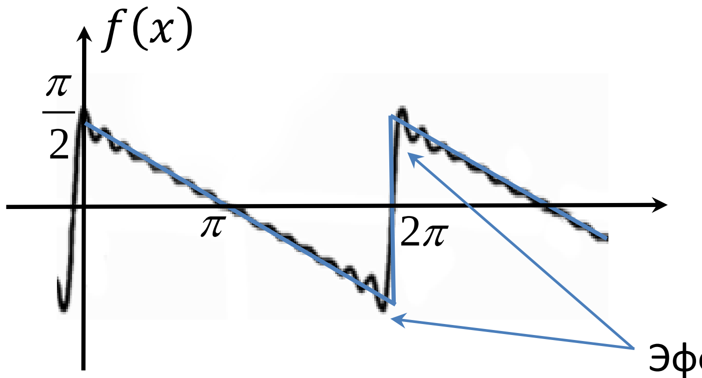
Ряд плохо сходится, медленно убывает при $k \to \infty$:

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(kx)$$

Локально–стационарный анализ.

Разрывная функция:

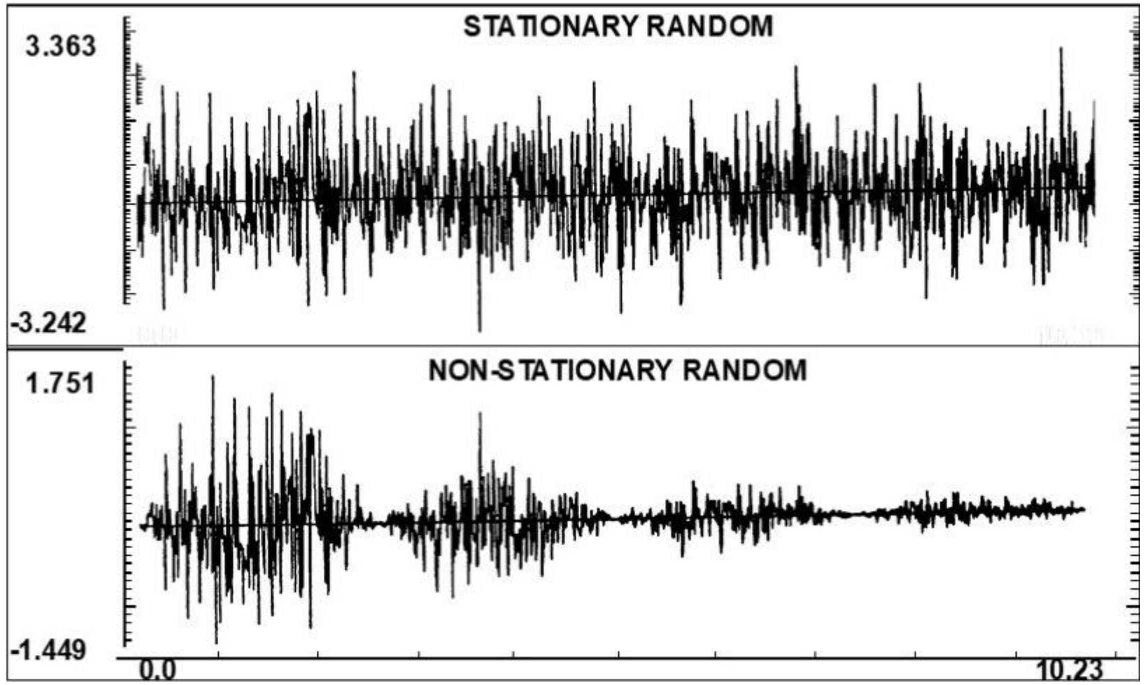
$$
f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x<2\pi\\ 0, & x=0\\ f(x+2\pi), & \forall x\end{cases}
$$



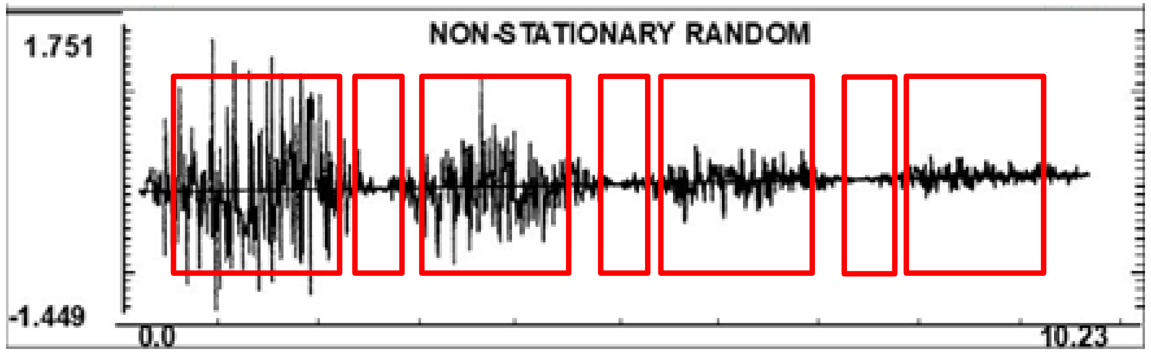
Ряд плохо сходится, медленно убывает при $k \to \infty$:

$$
f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(kx)
$$

Нестационарный сигнал:



Для локализации сигнала введем функцию окна.
В пределах окна предполагаем локально-стационарное поведение сигнала.



Локально–стационарный анализ. Оконное Преобразование Фурье.

Определение. Функция $g(x) \neq 0,\ g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ - функция-окно если $\boxed{xg(x) \in L^2(\mathbb{R})}$

Центр окна: $x^* = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x|g(x)|^2\,dx,$ Радиус окна: $\Delta_g = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2} \left\{ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - x^*)^2 |g(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}},$ Ширина окна: $2\Delta_g$

Пусть: $\|g(x)\|_2^2 = \langle g(x), g(x) \rangle,\ \langle f(x), g(x) \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\,dx,\quad f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$

Локально–стационарный анализ. Оконное Преобразование Фурье.

