



*математические  
методы  
распознавания  
образов*



# Математические морфологии на основе неусложняющих фильтров и $\varepsilon$ -форм

*Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю*

[viz@gosniias.ru](mailto:viz@gosniias.ru)

ФГУП “Государственный научно-исследовательский институт  
авиационных систем”

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-07-00914-а  
ММРО, г. Светлогорск, 19-25 сентября 2015*

# ***Уважаемые коллеги!***

Приглашаем на конференцию  
**“Техническое зрение в системах  
управления - 2016”** в марте 2016 г.  
в Москве, в Институте космических  
исследований (**ИКИ РАН**).

**Прием тезисов: 2 ноября - 17 января**

Следите за объявлениями на сайте:

**[tvcs2016.technicalvision.ru](http://tvcs2016.technicalvision.ru)**

# О чем этот доклад

«...Вы в любой процедуре анализа изображений готовы увидеть морфологию...»

Л.М. Местецкий

## Что такое морфология и где ее границы?

Наш ответ до 2014 г.: Морфология это такая схема анализа изображений, в которой форма *известным способом* определяется при помощи *проективного* оператора (*Проективная морфология*)

Наш ответ после 2014 г.: Морфология это такая схема анализа изображений, в которой форма *каким-то способом* определяется при помощи *какого-то* оператора (*Проективная + Диффузная\* морфология*)

Требуется вновь ответить на основные вопросы:

- 1) Какой оператор можно называть морфологическим?
- 2) Как определить форму при помощи такого оператора, и каковы свойства таких форм?

---

\*Yu. V. Vizilter, V. S. Gorbatshevich, A. Yu. Rubis, and S. Yu. Zheltov. Shape-Based Image Matching Using Heat Kernels and Diffusion Maps. // Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci. – Volume XL-3, 2014, pp. 357-364

# **ПРОЕКТИВНЫЕ МОРФОЛОГИИ**

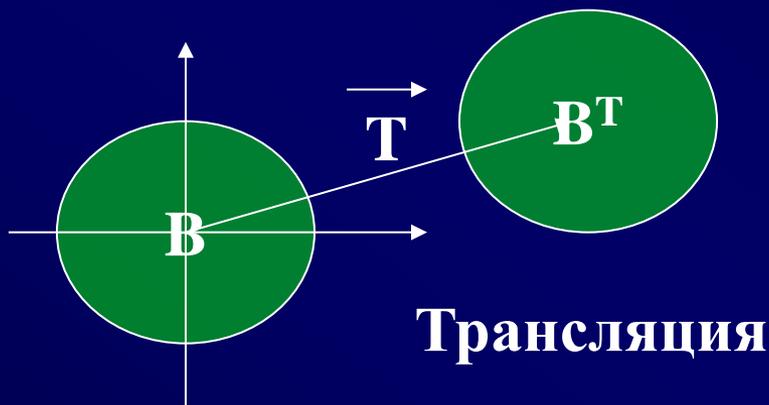
*(краткое напоминание)*

# ММ 1. Математическая морфология Серра

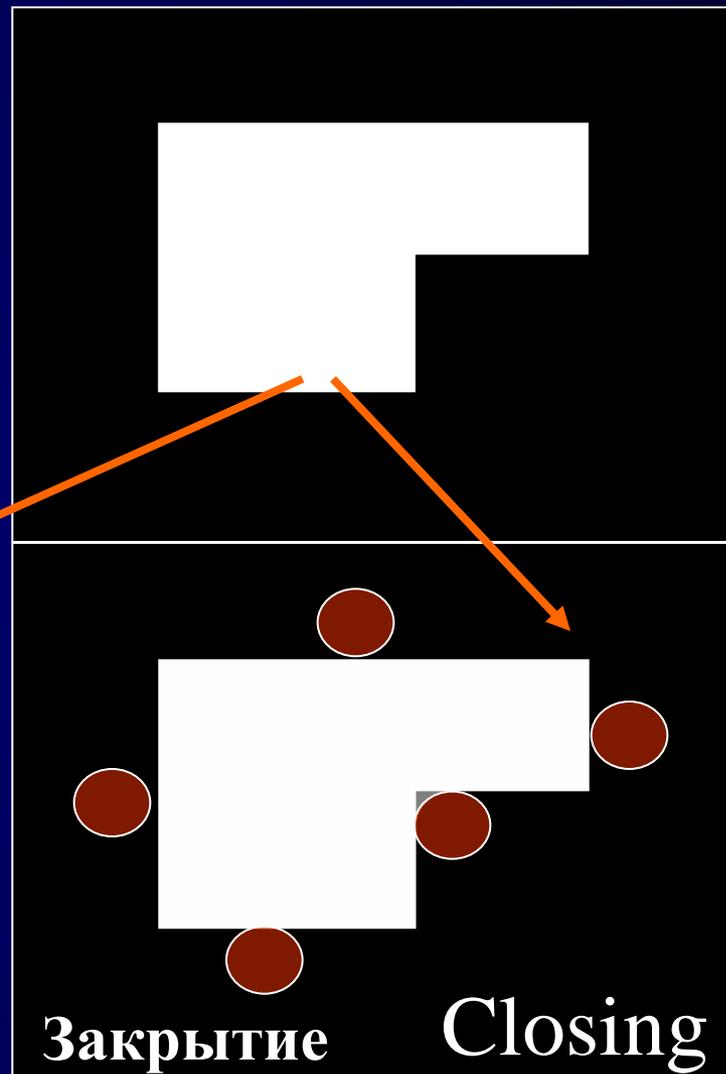
Морфологические фильтры как комбинация структурирующих элементов

Структурирующий элемент (СЭ)

Исходное изображение

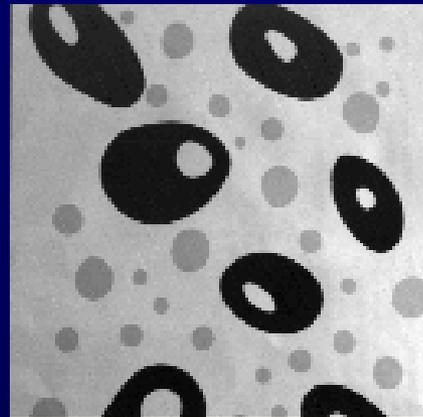


Форма = Комбинация СЭ

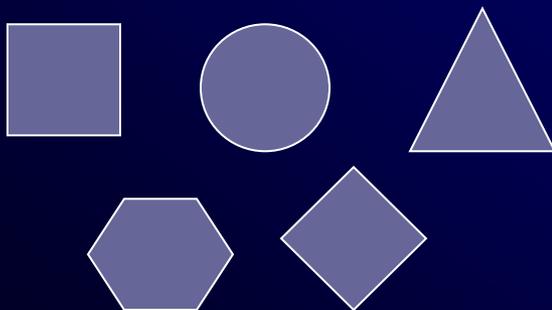


# ММ 1. Математическая морфология Серра

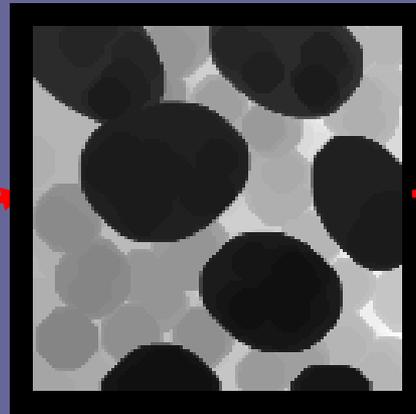
ММ-фильтры = Проекция на Форму



Учет формы  
путем выбора  
структурирующих  
элементов:



ММ-операторы:

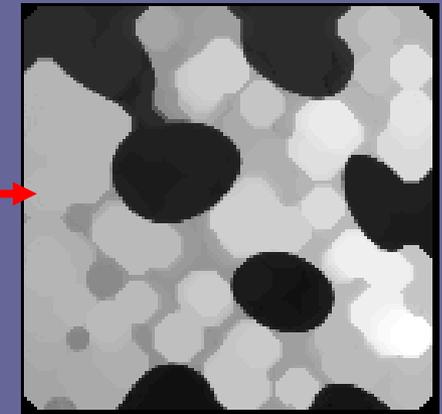


Эрозия (сжатие)

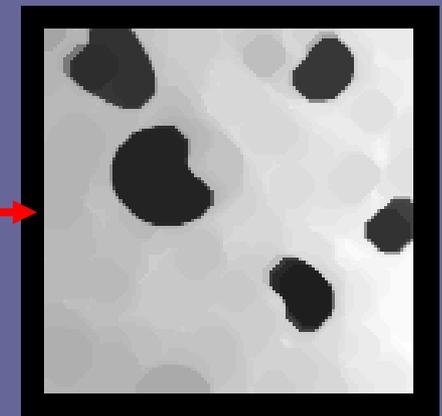


Дилатация  
(расширение)

ММ-проекторы:



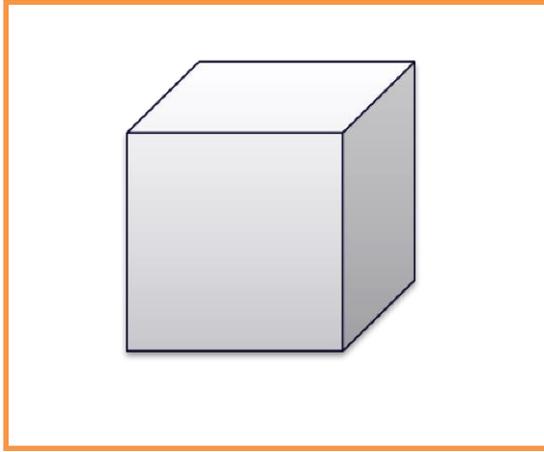
ММ-открытие



ММ-закрытие

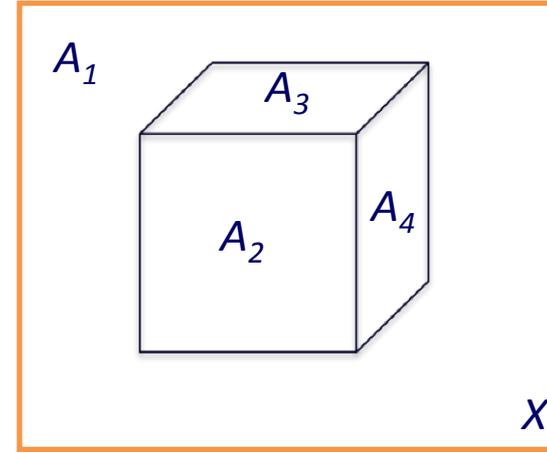
# ММ 2. Морфологический анализ Пытьева

## Форма = Комбинация элементов-областей



Индикаторная функция множества  $A_i$

$$\chi_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A_i \\ 0, & (x, y) \notin A_i \end{cases} \quad (1)$$



