

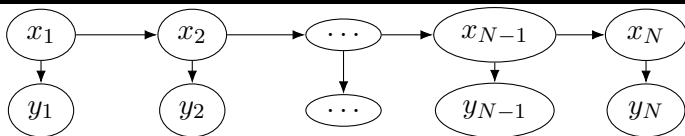
Алгоритмы поиска минимального разреза в графах для вывода в графических моделях

Александр Адуенко

24е апреля 2025

- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.
- Ориентированные графические модели и их представление plate notation. Критерий условной независимости d-separation.
- Неориентированные графические модели и их связь с ориентированными.
- Факторные графы и алгоритм Sum-Product для вывода в ациклических графических моделях.
- Скрытые марковские модели (CMM) и алгоритм Витерби. Алгоритм Max-Sum как обобщение алгоритма Витерби.
- Алгоритм Баума-Велча для определения параметров CMM.

Скрытые марковские модели



$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(x_1) \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{i-1}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i).$$

Пусть $x_i \in [K]$, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\| = \|P(x_l = j | x_{l-1} = i)\|$, $\pi_k = P(x_1 = k)$.

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{A}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{B}) = p(x_1 | \boldsymbol{\pi}) \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{i-1}, \mathbf{A}) \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i, \mathbf{B}).$$

Задачи:

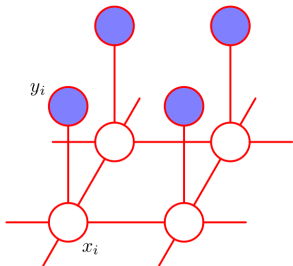
- $p(x_i | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$ – алгоритм Sum-Product;
- $p(x_i, x_{i+1} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$ – алгоритм Sum-Product;
- $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}}$ – алгоритм Витерби / Max-Sum;
- $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi})$ – последовательное сэмплирование;
- $p(\mathbf{y} | \mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}) \rightarrow \max_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}}$ – алгоритм Баума-Велча.

Постановка задачи

Пусть имеется наблюдаемое изображение y .

Требуется восстановить скрытые состояния x для каждого пикселя.

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_0 \prod_{(i,j) \in \varepsilon} \psi_{ij}(x_i, x_j) \prod_i \psi_i(x_i, y_i).$$



$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \equiv$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\log \psi_0 - \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \log \psi_{ij}(x_i, x_j) +$$

$$\sum_i \log \psi_i(x_i, y_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \equiv \tilde{E}(\mathbf{x}) =$$

$$\theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

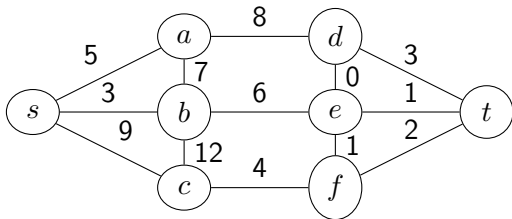
Графическая модель $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

[Bishop, 2006]

Замечание: Задача $\tilde{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}$ является NP-трудной для произвольных $\theta_{ij}(x_i, x_j)$, $x_i \in \{0, 1\}$.

Вопрос: При каких условиях на $\theta_i(x_i)$, $\theta_{ij}(x_i, x_j)$ задача разрешима полиномиально?

Максимальный поток и минимальный разрез в графе



$c(u, v)$ – пропускная
способность;

$f(u, v) \leq c(u, v)$ – поток

$$\sum_{v: (u, v) \in \varepsilon} f(u, v) = \sum_{v: (v, u) \in \varepsilon} f(v, u) \quad \forall u \notin \{s, t\}.$$

$$M(\mathbf{f}) = \sum_{v: (s, v) \in \varepsilon} f(s, v) \rightarrow \max_{\mathbf{f}}.$$

Разрез графа – разбиение мн-ва вершин $V = S \sqcup T$.

$$C(S, T) = \sum_{(u, v) \in \varepsilon: u \in S, v \in T} c(u, v) \text{ – величина разреза.}$$

Теорема (Форд-Фалкерсон). Максимальный поток равен минимальному разрезу $\max_{\mathbf{f}} M(\mathbf{f}) = \min_{S, T} C(S, T)$.