Определение. Функция $g(x) \neq 0,\ g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ - функция-окно если $\boxed{xg(x) \in L^2(\mathbb{R})}$

Центр окна: $x^* = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x|g(x)|^2\,dx,$ Радиус окна: $\Delta_g = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x^*)^2 |g(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}},$ Ширина окна: $2\Delta_g$

Пусть: $\|g(x)\|_2^2 = \langle g(x), g(x) \rangle,\ \langle f(x), g(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\,dx,\quad f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$

Тогда Оконное Преобразование Фурье (ОПФ):

$$\boxed{\mathscr{F}_g\{f\}(\omega, b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)}\,\mathrm{e}^{-j\omega x}dx}$$

При $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x-b)}\,db = 1 \longleftarrow$ $g(x)$ - покрывает всю область определения x.

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_g\{f\}(\omega, b)\,db = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)}\,\mathrm{e}^{-j\omega x}dx\,db = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x-b)}\,db\ \mathrm{e}^{-j\omega x}\,dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\,dx}_{\hat{f}(\omega)} = f(\omega)$$

Окно $g(x)$ точно разбивает $\hat{f}(\omega)$ и дает о ней локальную пространственную информацию.

Локально–стационарный анализ. Оконное Преобразование Фурье.

<u>Определение</u>. Функция $g(x) \neq 0,\ g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ - функция-окно если $\boxed{xg(x) \in L^2(\mathbb{R})}$

Центр окна: $x^* = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x |g(x)|^2 dx,$ Радиус окна: $\Delta_g = \dfrac{1}{\|g(x)\|_2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x^*)^2 |g(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$ Ширина окна: $2\Delta_g$

Пусть: $\|g(x)\|_2^2 = \langle g(x), g(x) \rangle,\ \langle f(x), g(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g}(x) dx,\quad f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$

Тогда Оконное Преобразование Фурье (ОПФ):

$$\boxed{\mathscr{F}_g\{f\}(\omega, b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-b)} e^{-j\omega x} dx}$$

При $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x-b)} db = 1$ ← $g(x)$ - покрывает всю область определения x.

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_g\{f\}(\omega, b) db = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-b)} e^{-j\omega x} dx db = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x-b)} db\, e^{-j\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = \hat{f}(\omega)$$

Окно $g(x)$ точно разбивает $\hat{f}(\omega)$ и дает о ней локальную пространственную информацию.

Выбором функции окна $g(x)$ определяется будет ли оно точно локализовывать спектральную информацию.

Например, локальные функции являются функциями-окна:

$$N_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{в других точках} \end{cases}$$

$$\psi_1(t) = \psi_H(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{для } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{в других точках,} \end{cases}$$

Но их преобразования Фурье не удовлетворяет: $xg(x) \in L^2(\mathbb{R})$

Значит они не могут быть использованы для пространственно-частотной локализации сигнала.

Оконное Преобразование Фурье. Выбор окна.

Положим:

$$\mathscr{F}_g\{f\}(\omega,b)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)}\mathrm{e}^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{G_{b,\omega}(x)}dx=\left\langle f(x),G_{b,\omega}(x)\right\rangle$$ ← проекция на окно

где $G_{b,\omega}(x)=g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}$

ОПФ дает локальную информацию в пространственном окне: $[b+x^*-\Delta_g, b+x^*+\Delta_g]$

Пусть $\hat{g}(\omega)$ - функция окна: $\omega g(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow V_{b,\omega}(\eta)=\frac{1}{2\pi}G_{b,\omega}(\eta)=\frac{e^{ib\omega}}{2\pi}e^{-ib\eta}g(\eta-\omega)$$ - функция окна:

Равенство Парсеваля: $\mathscr{F}_g\{f\}(\omega,b)=\left\langle f(x),G_{b,\omega}(x)\right\rangle=\left\langle f(\omega),V_{b,\omega}(\omega)\right\rangle$

ОПФ дает локальную спектральную информацию в частотном окне: $[\omega+\omega^*-\Delta_{\hat{g}}, \omega+\omega^*+\Delta_{\hat{g}}]$

Оконное Преобразование Фурье. Выбор окна.

Положим:

$$\mathcal{F}_g\{f\}(\omega,b)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)}\mathrm{e}^{-j\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{G_{b,\omega}(x)}dx=\langle f(x),G_{b,\omega}(x)\rangle$$ ← проекция на окно

где $G_{b,\omega}(x)=g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}$

ОПФ дает локальную информацию в пространственном окне: $[b+x^*-\Delta_g, b+x^*+\Delta_g]$

Пусть $\hat{g}(\omega)$ - функция окна: $\omega g(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow V_{b,\omega}(\eta)=\frac{1}{2\pi}G_{b,\omega}(\eta)=\frac{e^{ib\omega}}{2\pi}e^{-ib\eta}g(\eta-\omega)$$ - функция окна:

Равенство Парсеваля: $\mathcal{F}_g\{f\}(\omega,b)=\langle f(x),G_{b,\omega}(x)\rangle=\langle f(\omega),V_{b,\omega}(\omega)\rangle$

ОПФ дает локальную спектральную информацию в частотном окне: $[\omega+\omega^*-\Delta_{\hat{g}}, \omega+\omega^*+\Delta_{\hat{g}}]$

Таким образом, выбрав $g(x)$ такую, что оно и ее Фурье преобразование удовлетворяет условию окна, получаем частотно-пространственное окно: $[b+x^*-\Delta_g, b+x^*+\Delta_g]\times[\omega+\omega^*-\Delta_{\hat{g}}, \omega+\omega^*+\Delta_{\hat{g}}]$ с площадью: $4\Delta_g\Delta_{\hat{g}}$.

Определение: Если функция окна выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, то Оконное Преобразование Фурье называется **Кратковременным Преобразованием Фурье** (КВПФ).