Значение яркости(интенсивности) пикселя с координатами  $(x, y)$  (функция изображения)

$$f(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in A_1 \\ c_2, & (x, y) \in A_2 \\ c_3, & (x, y) \in A_3 \\ c_4, & (x, y) \in A_4 \end{cases} \quad (2)$$

$c_1, \dots, c_4$  – яркости областей  $A_1, \dots, A_4$  фона и граней куба

$X$  – поле зрения

*Yu. Pyt'ev. Morphological Image Analysis. Pattern Recognition and Image Analysis. V.3. No1: 19-28, 1993.*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^4 c_i \chi_i(x, y), \quad (x, y) \in X \quad (3)$$

# ММ 2. Морфологический анализ Пытьева

## Проекция на Форму

Изображение , определенное на поле  $X$

$$g(x, y), (x, y) \in X$$

Проекция вектора  $g$   
на плоскость  $V(f)$

Форма изображения  $V(f)$  в виде множества

$$V(f) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y), \\ (x, y) \in X, \quad -\infty < c_i < \infty, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right\}$$

$$P_f g \in V(f) \Rightarrow P_f g = \sum_{i=1}^N c_i^* \chi_{A_i}$$

Определение коэффициентов  $c_i^*$

$$\rho_2(g, V(f)) = \min \left\{ \rho_2^2 \left( g, \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y) \right) \mid c_i, -\infty < c_i < +\infty, i = 1, \dots, N \right\}$$

Дифференцируя  $\rho_2^2 \left( g, \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}(x, y) \right)$  по  $c_i$ , получим решение задачи в виде

$$c_i^* = \frac{\int_X \chi_{A_i}(x, y) g(x, y) dx dy}{\int_X \chi_{A_i}(x, y) dx dy} = \frac{(\chi_{A_i}, g)}{\|\chi_{A_i}\|^2}$$

$$P_f g = \sum_{i=1}^N \frac{(\chi_{A_i}, g)}{\|\chi_{A_i}\|^2} \chi_{A_i}(x, y)$$

$(\chi_{A_i}, g)$  - интеграл яркостей по области  $A_i$

$\|\chi_{A_i}\|^2$  - площадь области  $A_i$

**Обобщение 1: Проективная морфология  
как алгебра распознающих операторов**  
*(абстрагируемся от структурных моделей)*

# Идея 1: Распознающие операторы = проекторы

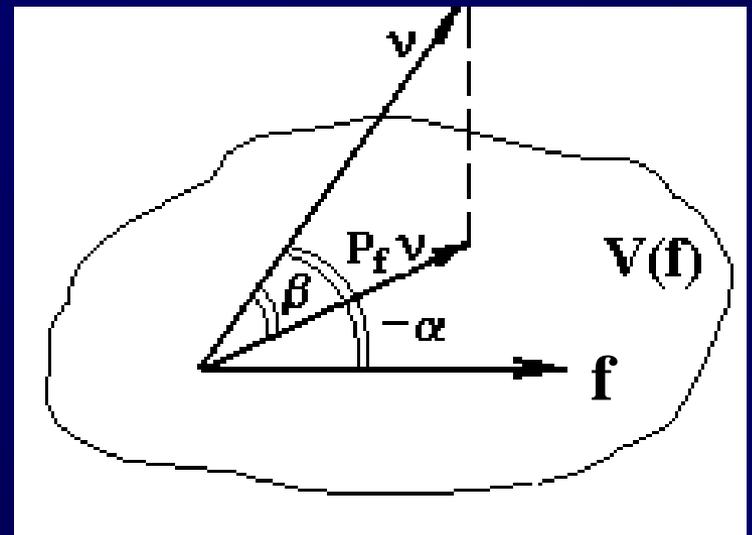
1) Два эквивалентных способа описания формы:

- Форма-многообразие (множество образов данной формы);
- Форма-проектор (аппроксимация образом данной формы).

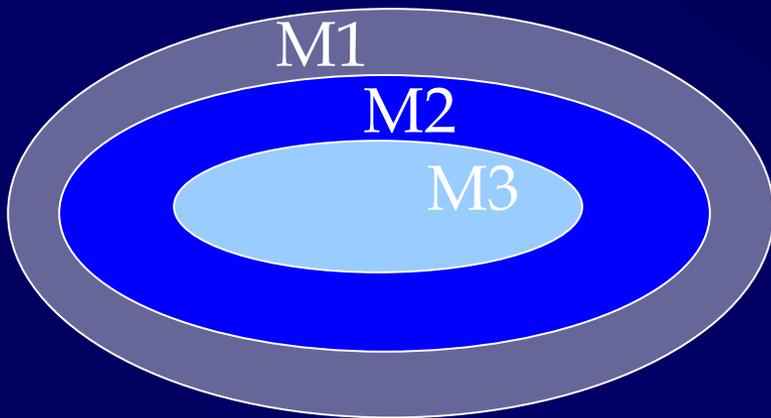
Многообразие = Стабильное множество проектора

2) Сравнение изображения с формой = *сравнение изображения с его проекцией на форму.*

3) Выделение отличий = *вычисление разности между изображением и его проекцией.*

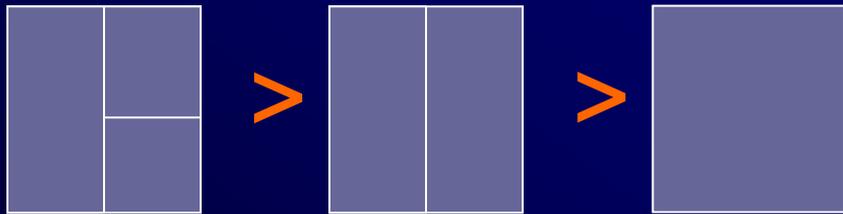


## Идея 2: *Формы упорядочены по сложности*



$$M3 \subseteq M2 \subseteq M1$$

### *Морфология Пытьева*



### *Морфология Серра*



Важный факт: *Морфологические операторы не усложняют форму.*

1) Формы образуют *решетку* (complete lattice) *по сложности*.

2) Отношения частичного порядка «сложнее/проще по форме» :

- *Для форм-многообразий:* «если все изображения первой формы принадлежат также и второй форме, то первая форма проще (не сложнее) второй»;

- *Для форм-операторов* (проекторов): «если применение второго проектора не изменяет результата применения первого проектора, то первая форма проще (не сложнее) второй».

# Однако теперь мы знаем, что морфология может быть и непроективной: Диффузная морфология

Тепловые ядра и диффузный оператор (определения)

(Lafon, 2004), (Coifman, Lafon, 2006), (Coifman et al, 2007)

Пусть любой пиксель изображения  $f$  может быть описан некоторым вектором  $\mathbf{v}(x, y)$ . Тогда для  $\varepsilon > 0$ :

- Тепловое ядро

$$h_F(x, y, u, v) = \exp - \frac{\|\mathbf{v}(x, y) - \mathbf{v}(u, v)\|^2}{\varepsilon}$$

- Соответствующее нормализованное диффузное ядро

$$p_F(x, y, u, v) = h_F(x, y, u, v) / \sum_a \sum_b h_F(x, y, a, b)$$

- Соответствующий диффузный оператор (фильтр)

$$P_F f(x, y) = \sum_u \sum_v p_F(x, y, u, v) f(u, v)$$

Тепловое ядро описывает форму конкретного эталона через функцию попарного сходства его точек

Тепловому ядру соответствует диффузный оператор

Coifman, R., Lafon, S., 2006. Diffusion maps, Appl. Comp. Harm. Anal.

Yu. V. Vizilter, V. S. Gorbatshevich, A. Yu. Rubis, and S. Yu. Zheltov. Shape-Based Image Matching Using Heat Kernels and Diffusion Maps. // Int. Arch.

Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci. - Volume XL-3, 2014, pp. 357-364

# Обобщенный подход к сравнению по форме

## Идея сравнения изображений по форме:

Создается диффузный фильтр, который “почти сохраняет” изображение эталона  $f$  и затем применяется для тестового изображения  $g$ .

Если энергия  $g$  “сохранена достаточно”, тогда это “подобная форма  $f$ ”, иначе – имеются различия в форме.

## Метод оценки соответствия изображений по форме:

1. Выбирается некоторый фрагмент изображения  $f$  как шаблон.
2. Вычисляется тепловое ядро  $h_F$  и нормализуется диффузное ядро  $p_F$ .
3. Вычисляются фильтрованные изображения  $P_F f$  и  $P_O f$ .
4. Для всех тестовых фрагментов  $g$  в данной области интереса (соответствие области):
  - 4.1. Вычисляются фильтрованные изображения  $P_F g$  и  $P_O g$ .
  - 4.2. Вычисляется *морфологический диффузный коэффициент корреляции* (МДКК)

$$K_{MD}(g, F) = \frac{\|P_F g - P_O g\| \|f - P_O f\|}{\|P_F f - P_O f\| \|g - P_O g\|}$$

**МКК изменяет форму, но работает**

5. Берется фрагмент  $g$  с лучшим значением МДКК как *лучшее соответствие  $f$*  в области интереса.

# Морфологические свойства диффузного фильтра

**Сохранение формы эталона при устойчивости к шуму:**

Диффузный фильтр  $P_F$  “почти сохраняет” видимую форму  $f$  и подавляет шум (Рис.1).

