

# **Цифровое моделирование рельефа с использованием ортогональных полиномов**

**И.В. Флоринский, А.Н. Панкратов**

**Институт математических проблем биологии РАН,  
Пушино**

# Определение

*Цифровое моделирование рельефа – система количественных методов моделирования и анализа поверхности планеты и взаимосвязей между рельефом и другими компонентами геосистем*

# Математические аспекты цифрового моделирования рельефа

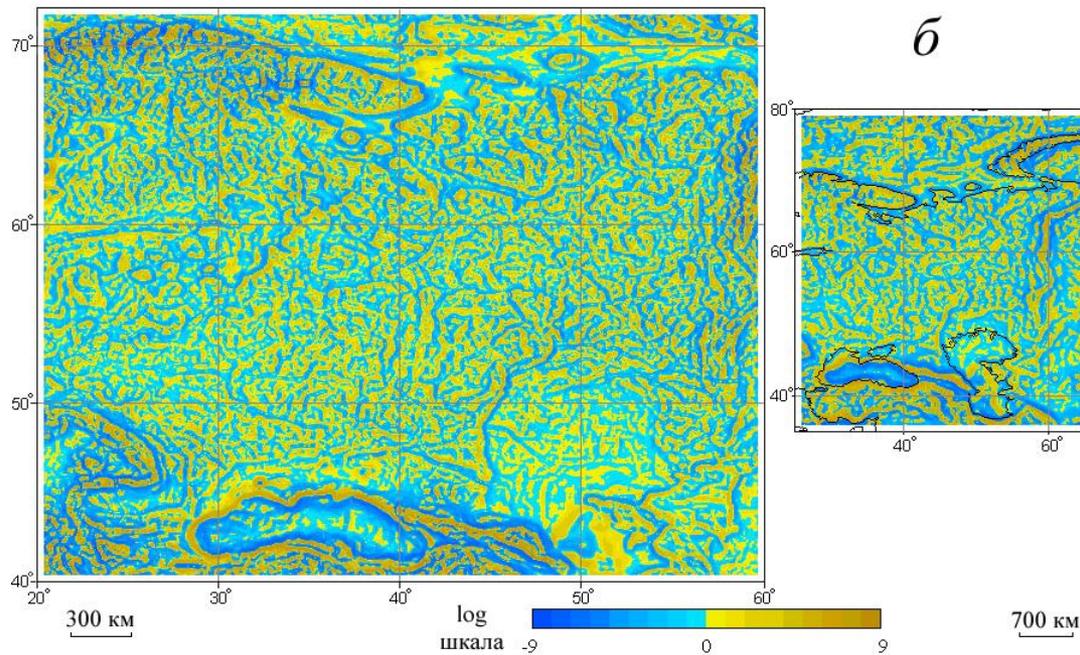
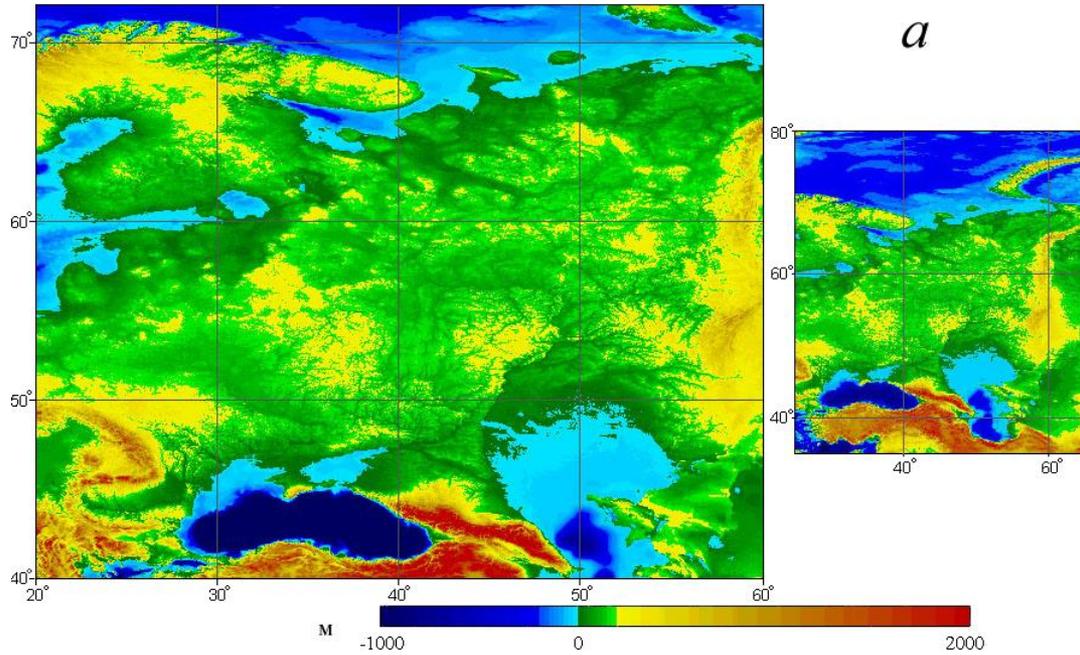
- Интерполяция цифровых моделей высот (ЦМВ);
- Генерализация и подавление шума в ЦМВ;
- Расчет морфометрических характеристик на основе вычисления частных производных ВЫСОТЫ.

