

Поведение эпидемий в мезмасштабных сетях

Обзор "Geographical effects on epidemic spreading in scale-free networks"[2008]

Вихрева Мария, ВМК МГУ

7 октября 2015

Модели эпидемий

Введение

Моделирование эпидемий имеет цели:

- изучения механизмов распространения эпидемий;
- предсказания направлений распространения болезней;
- создания стратегий контроля.

$S(t)$ – susceptible, количество здоровых (еще не болевших) в момент времени t ;

$I(t)$ – infected, количество больных в момент времени t ;

$R(t)$ – recovered, количество иммунитетных к болезни (например, таких, которые уже переболели) в момент времени t .

Пусть общее количество человек N фиксировано

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Модель



описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{1}$$

β – вероятность заразиться здоровому при контакте с больным;

γ – доля выздоровевших/умерших от болезни ($\frac{1}{\gamma}$ – среднее время выздоровления).

SIR-модель с рождаемостью и смертностью

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \mu(N - S) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R\end{aligned}\tag{2}$$

μ – доля рождаемости, равная доле естественной смертности населения.

SIS-модель с рождаемостью и смертностью

Модель

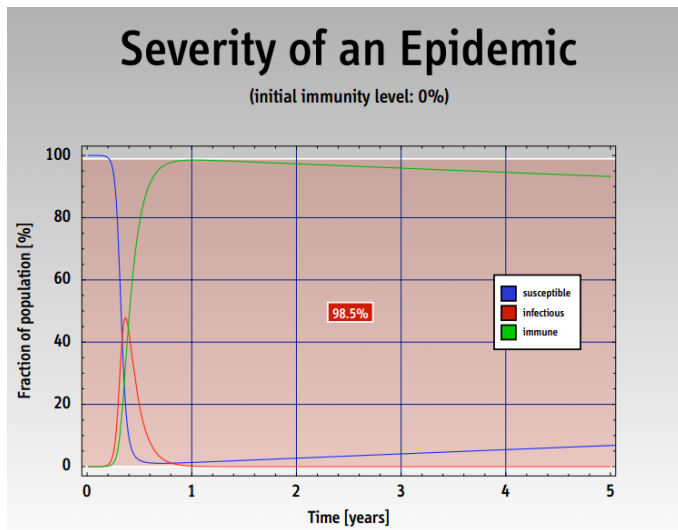


описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \mu(N - S) + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \end{aligned} \tag{3}$$

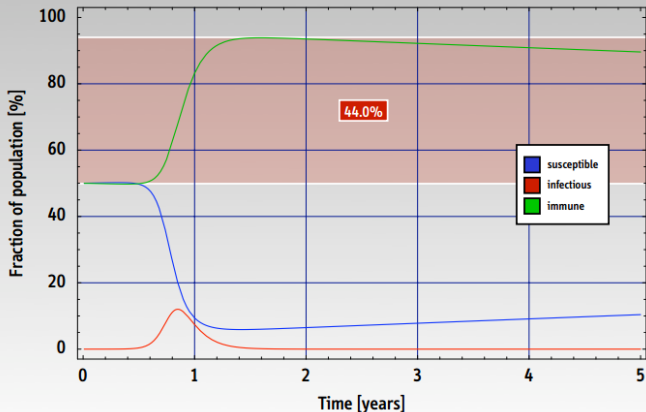
SIR-модель с рождаемостью и смертностью

Из статьи [1] 1992 г.:



Severity of an Epidemic

(initial immunity level: 50%)



SIR-модель с рождаемостью и смертностью

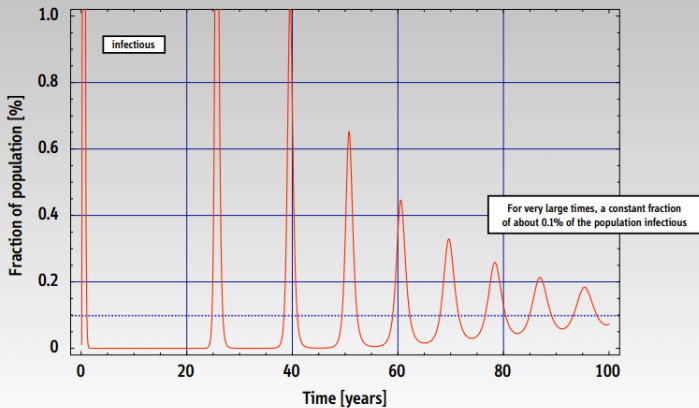
Severity of an Epidemic

(initial immunity level: 90%)



Epidemic and Endemic Phases

(of an infectious disease)



- В дифференциальных уравнениях предполагается, что больные/здоровые/иммунитетные равномерно распределены по пространству.