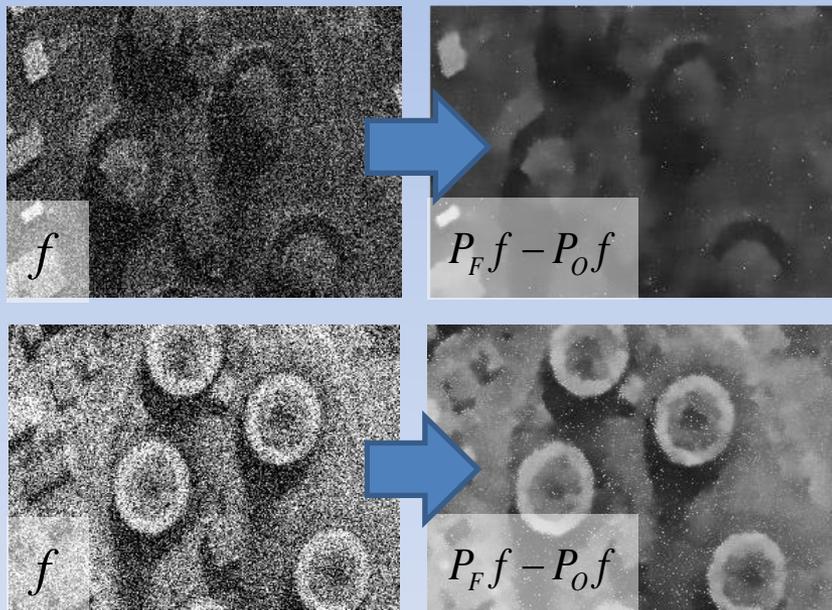


Рисунок 1. Пример диффузного фильтра TV и IR изображений.

**Подавление изображений других форм:** Диффузный фильтр  $P_F$  “почти сохраняет” изображения с той же самой видимой формой  $f$  и подавляет изображения других форм (Рис.2).

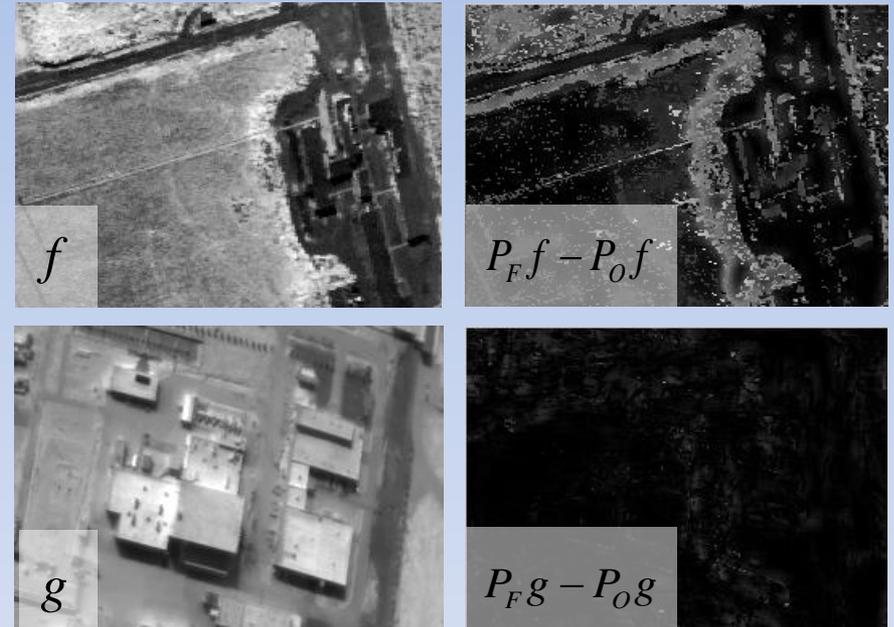


Рисунок 2. Пример морфологической нормализации изображения.  $P_O$  – скользящее среднее в окне того же размера, что и ядро оператора  $P_F$ .

# Три способа описания диффузной формы

Пусть изображение описано 2D функцией  $f(x, y): \Omega \rightarrow R$ ,  $\Omega \subset R^2$

где  $R$  – действительная прямая,  $R^2$  – плоскость,  $\Omega$  – прямоугольный кадр.

Изображения – элементы Гильбертова пространства  $L^2(\Omega)$  со скалярным произведением  $(f, g)$  и нормой  $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ .

Реляционной моделью диффузной формы  $F$  изображения  $f$  будем называть функцию парного отношения схождения точек изображения

**Форма-ядро**

$h_F(x, y, x, y) \geq h_F(x, y, u, v)$ ;  $h_F(x, y, u, v) \geq h_F(u, v, x, y)$ , и при этом существует однозначная функция измерения схождения  $\eta$ , что

$$\eta(f(x, y), f(u, v)) = h_F(x, y, u, v).$$

Операторной моделью диффузной формы  $F$  будем называть оператор диффузного преобразования  $P_F$ ,

**Форма-оператор**

$$P_F g(x, y) = \iint_{\Omega} p_F(x, y, u, v) g(u, v) du dv$$

$$p_F(x, y, u, v) \geq 0; p_F(x, y, x, y) \geq p_F(x, y, u, v);$$

$$\iint_{\Omega} p_F(x, y, u, v) du dv = 1;$$

$$\iiint_{\Omega \times \Omega} \int p_F^2(x, y, u, v) dx dy du dv < \infty.$$

При этом всякой реляционной модели диффузной формы может быть поставлена в соответствие ее операторная модель:

$$p_F(x, y, u, v) = h_F(x, y, u, v) / \iint_{\Omega} h_F(x, y, a, b) da db$$

Диффузной формой  $F$  изображения  $f(x, y)$  назовем собственное пространство оператора диффузного преобразования  $P_F$

$$F = \text{span}\{\lambda_1 \varphi_1(x, y), \dots, \lambda_n \varphi_n(x, y)\}$$

**Форма-собственное пространство**

где  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  – собственные числа, а  $\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)\}$  – собственные функции оператора  $P_F$ :  $P_F \varphi_i(x, y) = \lambda_i \varphi_i(x, y), i = 1, \dots, n$ .

# Это прямое обобщение морфологии Пытьева

Потому что при выборе теплового ядра вида

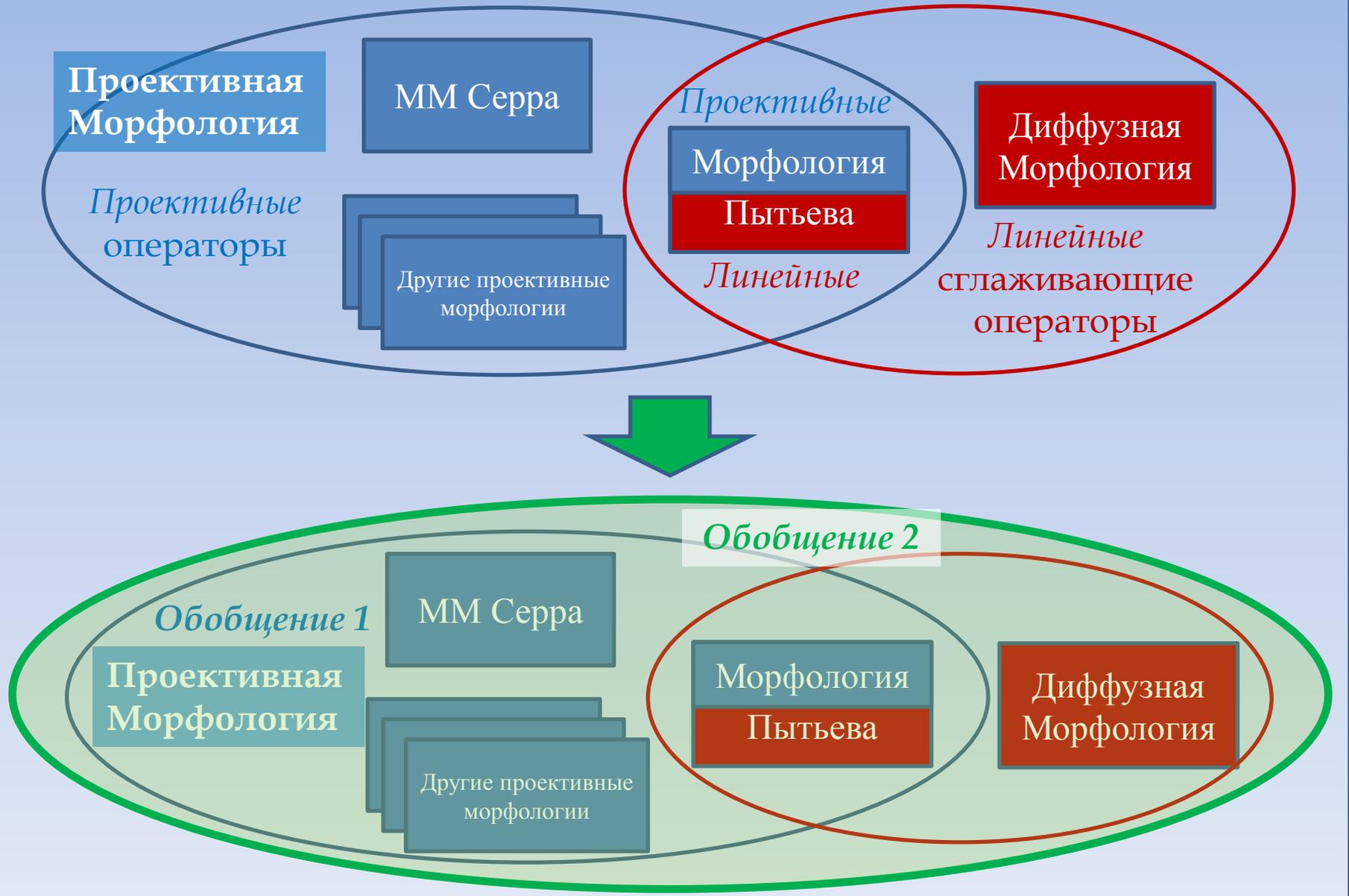
$$h_F^*(x, y, u, v) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(x, y) = f(u, v); \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

отношение сходства  $\eta$  превращается в отношение эквивалентности «равно по яркости», которое разбивает кадр на непересекающиеся области  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ .  
Вследствие этого морфологический диффузный оператор имеет  $n$  собственных функций, равных характеристическим функциям областей  $\varphi_i(x, y) = \chi_{F_i}(x, y)$ .  
Таким образом, **диффузная форма в частном случае превращается в мозаичную форму  $F$**  и для любого  $g(x, y) \in L^2(\Omega)$  диффузный морфологический фильтр  $P_F$  превращается в **пытьевский проектор**.

Однако теперь у нас **два разных обобщения** морфологии Пытьева:



# А хотелось бы иметь единую морфологическую теорию ...



# Обобщение 2: Морфология без структурных моделей и проекторов

**Базовая идея 1:** Морфологический фильтр – распознающий оператор в том смысле, что он по-разному реагирует на образы «своей» и «чужой» формы («своего» и «чужого» класса).