# Пример генерализации

$w = 4'$

$w = 10'$

Высота

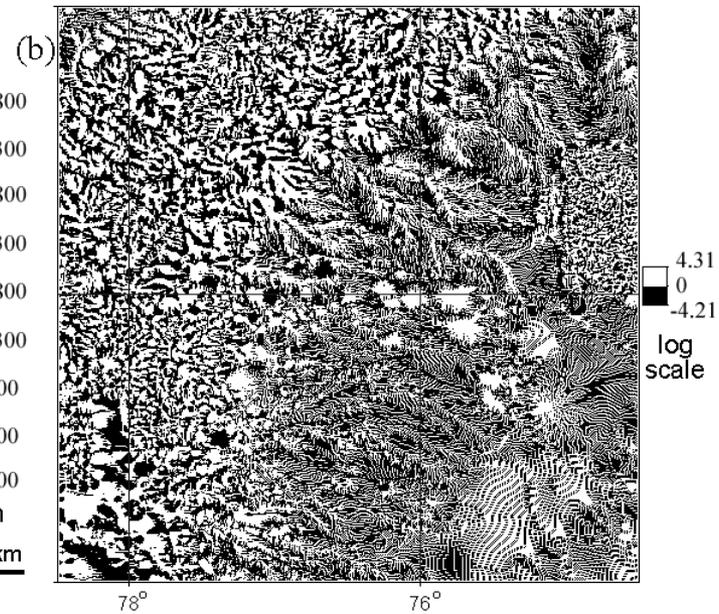
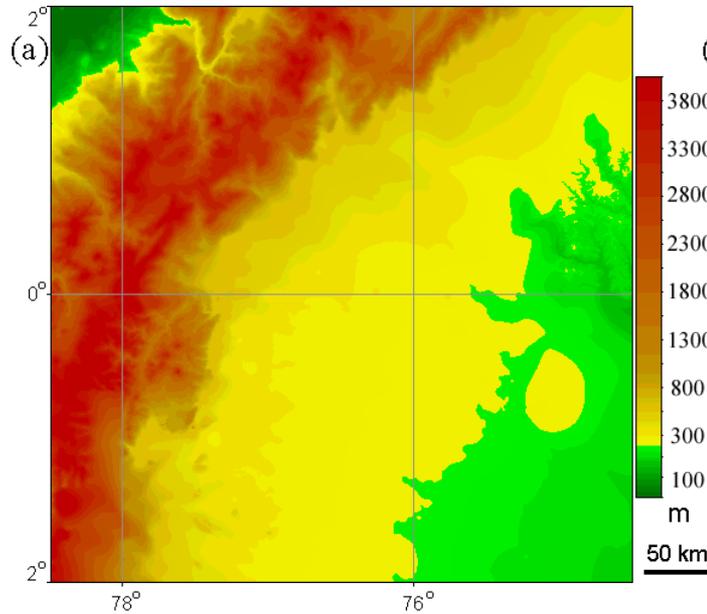


Вертикальная кривизна

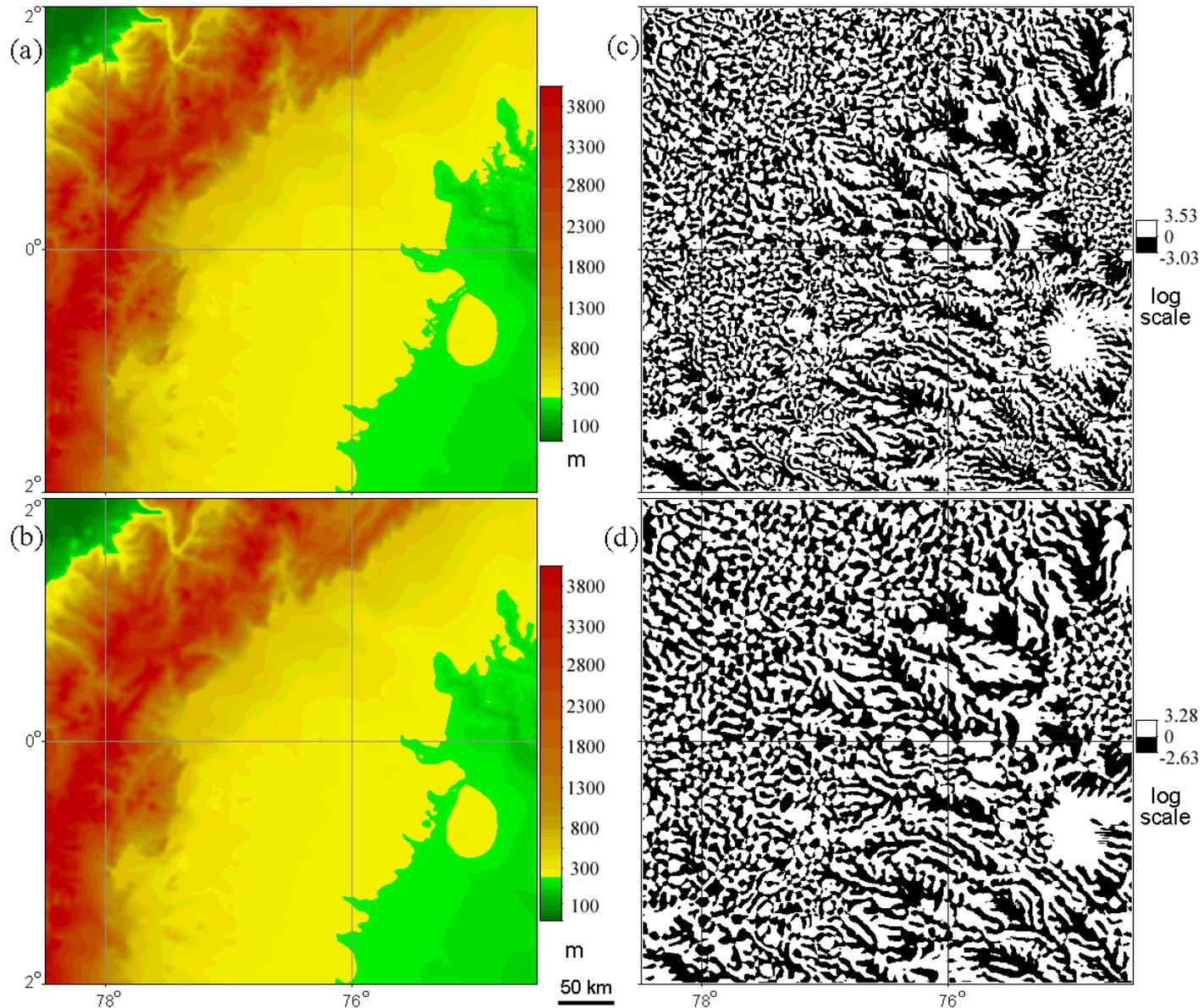
# Пример генерализации и фильтрации (2D-SSA)