Пример: B-сплайн $m\geq 2$ порядка (N кратная свертка B-сплайна первого порядка N_1) определяет КВПФ:

$$N_m(t):=\int_0^1 N_{m-1}(t-x)dx \qquad \hat{N}_m(\omega)=\left(\frac{1-e^{i\omega}}{i\omega}\right)^m=e^{-im\omega/2}\left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^m$$

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же

является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Доказательство: Пусть $\sigma_g^2 = \|g(x)\|_2^2 \Delta_g^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \|xg(x)\|_2^2$, $\sigma_{\hat{g}}^2 = \|\hat{g}(\omega)\|_2^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \|\omega \hat{g}(\omega)\|_2^2$ Сходится, т.к. функция окна

Если $\sigma_g^2 = \infty$ или $\sigma_{\hat{g}}^2 = \infty$, то доказано.

Докажем случай, когда $\sigma_g \sigma_{\hat{g}}$ - конечна.

$$\widehat{g'}(\omega) = -j\omega\hat{g}(\omega) \Rightarrow |\widehat{g'}(\omega)| = \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{g}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g'}(\omega)|^2 \, d\omega \overset{\text{Равенство Парсеваля}}{=} 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 \, dx = 2\pi \|g'(x)\|_2^2$$

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Доказательство: Пусть $\sigma_g^2 = \|g(x)\|_2^2 \Delta_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \|xg(x)\|_2^2$, $\sigma_{\hat{g}}^2 = \|\hat{g}(\omega)\|_2^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \|\omega\hat{g}(\omega)\|_2^2$ ← Сходится, т.к. функция окна

Если $\sigma_g^2 = \infty$ или $\sigma_{\hat{g}}^2 = \infty$, то доказано.

Докажем случай, когда $\sigma_g \sigma_{\hat{g}}$ - конечна.

Равенство Парсеваля

$$\widehat{g}'(\omega) = -j\omega\hat{g}(\omega) \Rightarrow |\widehat{g}'(\omega)| = \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{g}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}'(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx = 2\pi\|g'(x)\|_2^2$$

Докажем *Неравенство Шварца.*

1. Если $\langle g, f \rangle \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \lambda g + f, \lambda g + f \rangle = \lambda^2 \langle g, g \rangle + 2\lambda \langle g, f \rangle + \langle f, f \rangle \quad \Rightarrow D = 4\langle g, f \rangle^2 - 4\langle g, g \rangle \langle f, f \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \|g\|\|f\| \geq |\langle g, f \rangle|$$

2. Если $\mathrm{Im}\langle g, f \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \langle g, f \rangle = re^{i\varphi},\ z = ge^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow \langle z, f \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, f \rangle = r = |\langle g, f \rangle| \in \mathbb{R}, \quad \|z\| = \langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, e^{i\varphi} g \rangle = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} \langle g, g \rangle = \|g\| \quad \Rightarrow \boxed{|\langle g, f \rangle| = |\langle z, f \rangle| \leq \|z\|\|f\| = \|g\|\|f\|}$$

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Доказательство: Пусть $\sigma_g^2 = \|g(x)\|_2^2 \Delta_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \|xg(x)\|_2^2$, $\sigma_{\hat{g}}^2 = \|\hat{g}(\omega)\|_2^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \|\omega \hat{g}(\omega)\|_2^2$ ← Сходится, т.к. функция окна

Если $\sigma_g^2 = \infty$ или $\sigma_{\hat{g}}^2 = \infty$, то доказано.

Докажем случай, когда $\sigma_g \sigma_{\hat{g}}$ - конечна.

$$\widehat{g'}(\omega) = -j\omega\hat{g}(\omega) \Rightarrow |\widehat{g'}(\omega)| = \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{g}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g'}(\omega)|^2 d\omega \overset{\text{Равенство Парсеваля}}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx = 2\pi \|g'(x)\|_2^2$$

Докажем *Неравенство Шварца.*

1. Если $\langle g, f \rangle \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \lambda g + f, \lambda g + f \rangle = \lambda^2 \langle g, g \rangle + 2\lambda \langle g, f \rangle + \langle f, f \rangle \quad \Rightarrow D = 4\langle g, f \rangle^2 - 4\langle g, g \rangle \langle f, f \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \|g\| \|f\| \geq |\langle g, f \rangle|$$

2. Если $\operatorname{Im}\langle g, f \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \langle g, f \rangle = re^{i\varphi}, \ z = ge^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow \langle z, f \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, f \rangle = r = |\langle g, f \rangle| \in \mathbb{R}, \quad \|z\| = \langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, e^{-i\varphi} g \rangle = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} \langle g, g \rangle = \|g\| \quad \Rightarrow \boxed{|\langle g, f \rangle| = |\langle z, f \rangle| \leq \|z\| \|f\| = \|g\| \|f\|}$$

$$\Rightarrow \sigma_g \sigma_{\hat{g}} = \|xg(x)\| \|x\hat{g}(x)\| = \boxed{2\pi \|xg(x)\| \|g'(x)\| \geq 2\pi |\langle xg(x), g'(x) \rangle|}$$ *- неравенство Шварца*

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Доказательство: Пусть $\sigma_g^2 = \|g(x)\|_2^2 \Delta_g^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \|xg(x)\|_2^2$, $\sigma_{\hat{g}}^2 = \|\hat{g}(\omega)\|_2^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \|\omega\hat{g}(\omega)\|_2^2$ ← Сходится, т.к. функция окна

Если $\sigma_g^2 = \infty$ или $\sigma_{\hat{g}}^2 = \infty$, то доказано.

Докажем случай, когда $\sigma_g \sigma_{\hat{g}}$ - конечна.