**Базовая идея 2:** Морфологический фильтр не усложняет форму.

*Отсюда морфологический фильтр – это неусложняющий фильтр, согласованный по форме с неким изображением или классом изображений, такой что:*

- «свои» изображения *не изменяются или изменяются слабо;*
- «чужие» изображения *упрощаются* тем сильнее, чем сильнее отличаются от «своих».

Осталось только определить, что такое «сложность» и что такое «согласованность»

# Перейдем к формализации. Обозначения:

$\Omega$  - множество (пространство) образов (изображений),  
характерных для некоторой морфологической системы;

$\psi: \Omega \rightarrow \Omega$  - морфологический оператор;

$\Psi$  - множество морфологических операторов (некоторого  
типа), характерных для некоторой морфологической системы;

$a, b, c, \dots \in \Omega$  - образы (изображения);

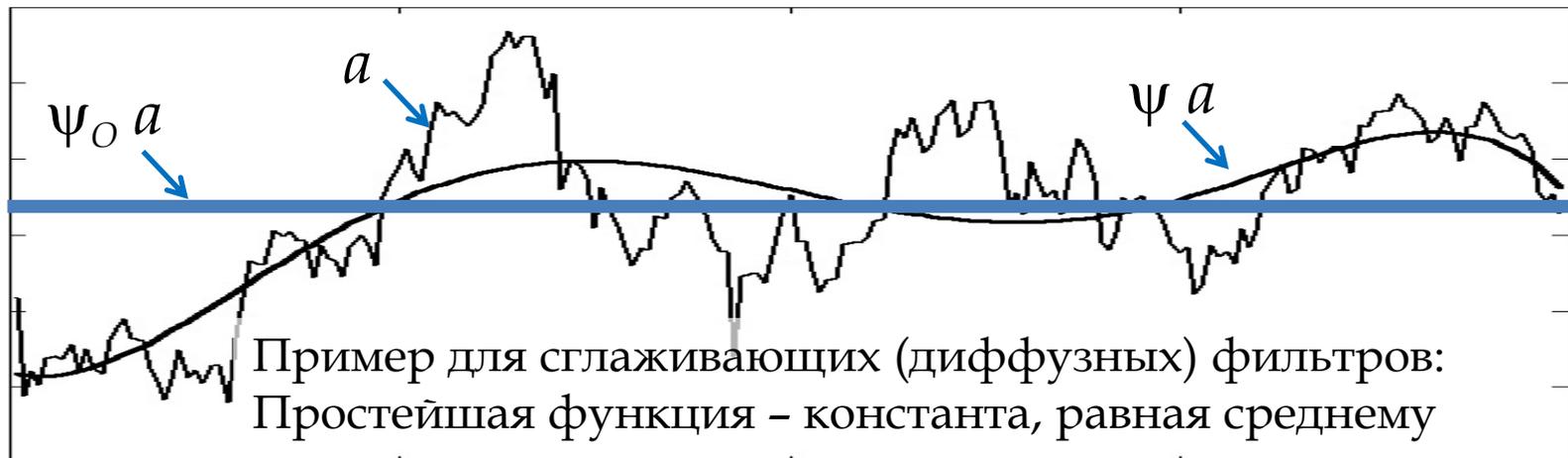
$A, B, C, \dots \in \Omega^\Omega$  - соответствующие формы-многообразия в  
пространстве образов (формы как множества образов);

$\psi_A, \psi_B, \psi_C, \dots \in \Psi$  - соответствующие формы-операторы  
(морфологические фильтры по форме).

# Как обнаружить «упрощение» образа, не анализируя его структуру (наблюдение)

- 1) Все рассмотренные морфологические фильтры обладают свойством сохранения простейших изображений (констант).
- 2) Для любого конкретного образа (изображения) существует такой простейший образ, что результат морфологической фильтрации всегда ближе к нему (то есть проще), чем исходное изображение:

$$\forall a \in \Omega, \|\psi a - \psi_0 a\| \leq \|a - \psi_0 a\|.$$

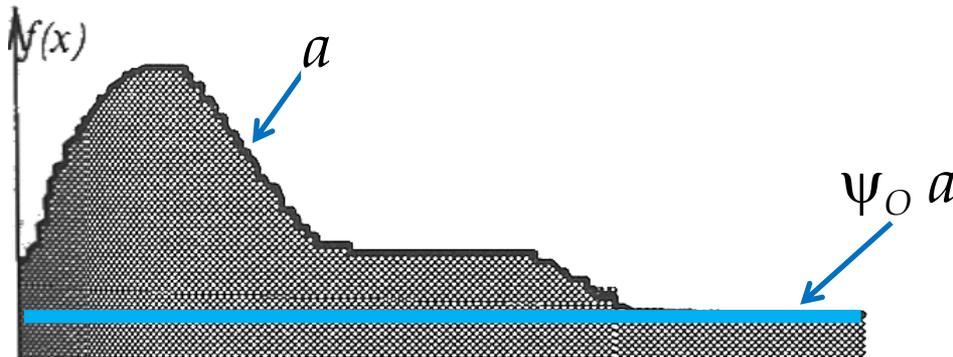


# Обобщение 2: Неусложняющие операторы в метрическом пространстве

Пусть имеется метрическое пространство образов  $\langle \Omega, d_\Omega \rangle$  с метрикой  $d_\Omega$ . Пусть также задано множество простейших образов  $O \subseteq \Omega$ , определен проектор на множество  $O$ :

$$\psi_O: \Omega \rightarrow O, \psi_O^2 = \psi_O.$$

Тогда для любого образа  $a \in \Omega$  его проекцию  $\psi_O a$  будем называть *предельным упрощением*, а сам проектор  $\psi_O$  – *оператором предельного упрощения*.



Пример предельного упрощения для ММ-фильтров типа открытия:  
Простейшая функция – константа, равная минимуму

# Обобщение 2: Неусложняющие операторы в метрическом пространстве

Определение. Неусложняющим оператором на  $\Omega$  назовем такой оператор  $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ , который

- сохраняет простейшие образы

$$\forall o \in O, \psi o = o;$$

- переставим с оператором предельного упрощения

$$\psi \psi o = \psi o \psi = \psi o;$$

- монотонно не увеличивает расстояние до предельного упрощения

$$\forall a \in \Omega, d_{\Omega}(\psi a, \psi o a) \leq d_{\Omega}(a, \psi o a).$$

Иными словами, неусложняющий оператор это сжимающее отображение на  $\Omega$ , центрированное относительно множества простейших образов.

# Обобщение 2: Морфология упрощающих фильтров

*Морфологической системой* будем называть набор элементов

$\langle \Omega, d_\Omega, O, \psi_O, \Psi \rangle$ , таких что

$O \subseteq \Omega$ , // множество простейших образов - «начало координат»

$\Psi = \{ \psi: \Omega \rightarrow \Omega \}$ , // множество фильтров некоторого заданного типа

$\psi_O \in \Psi$ ,  $\psi_O: \Omega \rightarrow O$ ,  $\psi_O^2 = \psi_O$ , // проектор предельного упрощения

$\forall o \in O$ ,  $\psi o = o$ , // фильтр сохраняет простейшие образы

$\forall a \in \Omega$ ,  $d_\Omega(\psi a, \psi_O a) \leq d_\Omega(a, \psi_O a)$ . // фильтр приближает к предельному упрощению

Для краткости будем далее называть неусложняющие операторы *упрощающими фильтрами* (simplification filter, simplifier), а данную схему в целом – *морфологией упрощающих фильтров*.

# Обобщение 2: Сложность. Порядок упрощающих фильтров по силе упрощения

*Сложностью*  $Q(x)$  образа  $x$  будем называть его удаление от предельного упрощения:

$$Q(x) = d_{\Omega}(x, \psi_0 x).$$

Соответственно *степень* или *сила упрощения*  $Q(\psi, x)$  образа  $x$  фильтром  $\psi$  тем больше, чем меньше сложность  $\psi x$ :

$$Q(\psi, x) = Q(\psi x) = d_{\Omega}(\psi x, \psi_0 x).$$

Определение. Фильтр  $\psi_A \in \Psi$  упрощает изображения не слабее, чем  $\psi_B \in \Psi$ , если

$$\forall x \in \Omega: Q(\psi_A, x) \leq Q(\psi_B, x) \Leftrightarrow_{(\text{by definition})} \psi_A \leq \psi_B.$$

Такое *отношение по силе упрощения* является отношением частичного порядка на  $\Psi$  и определяет решетку с инфимумом и супремумом  $\psi_0$  и  $\psi_I$ .

И это пока все о «сложности». Попробуем теперь формализовать «согласованность»

## Согласованность по форме фильтра, многообразия и эталона в проективных морфологиях (напоминание)

*Форма-многообразие* есть множество стабильных элементов формы-проектора:

$$A = \{x \in \Omega: \psi_A x = x\}.$$

В морфологии Пытьева и других компаративных морфологиях, кроме того, оператор  $\psi_A$  является *согласованным с формой эталона  $a$* , если

- 1)  $\psi_A a = a$  ( $\psi_A$  **сохраняет = не модифицирует** эталон  $a$ );
- 2)  $\forall \psi \in \Psi, \psi a = a \Rightarrow \psi_A \leq \psi$  ( $\psi_A$  фильтрует не слабее, чем любой другой оператор, сохраняющий  $a$ ).

При этом отношение  $\psi_A \leq \psi_B \Leftrightarrow A \subseteq B$  переносится и на эталоны: считается, что эталон  $a$  *не сложнее по форме* эталона  $b$ .

## Обобщение 2: Модификация. Связь эталона, фильтра и многообразия: $\varepsilon$ -фильтры и $\varepsilon$ -формы

*Степенью модификации* образа  $x$  фильтром  $\psi$  назовем величину

$$J(\psi, x) = d_{\Omega}(\psi x, x).$$

Зафиксируем некоторое  $\varepsilon \geq 0$ .

Определение. Фильтр  $\psi_A \in \Psi$  будем называть  $\varepsilon$ -фильтром, согласованным с формой эталона  $a \in \Omega$ , если

$$J(\psi_A, a) \leq \varepsilon.$$

Определение. Множество  $\varepsilon$ -стабильных элементов фильтра

$$A_{\varepsilon} = \{x \in \Omega: J(\psi_A, x) \leq \varepsilon\}.$$

будем называть  $\varepsilon$ -формой эталона  $a \in \Omega$ , если  $\psi_A$  является  $\varepsilon$ -фильтром для  $a$ .