SIR-модель в графе

Пусть есть граф, вершины которого – люди, ребра – контакты между людьми.

Вершины имеют метки:

S – человек здоров;

I – человек болен;

R – человек иммунен.

Тогда SIR-модель в графе реализуется следующим образом:

- 1** Выбираем вершину. Если ее метка **I**, генерируем случайное число $x \in (0, 1)$;
- 2** Если $x < c$, то новая метка вершины – **R**;
- 3** Иначе выберем случайную вершину-сосед. Если ее метка **S**, то меняем ее на **I**;
- 4** Повторять, пока существуют вершины с меткой **S** и **I**.

Здесь вероятность заражения $\beta = (1 - c)/c$

Виды графов

Граф "Мир тесен"

Определение

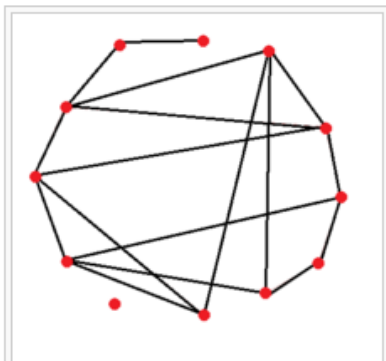
Граф "Мир тесен" (маленький мир) – разновидность графа, который имеет следующее свойство: если взять две произвольные вершины a и b , то они с большой вероятностью не являются смежными, однако одна достижима из другой посредством небольшого количества переходов через другие вершины.

А именно: сеть, в которой типичное расстояние L между двумя произвольно выбранными вершинами растет пропорционально логарифму от числа вершин N , таким образом:

$$L \propto \log N$$

Виды графов

Граф "Мир тесен"

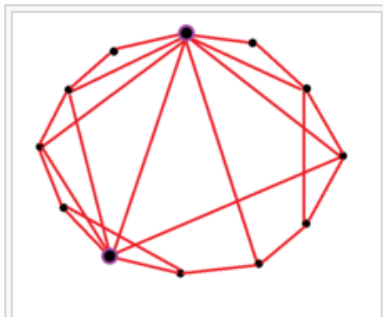


Случайный граф

Средняя степень вершины = 1,417

Средняя длина кратчайшего пути = 2.109.

Коэффициент кластеризации = 0.167



Пример графа «Мир тесен»,
выделены вершины — хабы.

Средняя степень вершины = 1,917

Средняя длина кратчайшего пути = 1.803.

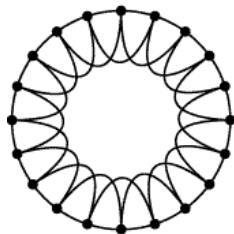
Коэффициент кластеризации = 0.522

Виды графов

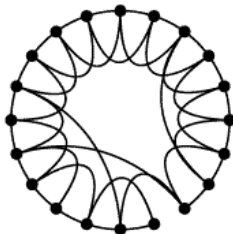
Граф "Мир тесен"

Генерация графа "Мир тесен" с помощью модели Вальца и Строгаца:

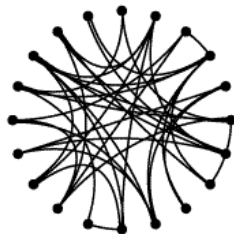
Regular



Small-world



Random



$p = 0$



$p = 1$

Increasing randomness

Виды графов

Граф "Мир тесен"

Примеры:

- граф телефонных звонков;
- сеть интернет;
- сеть, где вершины – гены, связи – взаимное влияние генов.