Равенство Парсеваля

$$\widehat{g'}(\omega) = -j\omega\hat{g}(\omega) \Rightarrow |\widehat{g'}(\omega)| = \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{g}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g'}(\omega)|^2 \, d\omega = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 \, dx = 2\pi \|g'(x)\|_2^2$$

Докажем *Неравенство Шварца.*

1. Если $\langle g, f \rangle \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \lambda g + f, \lambda g + f \rangle = \lambda^2 \langle g, g \rangle + 2\lambda \langle g, f \rangle + \langle f, f \rangle \quad \Rightarrow D = 4\langle g, f \rangle^2 - 4\langle g, g \rangle \langle f, f \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \|g\| \|f\| \geq |\langle g, f \rangle|$$

2. Если $\mathrm{Im}\langle g, f \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \langle g, f \rangle = re^{i\varphi}, \; z = ge^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow \langle z, f \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, f \rangle = r = |\langle g, f \rangle| \in \mathbb{R}, \quad \|z\| = \langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, e^{-i\varphi} g \rangle = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} \langle g, g \rangle = \|g\| \quad \Rightarrow |\langle g, f \rangle| = |\langle z, f \rangle| \leq \|z\| \|f\| = \|g\| \|f\|$$

$$\Rightarrow \sigma_g \sigma_{\hat{g}} = \|xg(x)\| \|x\hat{g}(x)\| = 2\pi \|xg(x)\| \|g'(x)\| \geq 2\pi |\langle xg(x), g'(x) \rangle| \geq \boxed{2\pi |\mathrm{Re}\langle xg(x), g'(x) \rangle| = 2\pi \left| \frac{1}{2} \left(\langle xg(x), g'(x) \rangle + \langle g'(x), xg(x) \rangle \right) \right|}$$

$$\langle a + i\eta, b - i\upsilon \rangle + \langle b + i\upsilon, a - i\eta \rangle = ab - ia\upsilon + i\eta b + \eta\upsilon + ba - ib\eta + ia\upsilon + \upsilon\eta = 2(ab + \eta\upsilon) = 2\,\mathrm{Re}\langle a + i\eta, b - i\upsilon \rangle$$

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

Теорема (Принцип неопределенности): Пусть функция окна $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ выбрана так, что ее преобразование Фурье так же является функцией окна, тогда: $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{2}$ или при $\omega = 2\pi f$, $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq \frac{1}{4\pi}$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $g_a(x) \sim Ae^{-cx^2}, c > 0$ - функция Гаусса.

Доказательство: Пусть $\sigma_g^2 = \|g(x)\|_2^2 \Delta_g^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \|xg(x)\|_2^2$, $\sigma_{\hat{g}}^2 = \|\hat{g}(\omega)\|_2^2 \Delta_{\hat{g}}^2 = \|\omega \hat{g}(\omega)\|_2^2$ Сходится, т.к. функция окна

Если $\sigma_g^2 = \infty$ или $\sigma_{\hat{g}}^2 = \infty$, то доказано.

Докажем случай, когда $\sigma_g \sigma_{\hat{g}}$ - конечна.

Равенство Парсеваля

$$\widehat{g'}(\omega) = -j\omega\hat{g}(\omega) \Rightarrow |\widehat{g'}(\omega)| = \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2 \Rightarrow \sigma_{\hat{g}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\hat{g}(\omega)|^2\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g'}(\omega)|^2\, d\omega = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2\, dx = 2\pi\|g'(x)\|_2^2$$

Докажем *Неравенство Шварца.*

1. Если $\langle g, f \rangle \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \lambda g + f, \lambda g + f \rangle = \lambda^2 \langle g, g \rangle + 2\lambda \langle g, f \rangle + \langle f, f \rangle \quad \Rightarrow D = 4\langle g, f \rangle^2 - 4\langle g, g \rangle \langle f, f \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \|g\|\|f\| \geq |\langle g, f \rangle|$$

2. Если $\mathrm{Im}\langle g, f \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \langle g, f \rangle = re^{i\varphi},\ z = ge^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow \langle z, f \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, f \rangle = r = |\langle g, f \rangle| \in \mathbb{R}, \quad \|z\| = \langle z, z \rangle = e^{-i\varphi} \langle g, e^{-i\varphi} g \rangle = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} \langle g, g \rangle = \|g\| \quad \Rightarrow \boxed{|\langle g, f \rangle| = |\langle z, f \rangle| \leq \|z\|\|f\| = \|g\|\|f\|}$$

$$\Rightarrow \sigma_g \sigma_{\hat{g}} = \|xg(x)\|\|x\hat{g}(x)\| = \boxed{2\pi\|xg(x)\|\|g'(x)\| \geq 2\pi|\langle xg(x), g'(x) \rangle|} \geq 2\pi|\mathrm{Re}\langle xg(x), g'(x) \rangle| = 2\pi\left|\frac{1}{2}\left(\langle xg(x), g'(x) \rangle + \langle g'(x), xg(x) \rangle\right)\right| =$$

$$= \left|\pi\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} xg(x)\overline{g}'(x) dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} xg'(x)\overline{g}(x) dx\right)\right| = \left|\pi\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\left(g(x)\overline{g}'(x) + g'(x)\overline{g}(x)\right) dx\right)\right| =$$

Оконное Преобразование Фурье. Оптимальное окно.

$$\Rightarrow \sigma_g \sigma_{\hat g} \ge \left|\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\left(g(x)\overline{g}'(x)+g'(x)\overline{g}(x)\right)dx\right)\right| = \left|\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\left(g(x)\overline{g}(x)\right)'dx\right)\right| = \left|\underbrace{\pi x\left|g(x)\right|^2\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(x)\right|^2dx\right| = \left|-\pi\left\|g(x)\right\|^2\right| = \pi\left\|g(x)\right\|^2$$

$$\Rightarrow \left\|g(x)\right\|\Delta_g \left\|\hat g(\omega)\right\|\Delta_{\hat g} = \sigma_g\sigma_{\hat g} \ge \pi\left\|g(x)\right\|^2,$$

$$\left\|\hat g(\omega)\right\| = 2\pi\left\|g(x)\right\| \;\Rightarrow 2\pi\left\|g(x)\right\|^2\Delta_g\Delta_{\hat g} \ge \pi\left\|g(x)\right\|^2, \quad \Rightarrow \boxed{\Delta_g\Delta_{\hat g} \ge \frac{1}{2}}$$ - Принцип неопределенности

а) *Неравенство Шварца* превращается в равенство $\left\|xg(x)\right\|\left\|g'(x)\right\| = \left|\left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle\right|$ если xg, g' - коллинеарные:

$\Rightarrow g'(x) = (\mu + j\nu)xg(x),\; x\in\mathbb{R}$ - дифф. уравнение

Решение уравнения: $g(x) = Ae^{(\mu+j\nu)x^2/2}, A\in\mathbb{C}$

$g(x)\in L_2$ если $\mu = -c,\; c>0$

б) чтобы $\left|\left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle + \left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle\right)\right|$ нужно $\operatorname{Im}\left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle = 0;\; \left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle = \left\langle g'(x), xg(x)\right\rangle$

$$\Rightarrow \left\langle xg(x), g'(x)\right\rangle = \left\langle xg(x), (\mu + j\nu)xg(x)\right\rangle = (\mu + j\nu)\left\|xg(x)\right\|^2 \in \Re \;\Rightarrow \nu = 0$$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = Ae^{-cx^2/2}}$ - Функция Гаусса, оптимально одновременно локализована в пространственной и частотной областях

При $\Delta_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-x^*\right)^2\left|g(x)\right|^2dx,\; \Delta_{\hat g}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\omega-\omega^*\right)^2\left|\hat g(\omega)\right|^2d\omega$ неравенство сохраняется и $g(x) = Ae^{\frac{-c\left(x-x^*\right)^2}{2}}$

Преобразование Габора

Пусть функция окна: $g_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad a > 0$

Тогда $G^a_{b,\omega}(x) = g_a(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}$ - **функция Габора**

Преобразование Габора:

$$G^a_b\{f\}(\omega) = \langle f(x), G^a_{b,\omega}(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{G^a_{b,\omega}(x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} \quad \Rightarrow \omega = 0,\ \alpha = (4a)^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(x-b)db = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G^a_b\{f\}(\omega)db = f(\omega)$$

Окно $g_a(x)$ точно разбивает $\hat{f}(\omega)$ и дает о ней локальную спектральную информацию. **Ширина окна**: $2\Delta_g = 2\sqrt{a}$

Преобразование Габора

Пусть функция окна: $g_a(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad a > 0$

Тогда $G^a_{b,\omega}(x) = g_a(x-b)\,\mathrm{e}^{j\omega x}$ - **функция Габора**

Преобразование Габора:

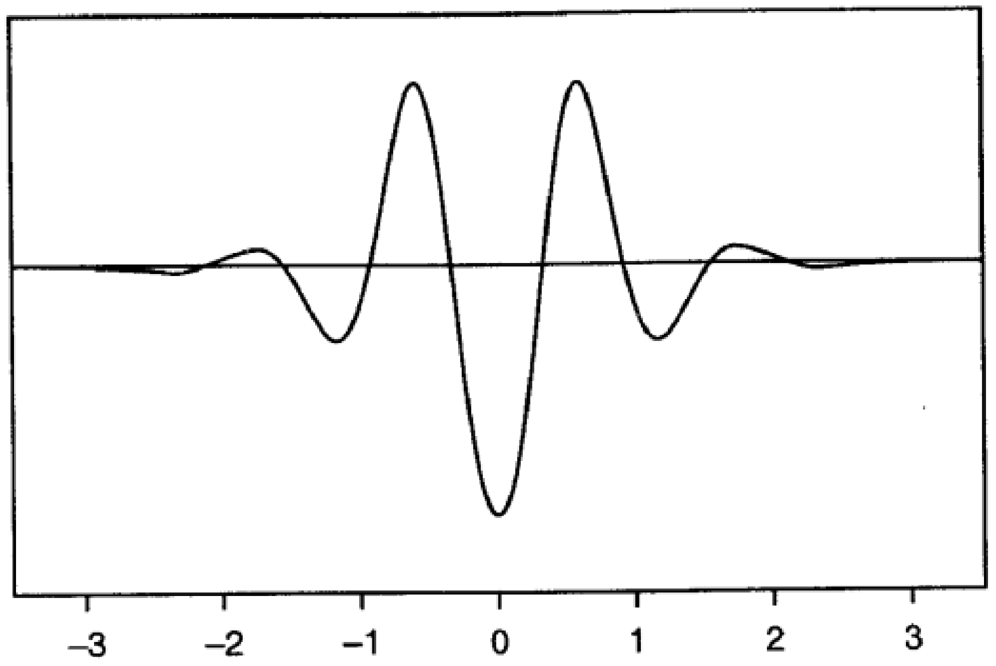
$$G^a_b\{f\}(\omega) = \left\langle f(x), G^a_{b,\omega}(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{G^a_{b,\omega}(x)}dx$$

$$G^a_b\{f\}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-b)^2}{2a}} \mathrm{e}^{-j\omega x}\, dx$$

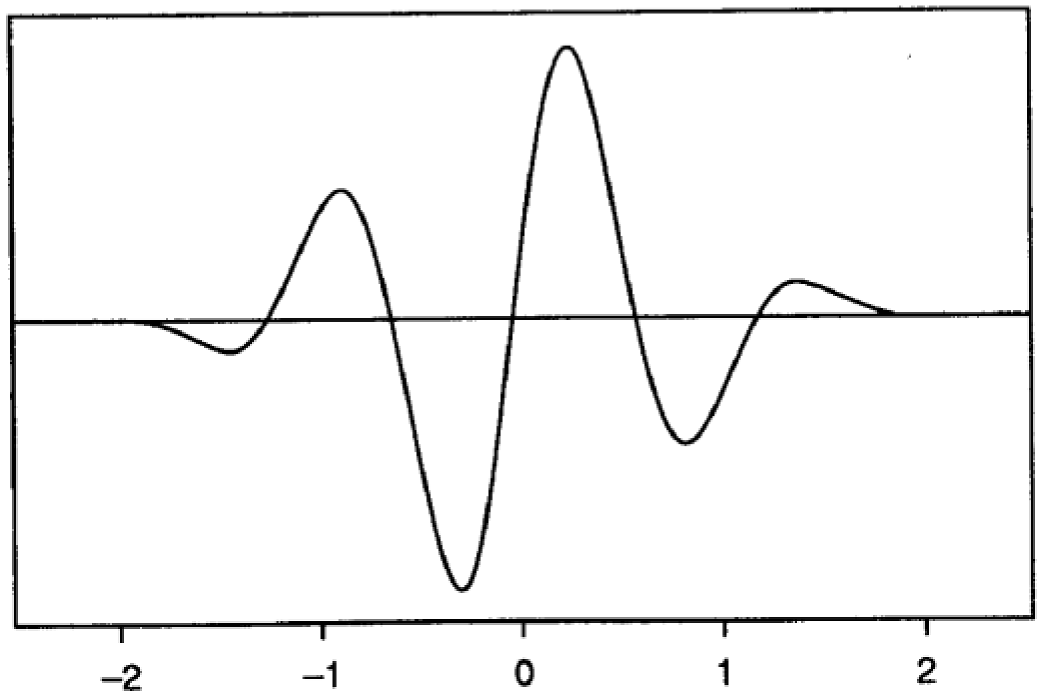
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} \qquad \Rightarrow \omega = 0,\ \alpha = (4a)^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(x-b)db = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G^a_b\{f\}(\omega)db = f(\omega)$$