высота

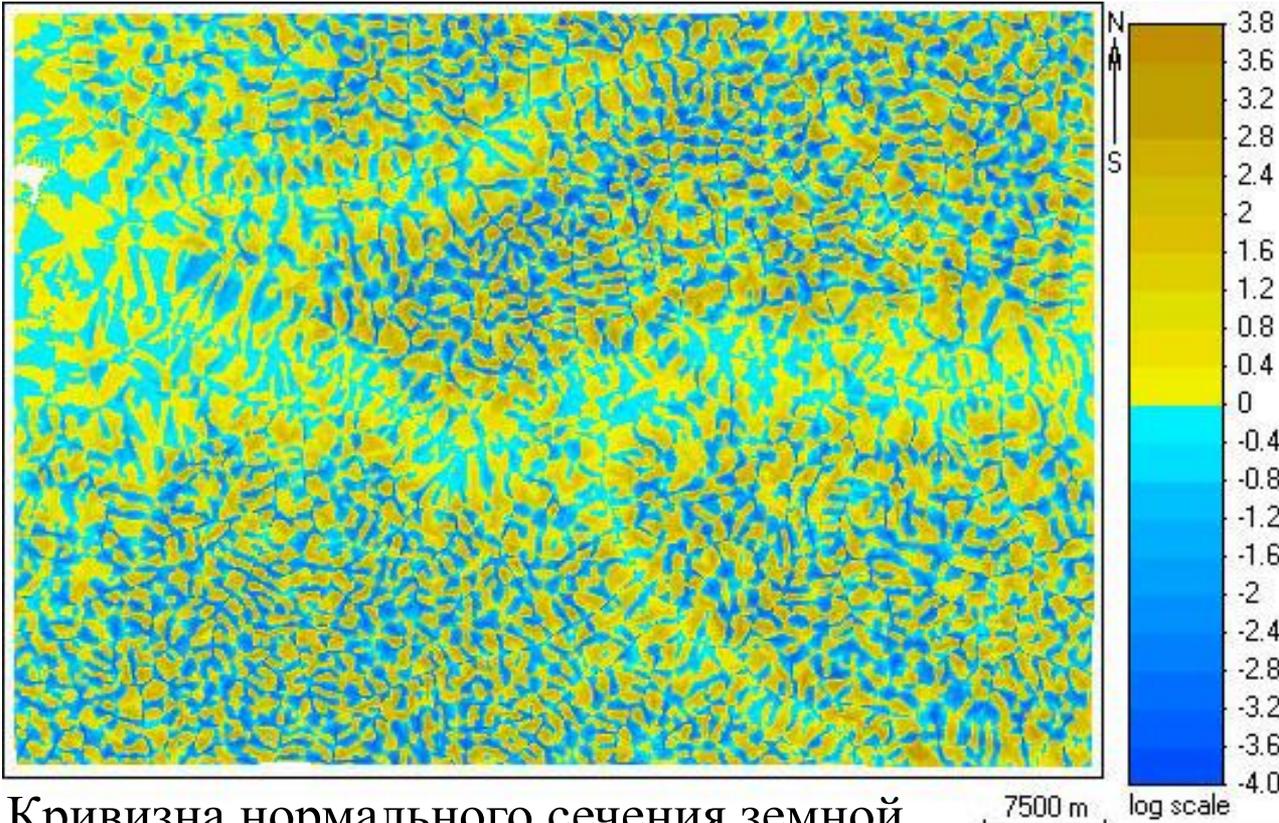
горизонтальная кривизна



# Пример генерализации и фильтрации (2D-SSA)



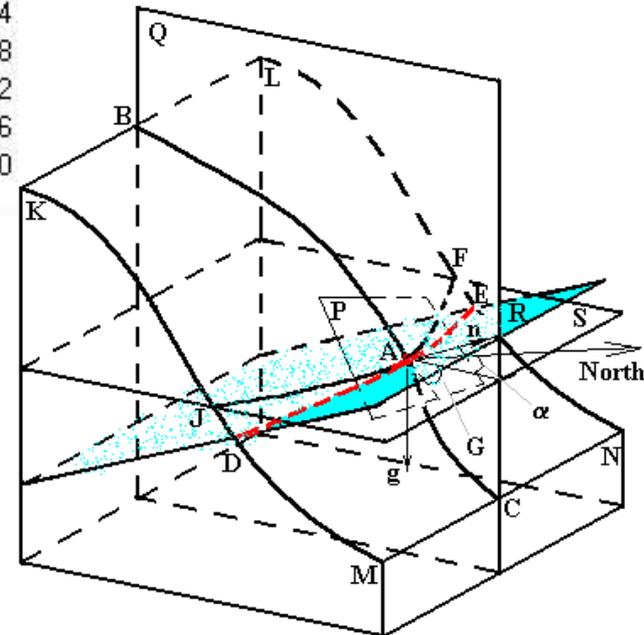
# Горизонтальная кривизна



$$k_h = -\frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{(p^2 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