Определение

Безмасштабная сеть – граф, в котором степени вершин распределены по степенному закону, то есть:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

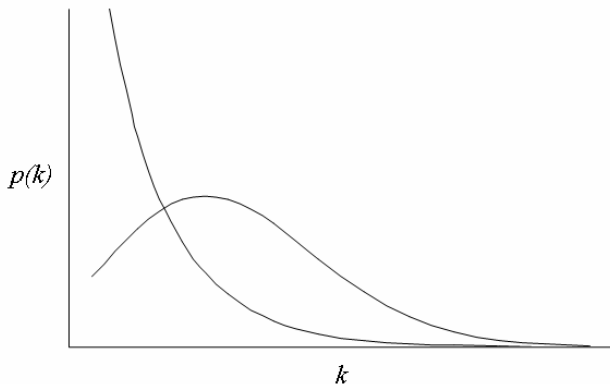
$P(k)$ – доля вершин степени k ;

$2 < \gamma < 3$ – параметр.

Виды графов

Безмасштабная сеть

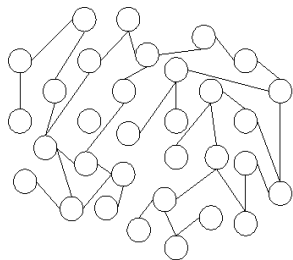
График распределения для безмасштабных и случайных сетей:



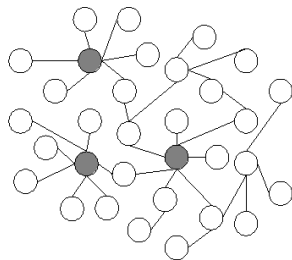
$P(k)$ — доля вершин степени k .

Виды графов

Безмасштабная сеть



(a) Random network



(b) Scale-free network

Виды графов

Безмасштабная сеть

Примеры:

- граф авиаперелетов;
- ссылок в WWW;
- граф финансовых операций.
- граф соавторов статей.

SIR в графе "Мир тесен"

В работе [2] к сгенерированному графу "Мир тесен" применена модель SIR:

Epidemics and percolation in small-world networks

Cristopher Moore^{1,2} and M. E. J. Newman¹

¹*Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, New Mexico 87501*

²*Departments of Computer Science and Physics, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico 87131*

We study some simple models of disease transmission on small-world networks, in which either the probability of infection by a disease or the probability of its transmission is varied, or both. The resulting models display epidemic behavior when the infection or transmission probability rises above the threshold for site or bond percolation on the network, and we give exact solutions for the position of this threshold in a variety of cases. We confirm our analytic results by numerical simulation.

I. INTRODUCTION

It has long been recognized that the structure of social networks plays an important role in the dynamics of disease propagation. Networks showing the "small-world" effect [1,2], where the number of "degrees of separation" between any two members of a given population is small by comparison with the size of the population itself, show much faster disease propagation than, for instance, simple diffusion models on regular lattices.

Milgram [3] was one of the first to point out the exist-

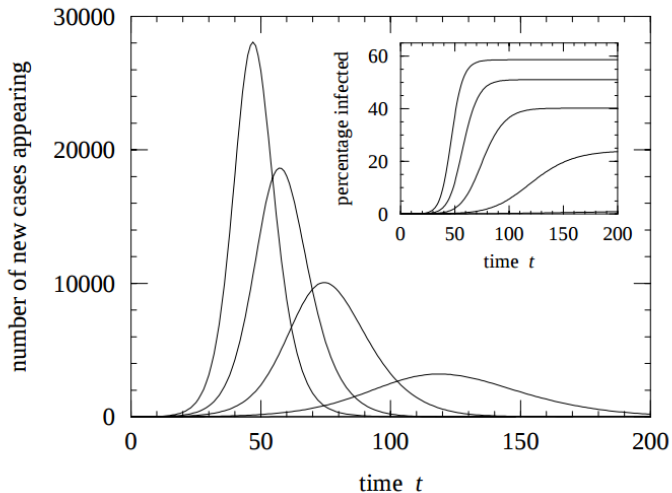
They solved this model for the one-dimensional small-world graph, and the solution was later generalized to higher dimensions [9] and to finite-sized lattices [10]. Infection with 100% efficiency is not a particularly realistic model however, even for spectacularly virulent diseases like Ebola fever, so Newman and Watts also suggested using a site percolation model for disease spreading in which some fraction p of the population are considered susceptible to the disease, and an initial outbreak can spread only as far as the limits of the connected cluster of susceptible individuals in which it first strikes. An

Вывод: существует критическое значение вероятности заражения β_{cr} :

$\beta < \beta_{\text{cr}} \rightarrow$ болезнь умирает;

$\beta \geq \beta_{\text{cr}} \rightarrow$ болезнь стабилизируется.