Окно $g_a(x)$ точно разбивает $\hat{f}(\omega)$ и дает о ней локальную спектральную информацию. Ширина окна: $2\Delta_g = 2\sqrt{a}$



$Re\ G^{\alpha}_{0,2\pi},\ \alpha = 0.2925$



$Im\ G^{\alpha}_{0.2\pi},\ \alpha = 0.2300$

Преобразование Габора

Преобразование Габора:

$$G_b^a\{f\}(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{(x-b)^2}{2a}}\,\mathrm{e}^{-j\omega x}\,dx \quad \Rightarrow \hat{G}_{b,\omega}^a(\eta)=\mathrm{e}^{-jb(\eta-\omega)}\,e^{-a(\eta-\omega)^2}$$

$$G_b^a\{f\}(\omega)=\left\langle f,G_{b,\omega}^a\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f},\hat{G}_{b,\omega}^a\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\eta)\mathrm{e}^{jb(\eta-\omega)}\,e^{-a(\eta-\omega)^2}d\eta=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega b}}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\eta)\mathrm{e}^{jb\eta}\,g_{1/4a}(\eta-\omega)d\eta=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega b}}{2\sqrt{\pi a}}\boxed{G_b^{1/4a}\{\hat{f}\}(-b)}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_a(x-b)\mathrm{e}^{-j\omega x}dx=\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{j\omega b}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)g_{1/4a}(\eta-\omega)\mathrm{e}^{jb\eta}\,d\eta$$

Преобразование Габора

Преобразование Габора:

$$G_b^a\{f\}(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{(x-b)^2}{2a}}\mathrm{e}^{-j\omega x}\,dx \quad\Rightarrow \hat{G}_{b,\omega}^a(\eta)=\mathrm{e}^{-jb(\eta-\omega)}e^{-a(\eta-\omega)^2}$$

$$G_b^a\{f\}(\omega)=\left\langle f,G_{b,\omega}^a\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f},\hat{G}_{b,\omega}^a\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\eta)\mathrm{e}^{jb(\eta-\omega)}e^{-a(\eta-\omega)^2}d\eta=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega b}}{2\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\eta)\mathrm{e}^{jb\eta}g_{1/4a}(\eta-\omega)d\eta=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega b}}{2\sqrt{\pi a}}\boxed{G_b^{1/4a}\{\hat{f}\}(-b)}$$

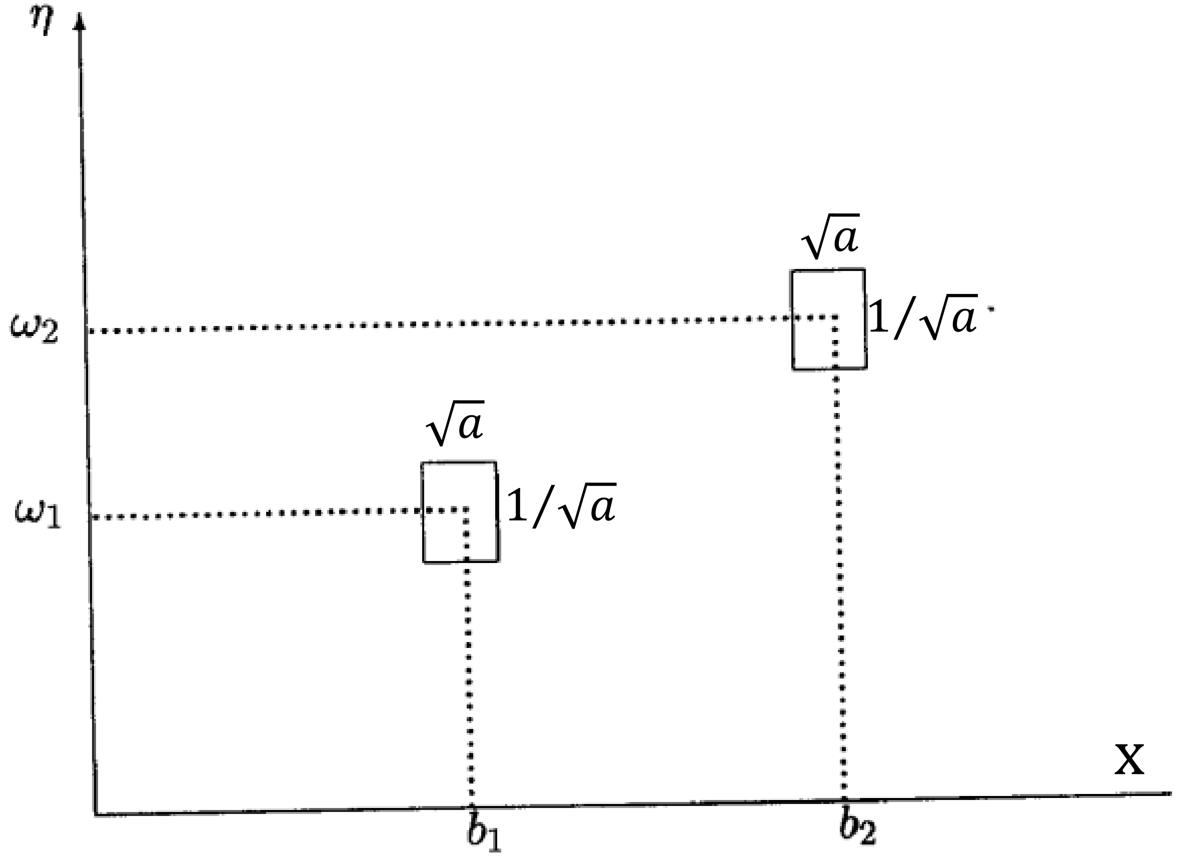
$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_a(x-b)\mathrm{e}^{-j\omega x}dx=\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{j\omega b}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)g_{1/4a}(\eta-\omega)\mathrm{e}^{jb\eta}\,d\eta$$