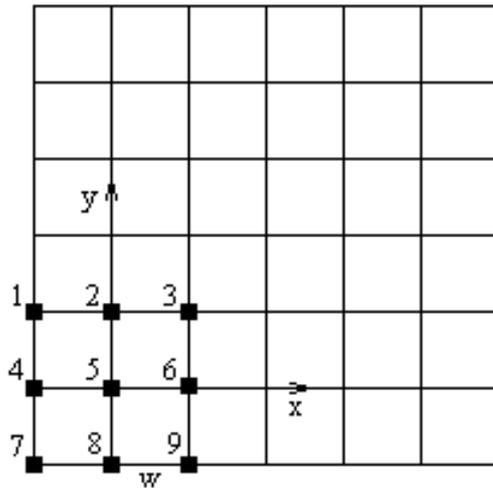


Кривизна нормального сечения земной поверхности плоскостью, ортогональной плоскости, включающей вектор ускорения силы тяжести в данной точке.

Мера конвергенции / дивергенции потоков.

# Метод Эванса

для расчета частных производных высоты



$$z = \frac{rx^2}{2} + \frac{ty^2}{2} + sxy + px + qy + u$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$p = \frac{z_3 + z_6 + z_9 - z_1 - z_4 - z_7}{6w}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$q = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - z_7 - z_8 - z_9}{6w}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$r = \frac{z_1 + z_3 + z_4 + z_6 + z_7 + z_9 - 2(z_2 + z_5 + z_8)}{3w^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$s = \frac{z_3 + z_7 - z_1 - z_9}{4w^2}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$t = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_7 + z_8 + z_9 - 2(z_4 + z_5 + z_6)}{3w^2}$$

# Основной результат

Разработан спектрально-аналитический метод и алгоритм на основе ортогональных разложений высокого порядка с использованием многочленов Чебышева I рода с последующим суммированием Фейера.

Метод и алгоритм предназначены для аналитической обработки ЦМВ, включая глобальную аппроксимацию ЦМВ, генерализацию и подавление шума в ЦМВ, а также расчет морфометрических характеристик на основе аналитического вычисления частных производных.

# Метод

Исходная функция

$$z = f(x, y)$$

Разложение в двумерный ряд  
по ортогональным  
многочленам Чебышева

$$z = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} d_{ij} T_i(x) T_j(y)$$

Коэффициенты разложения

$$c_i = \frac{(f, T_i)}{(T_i, T_i)}$$

Суммирование Фейера

$$\tilde{c}_i = \frac{l-i}{l} c_i$$

Коэффициенты  
разложения  
производной  
ортогонального ряда

$$p_{l-1} = 0,$$

$$p_{l-2} = 2(l-2)c_{l-1},$$

$$p_j = p_{j+2} + 2jc_{j+1},$$

$$p_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2}},$$

# Алгоритм

Исходный массив

$$A$$

Разложение по  $y$

$$C = \frac{2}{k} FT_t L_{yt} A$$

Разложение по  $x$

$$D = \frac{2}{k} FT_t L_{xt} C^T$$

Восстановление  
аппроксимированной  
функции

$$Z = T_x^T D^T T_y$$

Матрицы  
коэффициентов частных  
производных

$$P = ED,$$

$$R = E^2 D,$$

$$Q = DE^T,$$

$$T = D(E^T)^2,$$

$$S = PE^T.$$

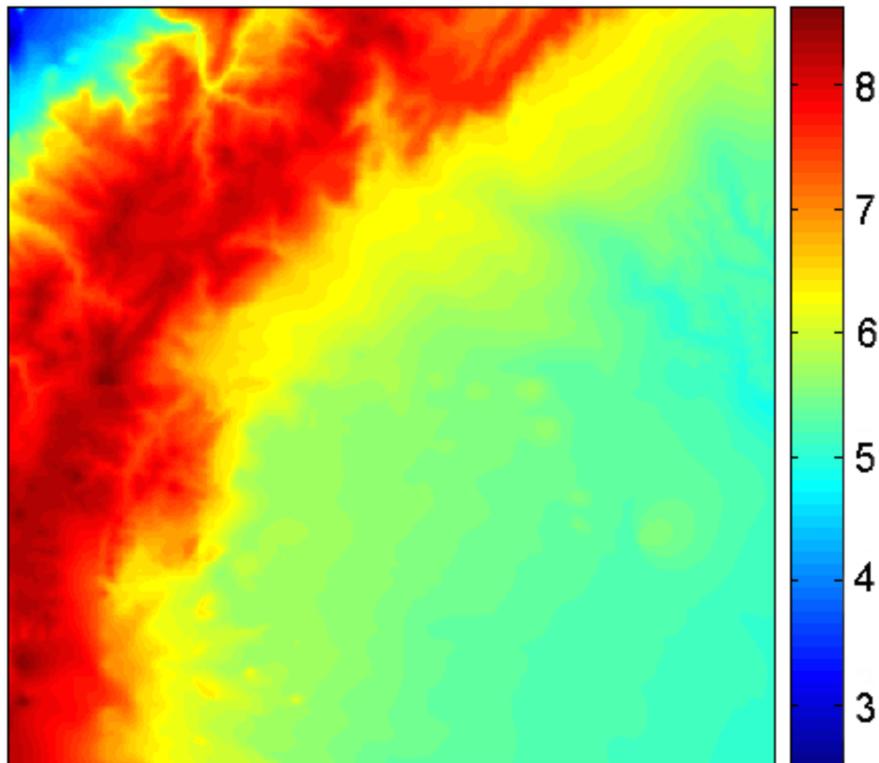
# ЦМВ Северных Анд (GTOPO30)