При  $\varepsilon=0$  получаем проективную морфологию: *0-фильтры-проекторы и 0-формы-стабильные многообразия.*

## Обобщение 2: Частичный порядок по степени модификации и вложенность $\varepsilon$ -форм

Определим отношение частичного порядка между фильтрами по степени модификации («модифицирует не слабее») как

$$\psi_A \leq_M \psi_B \Leftrightarrow_{(\text{by definition})} \forall x \in \Omega: J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x).$$

Очевидно,

$$\forall x \in \Omega: J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \geq 0: A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon,$$

То есть

$$\psi_A \leq_M \psi_B \Leftrightarrow \forall \varepsilon \geq 0: A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon.$$

Таким образом, между отношением «модифицирует не слабее» для  $\varepsilon$ -фильтров и отношением включения для  $\varepsilon$ -форм такая же связь, как между относительной сложностью фильтров-проекторов и вложенностью 0-форм.

И это пока все о согласованности через модификацию.  
Но не пора ли вновь вспомнить про упрощение?

# Связь степени модификации и степени упрощения (наблюдение)

Пример 1. Пытьевская морфология мозаичных изображений.

$\Omega_{\text{MIA}}$  - множество двумерных функций с метрикой  $L^2$ :

$$Q(\psi, x) = \|\psi f - \psi_0 f\|_{L^2}, \quad \text{Сложность } Q - \text{норма проекции}$$

$$J(\psi, f) = \|f - \psi f\|_{L^2}. \quad \text{Степень модификации } J - \text{норма разности}$$

$\Psi_{\text{MIA}}$  - множество проекций на мозаичные формы со всеми возможными формами разбиения кадра. При этом в силу ортогональности проектора справедлива теорема Пифагора:

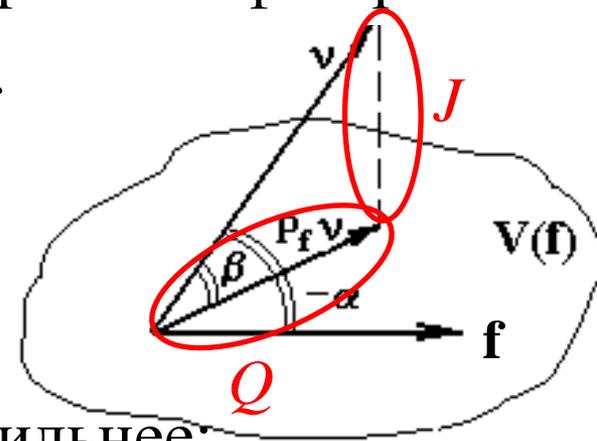
$$\|f - \psi f\|_{L^2}^2 + \|\psi f - \psi_0 f\|_{L^2}^2 = \|f - \psi_0 f\|_{L^2}^2.$$

Отсюда

$$J(\psi, f)^2 + Q(\psi, f)^2 = \text{const}(\psi),$$

то есть пытьевский проектор, который сильнее упрощает, всегда и модифицирует сильнее:

$$\forall \psi_A, \psi_B \in \Psi_{\text{MIA}}: \forall x \in \Omega_{\text{MIA}}, \quad Q(\psi_A, x) \leq Q(\psi_B, x) \Leftrightarrow J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x).$$



# Связь степени модификации и степени упрощения (наблюдение)

Пример 2. Полутонная ММ на базе структурирующих элементов (GMMSE).

$\Omega_{\text{GMMSE}}$  - множество двумерных функций с метрикой  $L^1$ :

$$J(\psi, f) = \|f - \psi f\|_{L^1},$$

$$Q(\psi, x) = \|\psi f\|_{L^1}.$$

$\Psi_{\text{GMMSE}}$  - множество открытий, причем в силу монотонности

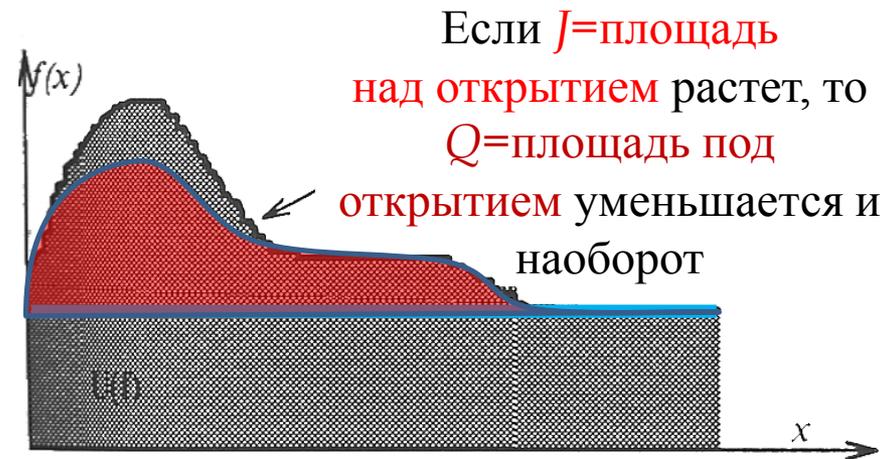
$$\psi f(x, y) \leq f(x, y).$$

Отсюда

$$J(\psi, f) + Q(\psi, f) = \|f - \psi f\|_{L^1} + \|\psi f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} = \text{const}(\psi).$$

Иными словами, фильтр-открытие, который сильнее упрощает, всегда и модифицирует сильнее:

$$\forall \psi_A, \psi_B \in \Psi_{\text{GMMSE}}: \forall x \in \Omega_{\text{GMMSE}}, Q(\psi_A, x) \leq Q(\psi_B, x) \Leftrightarrow J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x).$$



## Связь степени модификации и степени упрощения. Обобщение 2.1 (поправка!)

**Наблюдение:** *чем проще форма, тем сильнее фильтрует согласованный с ней фильтр, и наоборот.* Именно это свойство обеспечивает связь между сложностью форм, определенной в терминах сложности структурной модели (чему соответствует порядок по характеристике  $Q$ ), сложностью в терминах силы фильтрации соответствующих фильтров (чему соответствует порядок по характеристике  $J$ ) и сложностью в терминах форм-многообразий (чему соответствует порядок по включению).

**Вывод:** *не всякий упрощающий фильтр имеет право быть морфологическим фильтром. От морфологических фильтров следует требовать не только того, чтобы они не усложняли фильтруемые образы, но и того, чтобы они имели право модифицировать (искажать) их лишь в той степени, в которой упрощают.*

## Обобщение 2.1: Упрощающие модификаторы (УМ-фильтры)

Определение. Упрощающими модификаторами (УМ-фильтрами) будем называть такие фильтры, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

- неусложнение

$$\forall x \in \Omega, \forall \psi \in \Psi: Q(\psi x) \leq Q(x);$$

- монотонная зависимость модификации от упрощения

$$\forall \psi_A, \psi_B \in \Psi, \forall x \in \Omega, Q(\psi_A, x) \leq Q(\psi_B, x) \Leftrightarrow J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x).$$

Для таких УМ-фильтров отношения частичного порядка (по силе упрощения и по силе модификации) эквивалентны:

$$\psi_A \leq_M \psi_B \Leftrightarrow \psi_A \leq \psi_B.$$

Как следствие, мы можем объединить ранее полученные утверждения о свойствах фильтров и соответствующих форм-многообразий.

## Обобщение 2.1: Морфология упрощающих модификаторов (УМ-морфология)

Определение. Морфологической системой на базе УМ-фильтров (УМ-морфологией) называется набор элементов

$$\langle \Omega, \Psi, J, Q \rangle,$$

находящихся между собой в следующих отношениях

$$\Psi = \{ \psi: \Omega \rightarrow \Omega \}, \psi_I \in \Psi: \forall x \in \Omega: \psi_I x = x;$$

$$J: \Psi \times \Omega \rightarrow R, \forall \psi \in \Psi, \forall x \in \Omega, J(\psi_I, x) \leq J(\psi, x),$$

$$\psi \neq \psi_I \Rightarrow J(\psi_I, x) < J(\psi, x).$$

$$Q: \Psi \times \Omega \rightarrow R, Q(\psi, x) = Q(\psi x) \Leftrightarrow Q: \Omega \rightarrow R;$$

$$Q(\psi_I, x) = Q(\psi_I x) = Q(x);$$

$$\forall x \in \Omega, \forall \psi \in \Psi: Q(\psi x) \leq Q(x);$$

$$\forall \psi_A, \psi_B \in \Psi, \forall x \in \Omega, Q(\psi_A, x) \leq Q(\psi_B, x) \Leftrightarrow J(\psi_A, x) \geq J(\psi_B, x).$$

Все свойства морфологических фильтров и форм-многообразий могут быть выведены из данного определения.

# Критериальные морфологии на основе регуляризации и спектры сложности (те же J и Q!)

Критерий морфологической регуляризации по сложности:

$$F_{\alpha}(A, L) = J(A, L) + \alpha \times Q(L)$$

Морфологический фильтр по сложности:

$$\Psi_{\alpha} A = \operatorname{argmin}_{L \in \Omega} F_{\alpha}(A, L)$$

Критериальный морфологический спектр по параметру сложности  $\alpha$ :

$$PS(A, \alpha) = \partial J(A, L) / \partial \alpha$$

Решение задачи оптимизации единственно, если  $J$  и  $Q$  монотонно связаны. Фильтр является проектором, если  $J(A, L)$  - метрика.