$$\Rightarrow \hat{G}_{b,\omega}^a(\eta)=\frac{\mathrm{e}^{j\omega b}}{2\sqrt{\pi a}}\mathrm{e}^{-jb\eta}g_{1/4a}(\eta-\omega)$$ - ширина окна $2\Delta_{\hat{g}}=1/\sqrt{a}$

Информация, полученная в окрестности $x=b$ может быть так же получена из спектра в окрестности $\eta=\omega$.

Площадь пространственно-частотного окна постоянно: $S=2\Delta_{g_a}2\Delta_{g_{1/4a}}=2$

Пространственно-частотное окно: $\left[b-\sqrt{a},b+\sqrt{a}\right]\times\left[\omega-\frac{1}{2\sqrt{a}},\omega+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$



Обратное преобразование Габора:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G_b^a\{f\}(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega x}g_a(x-b)\,d\omega db}$$

Преобразование Габора

Теорема: Пусть $g \in L^2(\mathbb{R}),\ \|g\|_2 = 1,\quad g,\ \hat{g}$ - функции окна: $xg(x) \in L^2(\mathbb{R}),\ \omega\hat{g}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}),\quad G_{b,\omega}(x) = g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}$

Тогда: $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, G_{b,\omega}\rangle\overline{\langle h, G_{b,\omega}\rangle}dbd\omega = 2\pi\langle f,h\rangle$$

$$G_b\{f\}(\omega) = \langle f(x), G_{b,\omega}(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{G_{b,\omega}(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-b)\mathrm{e}^{j\omega x}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-b)\mathrm{e}^{-j\omega x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, G_{b,\omega}\rangle\overline{\langle h, G_{b,\omega}\rangle}dbd\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_b\{f\}(\omega)\overline{G_b\{h\}(\omega)}dbd\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}\left|g(x-b)\right|^2 dbdx = 2\pi\langle f,h\rangle$$

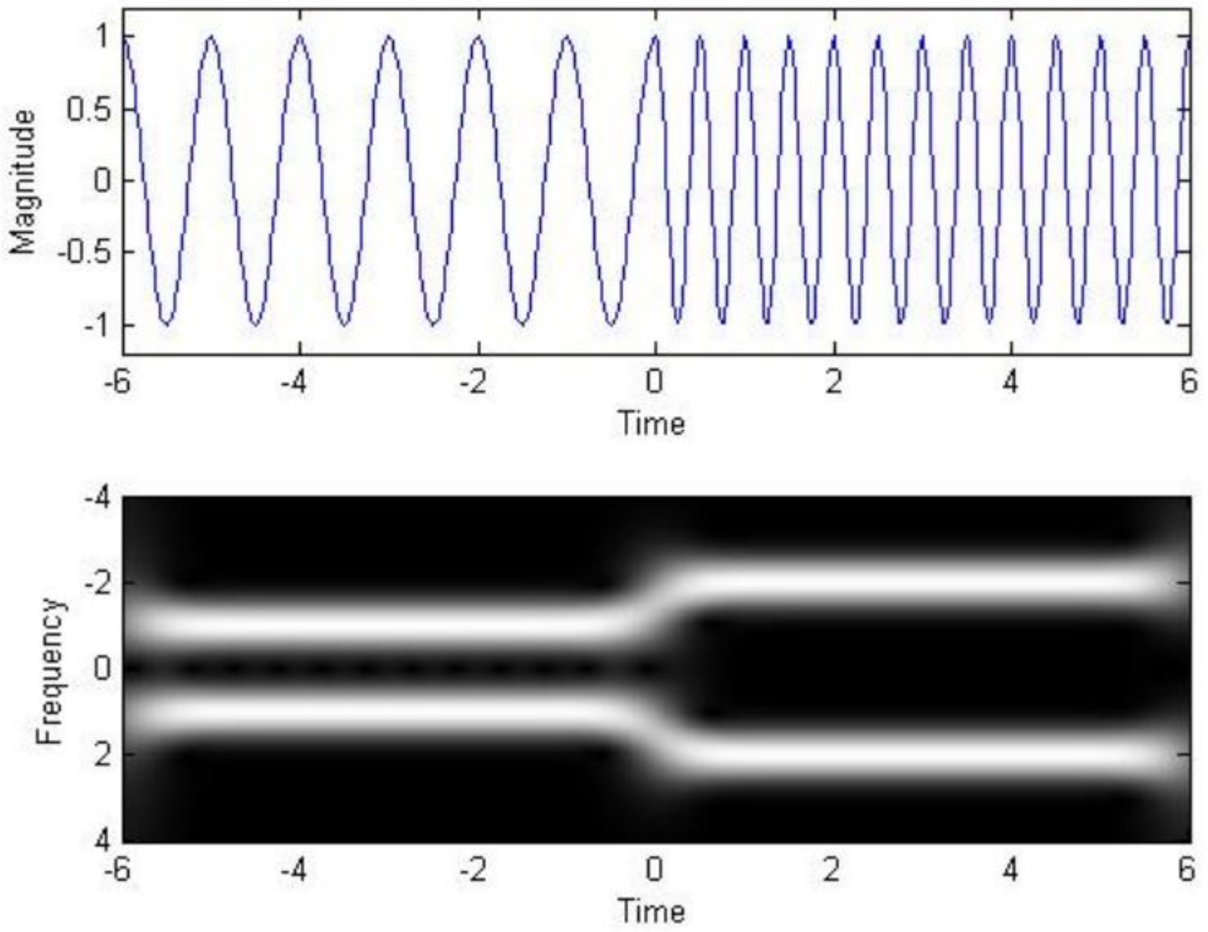
Формула восстановления функции по его **Кратковременному Преобразованию Фурье** (КВПФ).