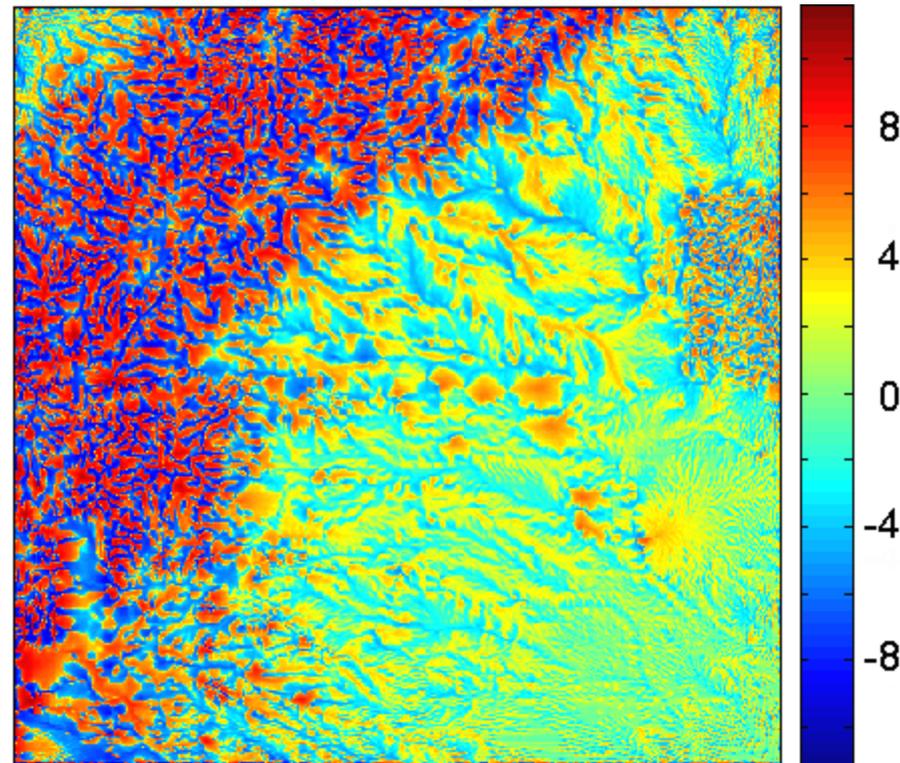
230 880 точек (матрица высот 480 x 481)  
 $w = 30''$