*Визильтер Ю.В. Обобщенная проективная морфология. «Компьютерная оптика», Том 32, №4. 2008, С.384-399.*

*Визильтер Ю.В., Сидякин С.В. Построение спектров морфологической сложности для двумерных фигур и изображений // Вестник компьютерных и информационных технологий, N11, 2012, с.3-8.*

## Обобщение 2.1: Степень упрощения и степень модификации

В УМ-морфологии мы также можем не определять  $J$  и  $Q$  через метрику, а принять за базовые лишь их свойства:

*Степенью упрощения*  $Q(\psi, x)$  образа  $x$  оператором  $\psi$  будем называть любую такую функцию, которая оценивает упрощение образа только по некоторой заданной «абсолютной» сложности  $Q(\psi x)$  результирующего образа  $\psi x$ :

$$Q: \Psi \times \Omega \rightarrow R^+, Q(\psi, x) = Q(\psi x) \iff Q: \Omega \rightarrow R^+.$$

*Степенью модификации*  $J(\psi, x)$  образа  $x$  оператором  $\psi$  будем называть любую такую функцию, которая обладает следующими свойствами:

$$J: \Psi \times \Omega \rightarrow R, \forall \psi \in \Psi, \forall x \in \Omega, J(\psi_I, x) \leq J(\psi, x),$$

$$\psi \neq \psi_I \Rightarrow J(\psi_I, x) < J(\psi, x).$$

Определения на основе расстояний являются частными случаями этих более общих определений.

# УМ-фильтры и критериальная морфология.

## УМ-спектры и критериальные спектры

Определение. Морфологическим УМ-спектром образа  $x \in \Omega$  по параметру сложности  $\alpha$  на базе:

- УМ-морфологии  $\langle \Omega, \Psi, J, Q \rangle$ ,
- критерия регуляризации по сложности

$$J(\psi, x) + \alpha Q(\psi x) \rightarrow \min(\psi \in \Psi)$$

- соответствующего критериального фильтра

$$\psi_\alpha = \operatorname{argmin}_{(\psi \in \Psi)} J(\psi, x) + \alpha Q(\psi x),$$

называется график зависимости

$$PS(x, \alpha) = \partial J(\psi_\alpha(x), x) / \partial \alpha.$$

*Критериальным спектром мы по-прежнему будем называть такой частный случай УМ-спектра, когда критериальный фильтр  $\psi_\alpha$  является проектором.*

# Типы УМ-фильтров и УМ-морфологий

Совпадение базовых структур критериальной и УМ-морфологий позволяет с другой стороны взглянуть на мотивацию данной работы.

## Возможные типы УМ-фильтров:

- Проективные, сохраняющие эталон  
(*Пытьевская морфология*);
- Непроективные,  $\varepsilon$ -меняющие эталон  
(*Диффузная морфология*);
- Проективные,  $\varepsilon$ -меняющие эталон  
(*Морфология с регуляризацией формы эталона*).

И поскольку идеальные эталоны чистой формы встречаются крайне редко, значит,  $\varepsilon$ -фильтры и  $\varepsilon$ -формы, возможно, действительно более адекватный язык для компаративной морфологии с точки зрения ее применения на практике.

# Заключение

До сих пор наиболее общими с математической точки зрения алгебраическими описаниями теорий формы (морфологий) являлись формализмы проективных математических морфологий на основе теории решеток и на основе «просеивания» (sieving) элементов, составляющих фильтруемый образ.

В данной работе впервые предложен принципиально новый подход к формальному описанию математических морфологий, основанный на понятиях УМ-фильтров и  $\varepsilon$ -форм.

# ССЫЛКИ

1. Yu. V. Vizilter, V. S. Gorbatshevich, A. Yu. Rubis, and S. Yu. Zheltov. *Shape-Based Image Matching Using Heat Kernels and Diffusion Maps. // Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci. – Volume XL-3, 2014, pp. 357-364.*
2. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. *Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010. 336 с.*
3. Serra J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, London: Acad. Press, 1982.*
4. Pavel M. *Fundamentals of Pattern Recognition. Marcel Dekker. Inc., New York, 1989.*
5. Визильтер Ю.В. *Обобщенная проективная морфология. «Компьютерная оптика», Том 32, №4. 2008, С.384-399.*
6. Maragos P. *Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation. IEEE Trans.on pattern analysis, machine intelligence, Vol, II, No 7, July 1989.*
7. Визильтер Ю.В., Сидякин С.В. *Построение спектров морфологической сложности для двумерных фигур и изображений // Вестник компьютерных и информационных технологий, N11, 2012, с.3-8.*

# ***Спасибо за внимание!***

## **Математические морфологии на основе неусложняющих фильтров и $\varepsilon$ -форм**

*Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю*

[viz@gosniias.ru](mailto:viz@gosniias.ru)

ФГУП “Государственный научно-исследовательский институт  
авиационных систем”

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-07-00914-а  
ММРО, г. Светлогорск, 19-25 сентября 2015*

# ***Спасибо за внимание!***

Приглашаем на конференцию  
**“Техническое зрение в системах  
управления - 2016”** в марте 2016 г.  
в Москве, в Институте космических  
исследований (**ИКИ РАН**).

**Прием тезисов: 2 ноября - 17 января**

Следите за объявлениями на сайте:

**[tvcs2016.technicalvision.ru](http://tvcs2016.technicalvision.ru)**

# Неусложняющие фильтры и их свойства (Приложение)

**Пример 1.** В бинарной ММ Серра морфологические фильтры  
- сохраняют включение фигур

$$a, b \in \Omega, a \subseteq b \Rightarrow \psi a \subseteq \psi b;$$

- монотонны относительно включение

$$\psi a \subseteq a \text{ (неувеличивающий фильтр – } \textit{открытие}),$$

$$a \subseteq \psi a \text{ (неуменьшающий фильтр – } \textit{закрытие});$$

- открытие  $\psi_o$  сохраняет пустое множество  $\emptyset$  (минимальный элемент булевой решетки)

$$\psi_{Open} \emptyset = \emptyset,$$

а закрытие сохраняет заполненный кадр  $I$  (максимальный элемент булевой решетки)

$$\psi_{Close} I = I.$$

# Неусложняющие фильтры и их свойства (Приложение)

**Пример 2.** В полутоновой ММ Серра морфологические фильтры

- сохраняют частичный порядок по яркости (доминирование)

$$f(x,y), g(x,y) \in \Omega, f(x,y) \geq g(x,y) \Rightarrow \psi f \geq \psi g,$$

- монотонны относительно доминирования

$$\psi f(x,y) \leq f(x,y) \text{ (неувеличивающий фильтр – } \textit{открытие}),$$

$$\psi f(x,y) \geq f(x,y) \text{ (неуменьшающий фильтр – } \textit{закрытие}).$$

- открытие сохраняет минимальное изображение  $O(x,y) \equiv 0$ ,

- закрытие сохраняет максимальное изображение  $I(x,y) \equiv I_{max}$ .

# Неусложняющие фильтры и их свойства (Приложение)

**Пример 3.** В морфологии Пытьева морфологический проектор  $\psi_G$  на форму  $G$  изображения  $g(x,y)$  обладает свойством «монотонности по норме»:

$$\forall f(x,y), g(x,y) \in \Omega, \|\psi_G f(x,y)\|_{L_2} \leq \|f(x,y)\|_{L_2}.$$

(что естественно для любого линейного проектора).

При этом существует множество простейших изображений «пустой формы»

$$O = \{c(x,y) \equiv c, c \in R\},$$

все элементы которого сохраняются любым проектором  $\psi_G$

$$\forall g(x,y) \in \Omega, c(x,y) \in O: \psi_G c(x,y) = c(x,y).$$

# Неусложняющие фильтры и их свойства (Приложение)

**Пример 3 (продолжение).** Кроме того, в морфологии Пытьева для любого изображения проектор  $\psi_O$  на пустую форму  $O$  возвращает ближайшее к нему постоянное изображение, заполненное его средним значением

$$\forall f(x,y) \in \Omega: \psi_O f(x,y) \equiv \text{mean}_{(x,y)} f(x,y).$$

При этом свойство «монотонности по норме» справедливо и для изображений, центрированных по яркости

$$\forall f(x,y), g(x,y) \in \Omega, \|\psi_G f(x,y) - \psi_O f(x,y)\|_{L2} \leq \|f(x,y) - \psi_O f(x,y)\|_{L2}.$$

Иными словами, проектор на любую форму приближает изображение к (не удаляет от) соответствующему ближайшему простейшему изображению постоянной (пустой) формы.

# Неусложняющие фильтры и их свойства (Приложение)

**Пример 4.** В морфологии на основе диффузных операторов линейный фильтр  $\psi_{KF}$  с диффузным (сглаживающим) ядром  $K_F(x, y, u, v)$ , описывающим форму изображения  $f(x, y)$ , не является проектором (идемпотентным оператором), однако обладает следующими свойствами, которые роднят его с пытьевским проектором:

- сохраняет простейшие изображения

$$\forall g(x, y) \in \Omega, c(x, y) \in O: \psi_{KG} c(x, y) = c(x, y);$$

- монотонен по норме

$$\forall f(x, y), g(x, y) \in \Omega, \|\psi_{KG} f(x, y)\|_{L2} \leq \|f(x, y)\|_{L2};$$

$$\forall f(x, y), g(x, y) \in \Omega, \|\psi_{KG} f(x, y) - \psi_O f(x, y)\|_{L2} \leq \|f(x, y) - \psi_O f(x, y)\|_{L2}.$$

# Обобщение 2: Частичный порядок по суперпозиции упрощений

Достаточное условие упорядоченности по силе упрощения

Если  $\psi_A, \psi_B \in \Psi$ ,  $\exists \psi_C \in \Psi$ ,  $\psi_A = \psi_C \psi_B \Rightarrow \psi_A \leq \psi_B$ .

*(упрощающий фильтр  $\psi_A$  не сложнее  $\psi_B$ , если имеется такой  $\psi_C$ , что его суперпозиция с  $\psi_B$  дает  $\psi_A$ )*

Доказательство: (в приложении)

Это позволяет ввести согласованное с полным порядком по силе упрощения **отношение частичного порядка по суперпозиции упрощений**:

$$\psi_A = \psi_C \psi_B \Leftrightarrow (\text{by definition}) \psi_A \leq_S \psi_B.$$

Оно **определяет на множестве упрощающих операторов  $\Psi$  решетку**, минимальным элементом которой является оператор предельного упрощения  $\psi_O$ , а максимальным – единичный (неискажающий) оператор  $\psi_I$ .

**И это пока все о «сложности». Попробуем теперь формализовать «согласованность»**

# Обобщение 2: Частичный порядок по суперпозиции упрощений (Приложение)

Достаточное условие упорядоченности фильтров по силе упрощения

Если  $\psi_A, \psi_B \in \Psi$ ,  $\exists \psi_C \in \Psi$ ,  $\psi_A = \psi_C \psi_B \Rightarrow \psi_A \leq \psi_B$ .