Тогда при: $h(x) \sim g_a(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{2a}},\quad a \to +0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, G_{b,\omega}\rangle\left\langle \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{2a}}, g(x-b)\mathrm{e}^{-j\omega x}\right\rangle dbd\omega\Big|_{a\to+0} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_b\{f\}(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega x}\, g(x-b)\,d\omega db}$$

Преобразование Габора

Пример нестационарного одномерного сигнала

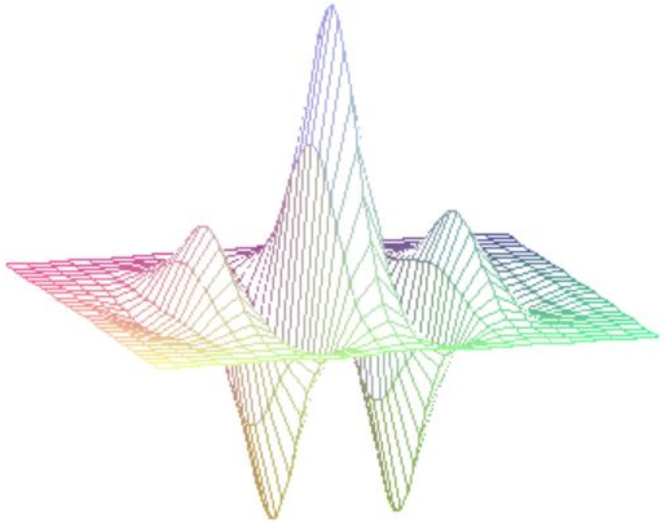


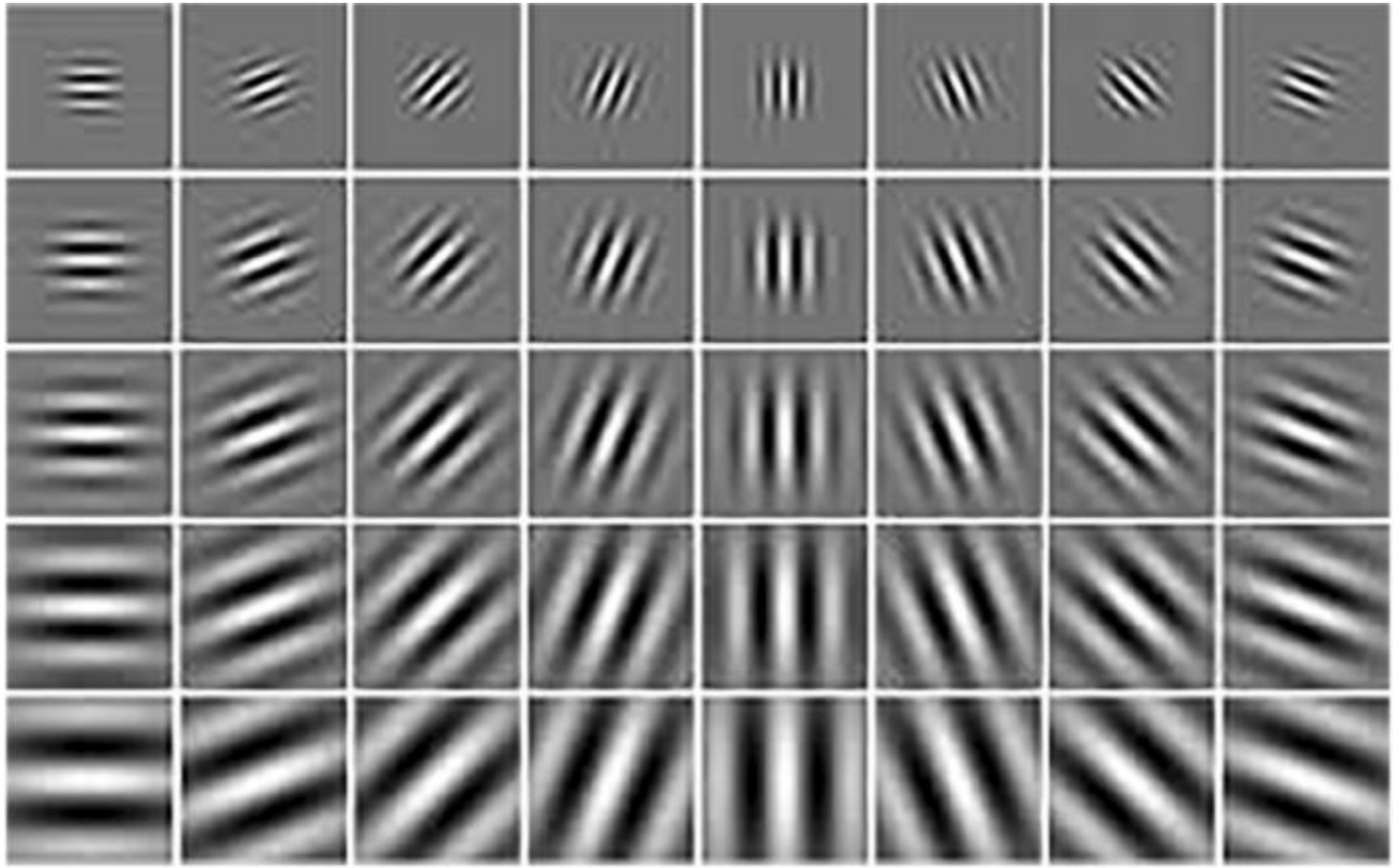
Преобразование Габора

Двумерная функция Габора:

$$g(x,y;\lambda,\theta,\psi,\sigma,\gamma) = \exp\left(-\frac{x'^2+\gamma^2 y'^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(i\left(2\pi\frac{x'}{\lambda}+\psi\right)\right)$$

где $x' = x\cos\theta + y\sin\theta\,,\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta\,.$





Gabor filters for 8 orientations and 5 wavelengths