# 480 коэффициентов разложения

высота



горизонтальная кривизна

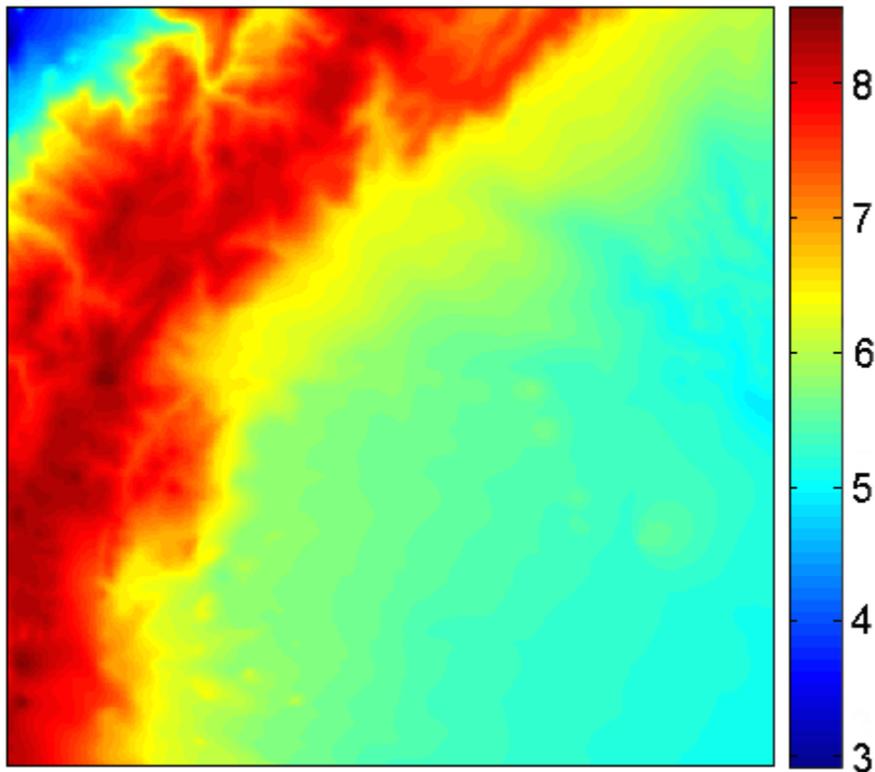


100 km

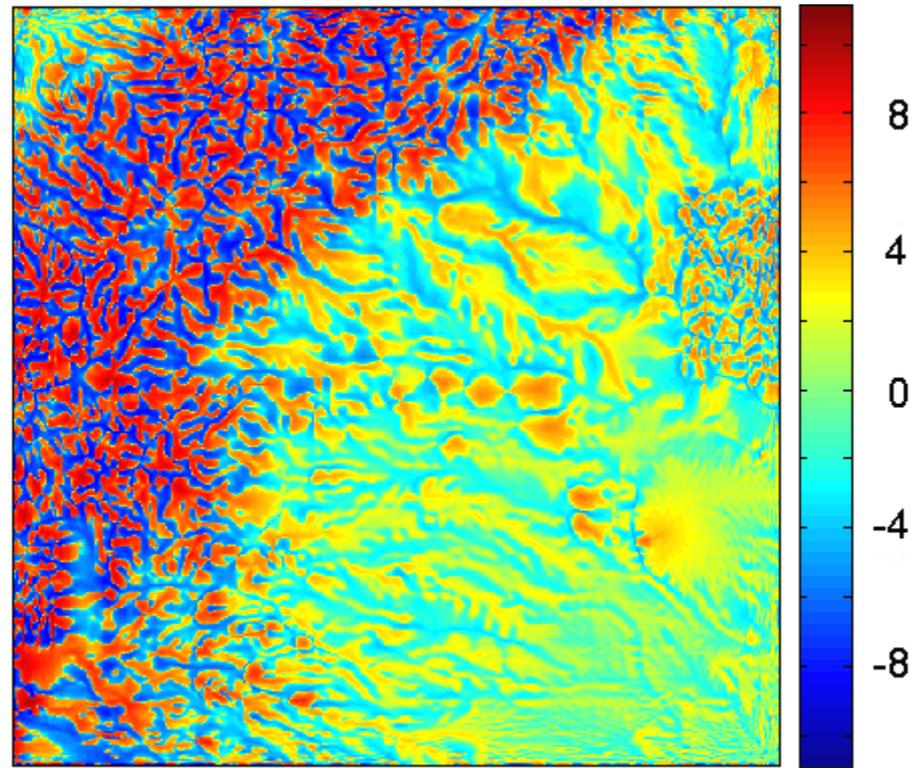


# 240 коэффициентов разложения

высота



горизонтальная кривизна

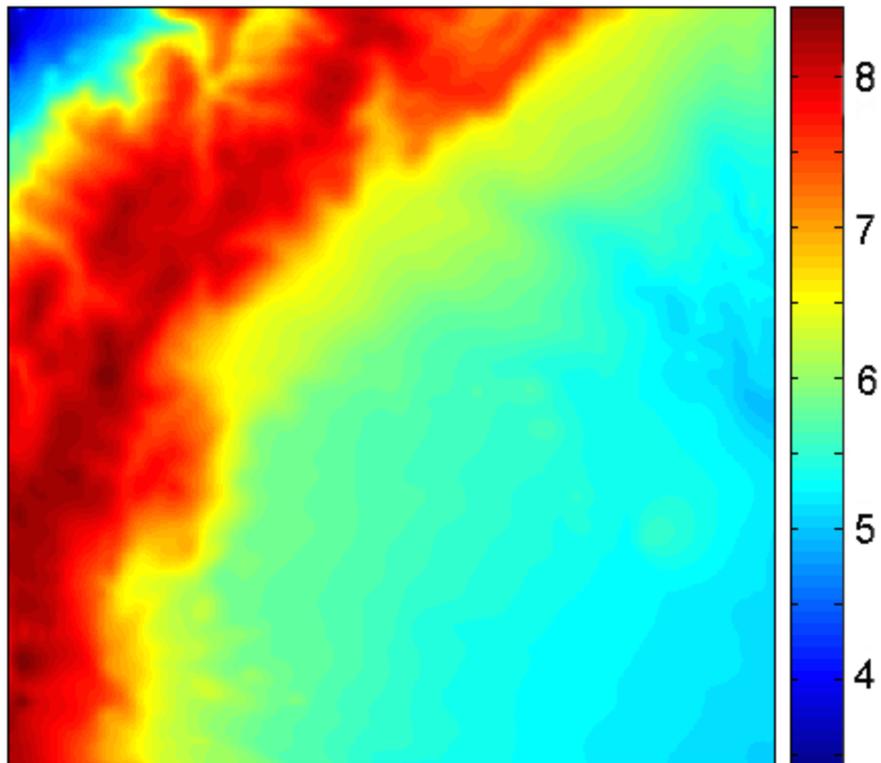


100 km

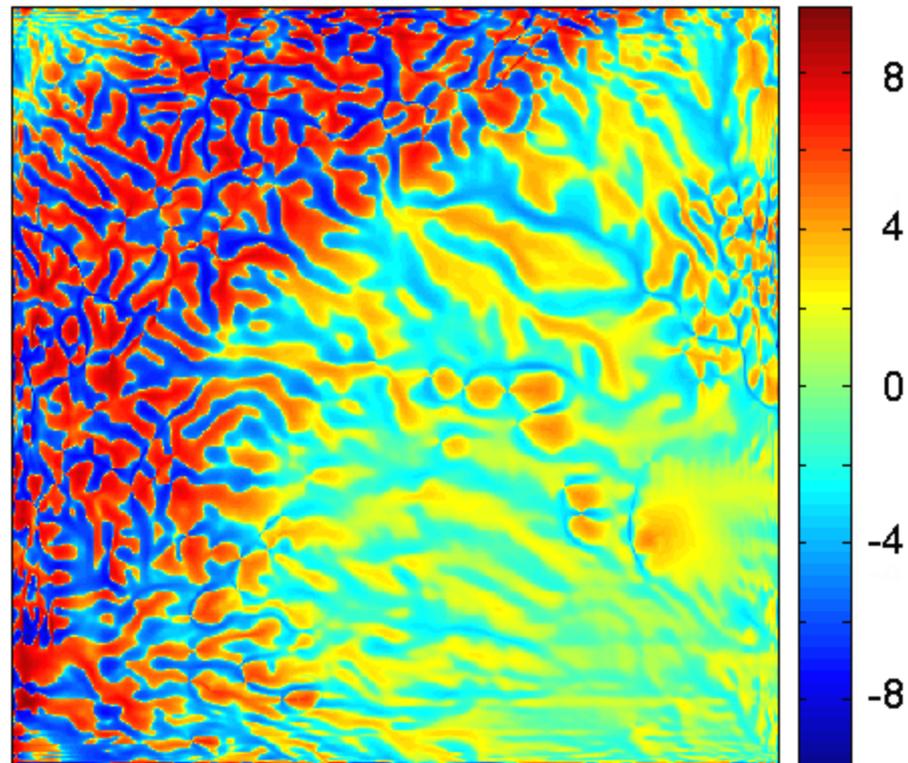


# 120 коэффициентов разложения

высота