SIR в графе "Мир тесен"



SIR в графе "Безмасштабная сеть"

В работе [3] к сгенерированной безмасштабной сети применена модель SIR:

2 [cond-mat.stat-mech] 30 Jul 2001

Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks

Yamir Moreno*, Romualdo Pastor-Satorras[†] and Alessandro Vespignani*

* *The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, P.O. Box 586, 34100 Trieste, Italy*

[†] *Departament de Física i Enginyeria Nuclear, Universitat Politècnica de Catalunya Campus Nord, Mòdul B4, 08034 Barcelona, Spain*

(February 1, 2008)

Abstract

We present a detailed analytical and numerical study for the spreading of infections in complex population networks with acquired immunity. We show that the large connectivity fluctuations usually found in these networks strengthen considerably the incidence of epidemic outbreaks. Scale-free networks, which are characterized by diverging connectivity fluctuations, exhibit the lack of an epidemic threshold and always show a finite fraction of infected

Вывод: при любых β болезнь стабилизируется.

Пространственные эффекты SIS в безмасштабном графе

В работе [4] модель SIS применяется к безмасштабному графу, вписанному в евклидово пространство:

Geographical effects on epidemic spreading in scale-free networks

Xin-Jian Xu,¹ Wen-Xu Wang,^{1,2} Tao Zhou,^{1,2} and Guanrong Chen^{1,*}

¹Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong,

83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong SAR, China

²Nonlinear Science Center and Department of Modern Physics,

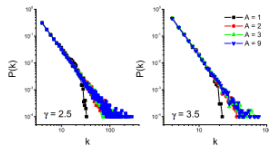
University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230026, China

(Dated: February 2, 2008)

Many real networks are embedded in a metric space: the interactions among individuals depend on their spatial distances and usually take place among their nearest neighbors. In this paper, we introduce a modified susceptible-infected-susceptible (SIS) model to study geographical effects on the spread of diseases by assuming that the probability of a healthy individual infected by an infectious one is inversely proportional to the Euclidean distance between them. It is found that geography plays a more important role than hubs in disease spreading: the more geographically constrained the network is, the more highly the epidemic prevails.

PACS numbers: 89.75.Hc, 87.23.Ge, 05.70.Ln, 87.19.Xx

Accurately modelling epidemic spreading is an important topic in understanding the impact of diseases and the development of effective strategies for their control and containment [1]. The classical mathematical approach for describing disease spreading either ignores the population structure or treats population as distributed in a uniform medium. However, it has been argued in the past few years that many social, biological, and communication systems possess two universal characters, the small-world effect [2] and the scale-free property [3], which can be described by complex networks whose nodes represent individuals and links represent the interactions among them [4]. In view of the wide occurrence of complex networks in nature, it is interesting to study the effects of



Пространственные эффекты SIS в безмасштабном графе

Идея:

расстояние между людьми играет большую роль в распространении эпидемий.

Реализация:

- Сгенерируем безмасштабный граф;
- Спроецируем граф на плоскость методом минимизации общей длины ребер;
- Пусть вероятность заражения обратно пропорциональна расстоянию:

$$\beta_{ij} \sim \frac{1}{d_{ij}^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2..$$

- Запустим модель SIS на таком графе.

Пространственные эффекты SIS в безмасштабном графе

Результат:

При любом $\beta(\alpha)$ эпидемия не умирает полностью, но стабилизируется;

Чем сильнее локализована сеть в пространстве, тем большую часть населения завоевывает болезнь.

- [1] R.M.Anderson and R.M. May, *Infectious Diseases in Humans* (Oxford University Press, Oxford, 1992);
- [2] C.Moore and M.E.J.Newman, *Phys. Rev. E* 61, 5678 (2000); *ibid* 62, 7059 (2000);
- [3] Y.Moreno, R.Pastor-Satorras, and A. Vespignani, *Eur.Phys. J. B* 26, 521 (2002);
- [4] Xin-Jian Xu, Wen-Xu Wang, Tao Zhou, and Guanrong Chen "Geographical effects on epidemic spreading in scale-free networks" (2008).