Доказательство:

$\psi_A, \psi_B, \psi_C \in \Psi, \psi_A = \psi_C \psi_B \Rightarrow$

$\forall x \in \Omega, y = \psi_B x, d_\Omega(\psi_C y, \psi_O y) \leq d_\Omega(y, \psi_O y) \Leftrightarrow$

$d_\Omega(\psi_C \psi_B x, \psi_O \psi_B x) \leq d_\Omega(\psi_B x, \psi_O \psi_B x) \Leftrightarrow$

$d_\Omega(\psi_A x, \psi_O x) \leq d_\Omega(\psi_B x, \psi_O x) \Leftrightarrow$

$\psi_A \leq \psi_B$ .

# Как связан порядок по степени модификации с порядком по степени упрощения?

**Вопрос:** Можем ли мы утверждать, что отношения порядка по степени модификации и порядком по степени упрощения эквивалентны:

$$\psi_A \leq_M \psi_B \Leftrightarrow \psi_A \leq \psi_B?$$

**Ответ:** Если степень модификации  $J$  и степень упрощения  $Q$  никак не связаны между собой, то для такой эквивалентности нет никаких оснований.

**Вопрос:** Почему во всех известных морфологиях отношения по степени упрощения и отношения по силе фильтрации оказываются однозначно связаны?

**Ответ:** Потому что в этих морфологиях  $J$  и  $Q$  явно или неявно связаны монотонной зависимостью.

## Обобщение 2.1: Суперпозиция УМ-фильтров и вложенность $\varepsilon$ -форм

Достаточное условие сравнимости  $\varepsilon$ -форм по включению

Для УМ-фильтров

$$\psi_A, \psi_B \in \Psi, \exists \psi_C \in \Psi, \psi_A = \psi_C \psi_B \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0: A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon.$$

Доказательство опирается на определение УМ-фильтра:

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega: \psi_A = \psi_C \psi_B, y = \psi_B x, Q(\psi_C y) \leq Q(y) &\Rightarrow \\ \Rightarrow Q(\psi_C \psi_B x) \leq Q(\psi_B x) \Rightarrow Q(\psi_A x) \leq Q(\psi_B x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow J(\psi_A x, x) \geq J(\psi_B x, x) \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0: A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon. \end{aligned}$$

Более того, некоторые свойства упрощающих фильтров, которые мы выше должны были постулировать, теперь автоматически следуют из условия монотонности модификации по упрощению. В частности, это касается свойств оператора предельного упрощения.

## Обобщение 2.1: УМ-фильтры и операторы предельного упрощения

Пусть  $\Psi$  – моноид УМ-фильтров с единицей  $\psi_I$ :

$$\psi_I \in \Psi: \forall x \in \Omega: \psi_I x = x, Q(\psi_I, x) = Q(\psi_I x) = Q(x).$$

Утверждение. Пусть в  $\Psi$  существует оператор предельного упрощения

$$\psi_0 \in \Psi: \forall x \in \Omega, \forall \psi \in \Psi: Q(\psi_0 x) \leq Q(\psi x).$$

Тогда  $\psi_0$  является правым нулем  $\Psi$  и проектором.

Доказательство (в Приложении).

Это позволяет определить простейшую через  $\psi_0$ .

Определение. Простейшим образом назовем любой образ  $o \in \Omega$  такой, что  $\psi_0 o = o$ .

Определение. Простейшей формой назовем множество простейших образов  $O = \{o \in \Omega: \psi_0 o = o\}$ .

# Обобщение 2.1: УМ-фильтры и операторы предельного упрощения (Приложение)

Доказательство.

1) Докажем сначала, что  $\psi_0$  является правым нулем полугруппы  $\Psi$ . Поскольку для любого  $\psi$  оператор  $\psi\psi_0$  является элементом группы, он не может упрощать сильнее, чем  $\psi_0$ :

$$\forall \psi \in \Psi: Q(\psi_0 x) \leq Q(\psi x); \psi_0 \psi_0 \in \Psi \Rightarrow Q(\psi_0 x) \leq Q(\psi \psi_0 x).$$

С другой стороны,  $\psi$  не усложняющий, то есть  $\psi\psi_0$  не может упрощать слабее, чем  $\psi_0$ :

$$\forall y \in \Omega, \forall \psi \in \Psi: Q(\psi y) \leq Q(y); y = \psi_0 x \Rightarrow Q(\psi_0 x) \geq Q(\psi \psi_0 x).$$

Отсюда

$$\forall \psi \in \Psi, \forall x \in \Omega, Q(\psi_0 x) = Q(\psi \psi_0 x), Q(\psi_0 x) = Q(\psi_I \psi_0 x) \Rightarrow J(\psi, \psi_0 x) = J(\psi_B, \psi_0 x).$$

# Обобщение 2.1: УМ-фильтры и операторы предельного упрощения (Приложение)

Доказательство.

То есть, поскольку  $\psi$  не может  $\psi_0 x$  упростить, то он не может его и модифицировать:

$$J(\psi, \psi_0 x) = J(\psi, \psi_0 x) \Rightarrow \forall \psi \in \Psi, \forall x \in \Omega, \psi \psi_0 x = \psi_0 x.$$

2) Теперь сразу можно увидеть, что  $\psi_0$  является проектором (идемпотентным оператором).

В самом деле, поскольку оператор  $\psi_0$  также является элементом группы, то правый ноль действует и на него:

$$\psi_0 \psi_0 = \psi_0 \Rightarrow \psi_0^2 = \psi_0.$$

## Обобщение 2.1.1: УМ-морфология с единственным предельным упрощением

Для того, чтобы можно было утверждать, что  $\psi_0$  является не только правым, но и левым нулем на  $\Psi$ , необходимо ввести в схему еще одно предположение – о том, что **любой образ из  $\Omega$  имеет в  $\Psi$  единственное предельное упрощение**, то есть

$$\forall \psi \in \Psi, \forall x \in \Omega, \psi x \in O \Rightarrow \psi x = \psi_0 x.$$

С точки зрения известной метафоры морфологических операторов как структурных фильтров, разбирающих структурные образы, последовательно удаляя элементы, начиная от мелких и заканчивая самыми крупными (идея *sima*), это достаточно естественно – **каким бы путем мы ни упрощали форму (убирая разные элементы в разном порядке), самое последнее простейшее описание должно быть одинаковым для всех путей:**

$$\forall \psi \in \Psi, \psi \psi_0 = \psi_0 \psi = \psi_0.$$

# Критериальная морфология (те же J и Q!)

$$F_{\alpha}(A, B) = J(A, B) + \alpha \times Q(\varepsilon B)$$

$$\varepsilon_{\alpha} A = \arg \min_{b \in \Lambda} F_{\alpha}(A, \delta b)$$

$$B = b_1 W_1 \vee \dots \vee b_n W_n = \delta b$$

	Q
J	Конкретный тип задачи

*Варианты по J(A,B)*

L1-аппроксимация:  $|A-B|$

СКО-аппроксимация:  $|A-B|^2$

L1-открытие:  $|A-B|, B \leq A$

L1-закрытие:  $|A-B|, A \leq B$

*Варианты по Q(εB)*

N – число элементов описания

TV - Суммарная длина контуров

D - Размер дескриптора

...

# Спектры сложности (те же J и Q!)

**Morphological Criterion:**

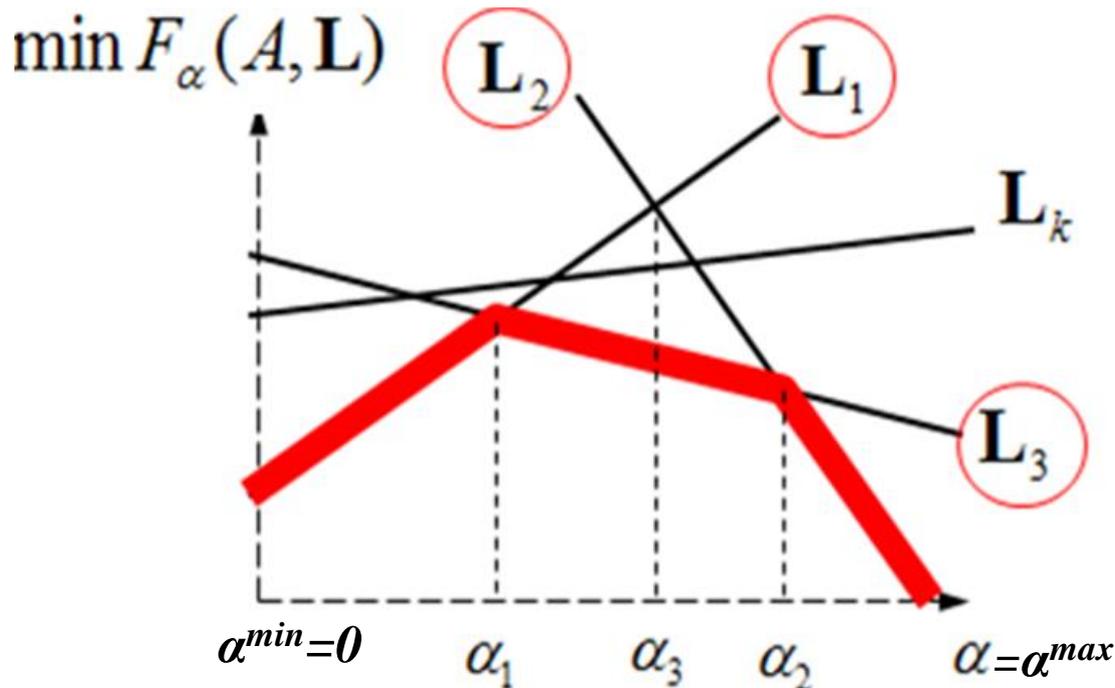
$$F_\alpha(A, L) = J(A, L) + \alpha \cdot Q(L)$$

There is an effective algorithm for obtaining the piecewise linear function

determined as a minimum of criterion by *parameter*  $\alpha$ :  $F(\alpha) = \min F_\alpha(A, L)$

*Our goal:*

$$PS(A, \alpha) = \partial J(A, L) / \partial \alpha$$



To solve this problem for interval  $I = [\alpha^{min}, \alpha^{max}]$  we could compute solutions  $L_1, \dots, L_k \in L$ ,  $I_1 = [\alpha^{min}, \alpha_1]$ ,  $I_2 = [\alpha_1, \alpha_2], \dots$ ,  $I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha^{max}]$ , such that  $L_i$  is optimal for  $\alpha \in I_i$  and  $\sup I_i \leq \inf I_{i+1}$  for adjacent intervals  $I_i, I_{i+1}$ .