горизонтальная кривизна

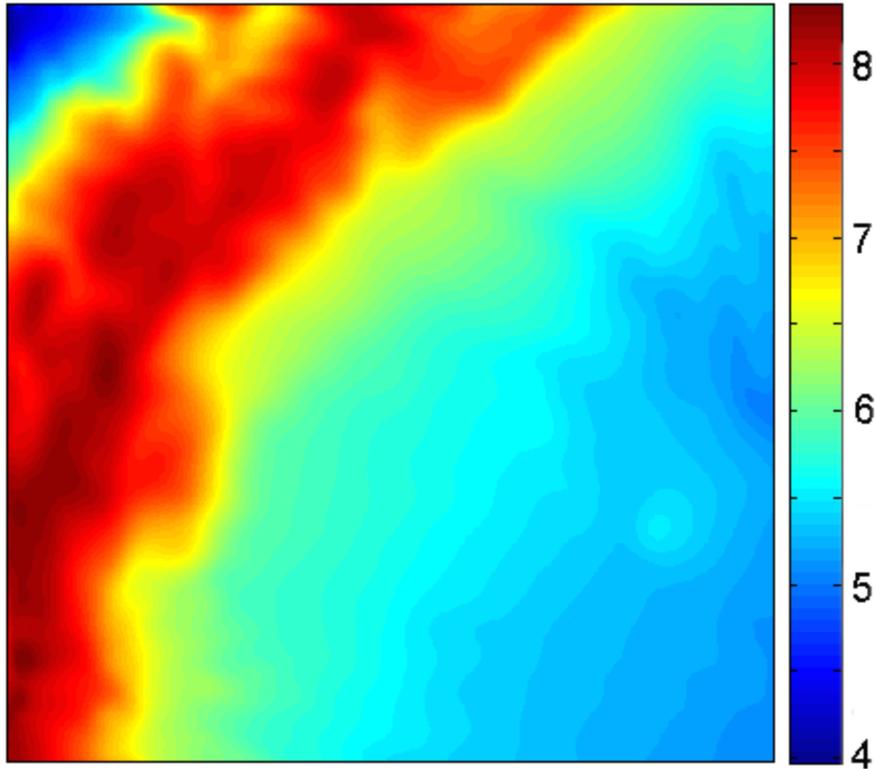


100 km

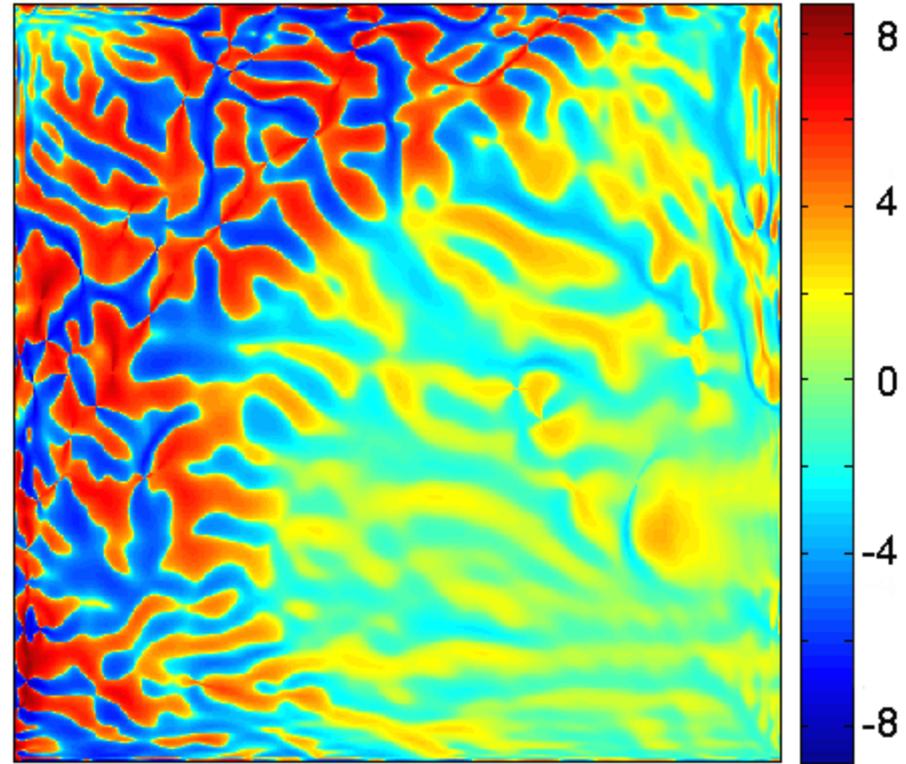


# 60 коэффициентов разложения

высота



горизонтальная кривизна

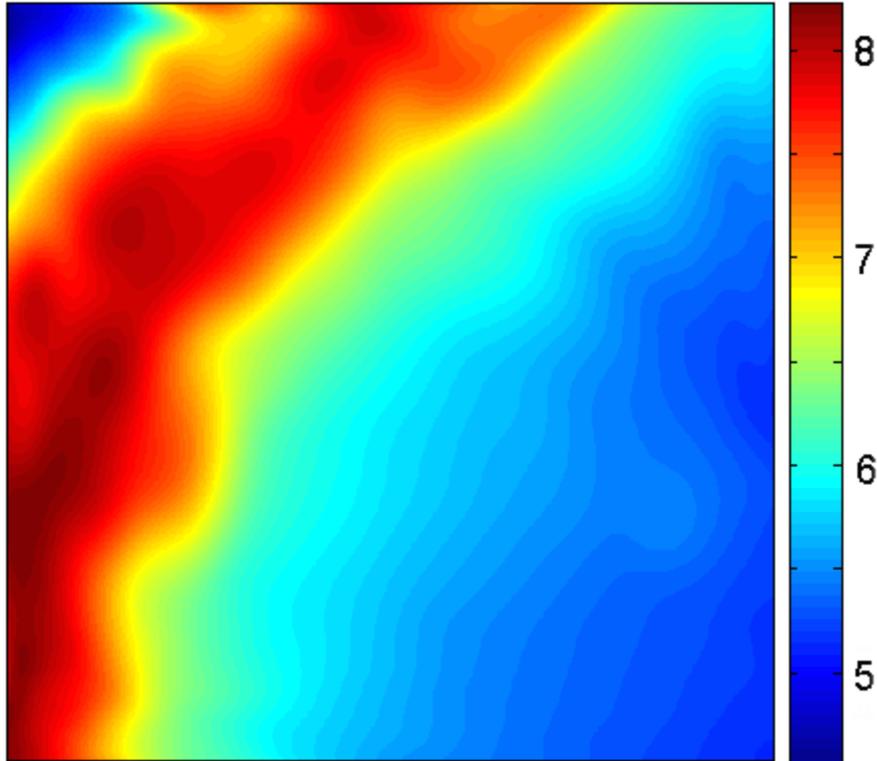


100 km

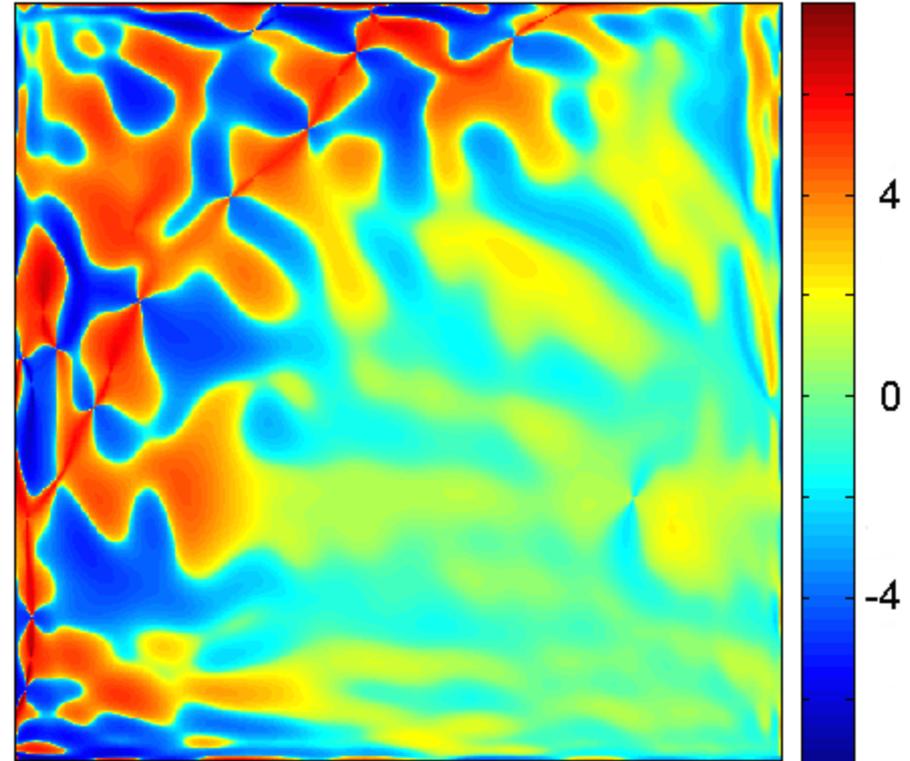


# 30 коэффициентов разложения

высота



горизонтальная кривизна



100 km



# Публикации

Florinsky I.V., Pankratov A.N. Digital terrain modeling with orthogonal polynomials // *Machine Learning and Data Analysis*, 2015, Vol. 1, No. 12, pp. 1647–1659.

Florinsky I.V., Pankratov A.N. Digital terrain modeling with the Chebyshev polynomials. *arXiv:1507.03960 [physics.geo-ph]*. 2015, 10 p.

# Контакты

Web: [iflorinsky.psn.ru](http://iflorinsky.psn.ru)

email: *iflor@mail.ru*