This can be done via the technique described in [1]-[2].

**It will be the precise solution!**

$$\min F_\alpha(A, L) \rightarrow J(\alpha) \rightarrow PS(A, \alpha) = \partial J(A, \alpha) / \partial \alpha$$

[1] Kolmogorov V., Boykov Y., Rother C. Applications of parametric maxflow in computer vision // *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, October 2007.

[2] Dinkelbach W. On nonlinear fractional programming // *Manage. Sci.*, 13:492–498, 1967.

# Спектры сложности (те же J и Q!)

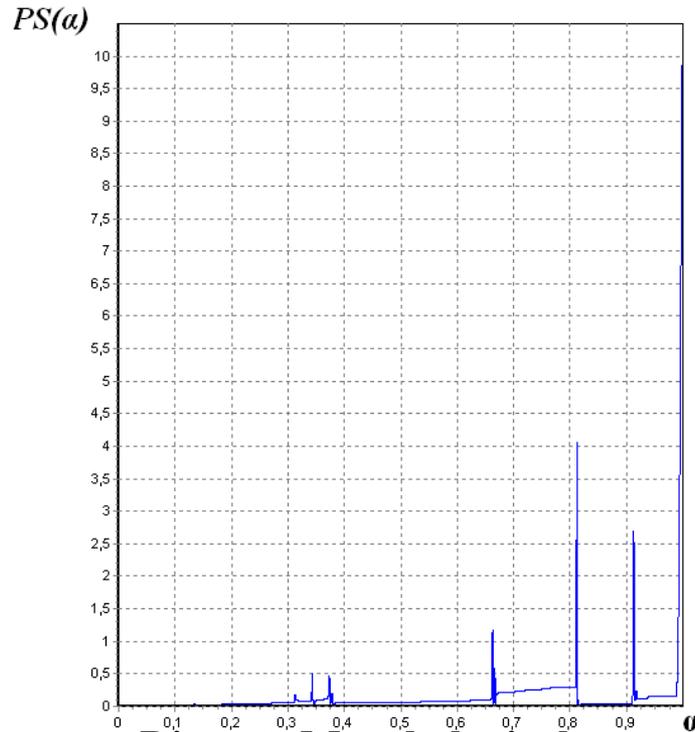
Normalized complexity criterion of *minimal erosion*:

$$F_{\alpha}(A,r) = (1 - \alpha) \cdot S(A \circ rB) + \alpha \cdot S(A \ominus rB), \alpha \in [0,1]$$

$S(A \circ rB)$  – area of opening,  $S(A \ominus rB)$  – area of erosion

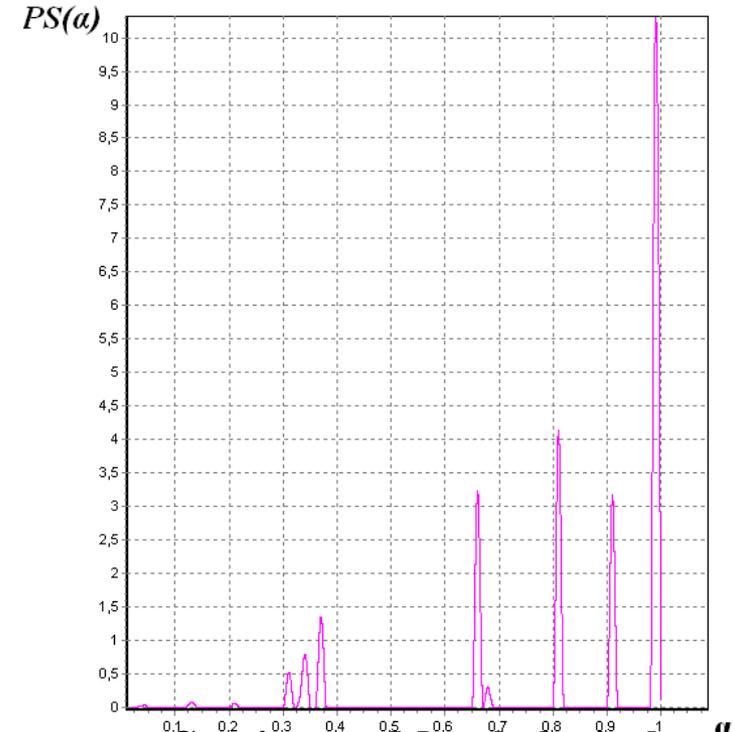


binary image



**Discrete Morphological  
Complexity Spectrum**

– approximate representation



**Continuous Morphological  
Complexity Spectrum**

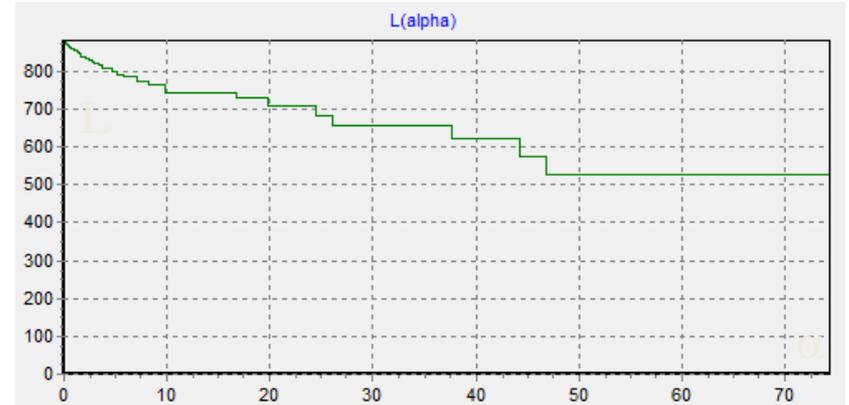
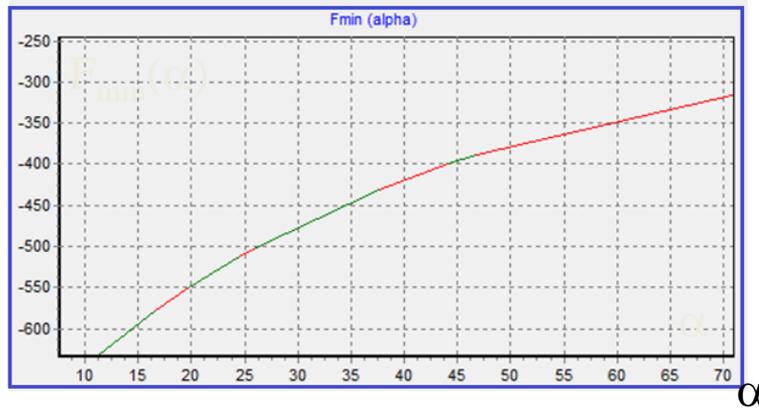
+ accurate representation

Визильтер Ю.В., Сидякин С.В. Построение спектров морфологической сложности для двумерных фигур и изображений // Вестник компьютерных и информационных технологий, N11, 2012, с.3-8.

# Спектры сложности (те же J и Q!)

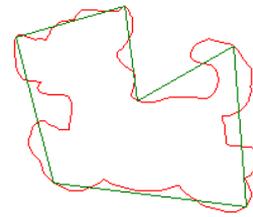
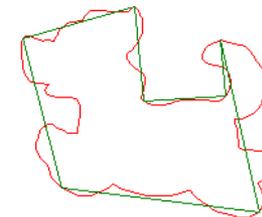
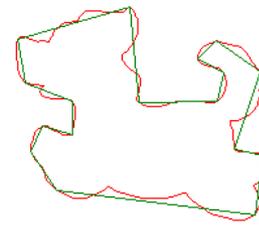
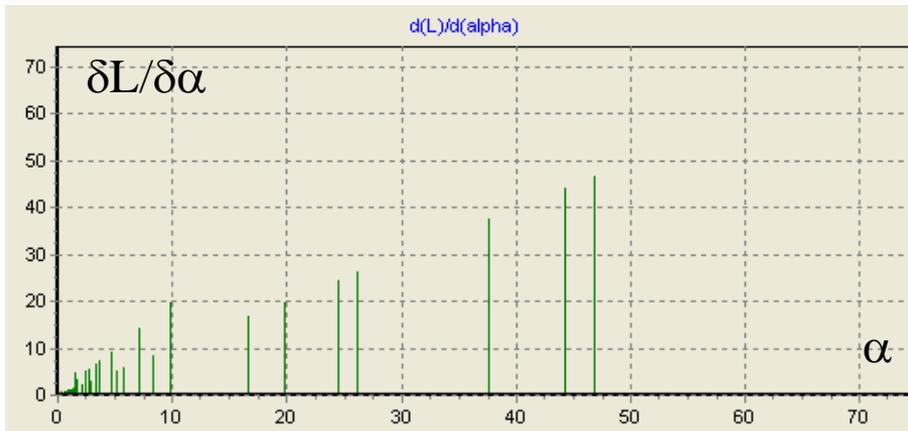
Complexity criterion is a number of vertices of polygonal figure contour:

$F_\alpha(A,L) = -J(L) + \alpha Q(L) \rightarrow \min(L)$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $J(L)$  – length of the contour,  $Q(L)$  – number of vertices,  $\alpha$  – structuring parameter (complexity of the contour model).



$$F_{\min}(\alpha) = \min F_\alpha(A,L)$$

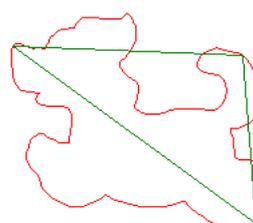
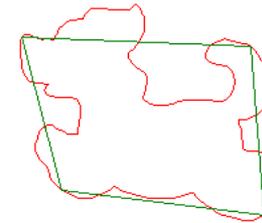
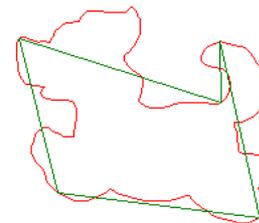
$$L(\alpha)$$



$\alpha=5$

$\alpha=24$

$\alpha=26$



$\alpha=38$

$\alpha=45$

$\alpha=47$

Continuous Critical Morphological Spectrum (Vizilter, Sidyakin (2012))