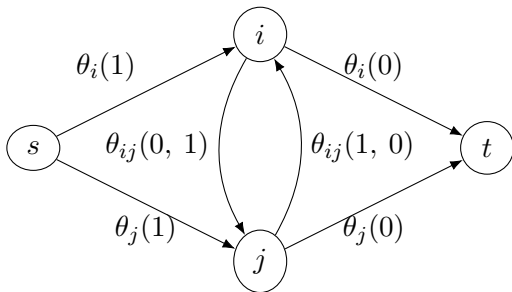
Замечание: Максимальный поток / минимальный разрез эффективно вычислимы.

Минимизация энергии как поиск максимального потока

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

Пусть потенциалы удовлетворяют условиям:

- $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0$;
- $\forall (i, j) \in \varepsilon : \theta_{ij}(0, 0) = \theta_{ij}(1, 1) = 0, \theta_{ij}(0, 1) \geq 0, \theta_{ij}(1, 0) \geq 0$.



Вопрос: Пусть $x_i = 0$, если $i \in S$ и $x_i = 1$, если $i \in T$.
Чему соответствует минимальный разрез такого графа?

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

Пусть потенциалы удовлетворяют условиям:

- $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0;$
- $\forall (i, j) \in \varepsilon : \theta_{ij}(0, 0) = \theta_{ij}(1, 1) = 0, \theta_{ij}(0, 1) \geq 0, \theta_{ij}(1, 0) \geq 0.$

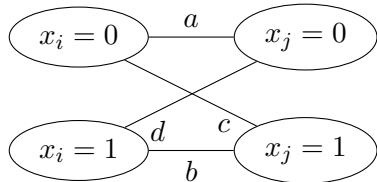
Операции, которые не меняют $\tilde{E}(\mathbf{x})$:

- 1 $\theta_i(0) \leftarrow \theta_i(0) - \delta, \theta_i(1) \leftarrow \theta_i(1) - \delta, \theta_0 \leftarrow \theta_0 + \delta;$
- 2 $\theta_{ij}(p, 0) \leftarrow \theta_{ij}(p, 0) - \delta, \theta_{ij}(p, 1) \leftarrow \theta_{ij}(p, 1) - \delta, \theta_i(p) \leftarrow \theta_i(p) + \delta.$

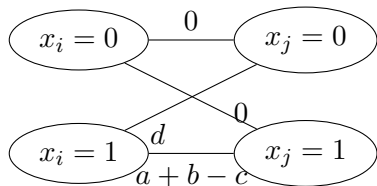
Замечание: $\theta_i(0) \geq 0, \theta_i(1) \geq 0$ можно обеспечить с помощью операции 1 с $\delta = \min(\theta_i(0), \theta_i(1))$.

Вопрос: Как добиться условия на парные потенциалы?

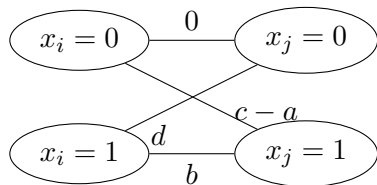
Репараметризация для парных потенциалов



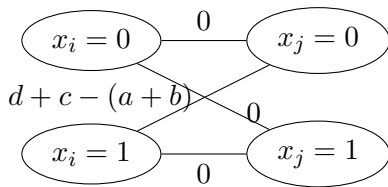
$$\begin{aligned}\theta_{ij}(0, 0) &= a, \theta_{ij}(1, 1) = b \\ \theta_{ij}(0, 1) &= c, \theta_{ij}(1, 0) = d.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta_j(1) &+= c - a, \theta_{ij}(1, 1) -= c - a, \\ \theta_{ij}(0, 1) &-= c - a.\end{aligned}$$

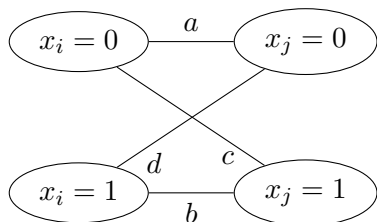


$$\begin{aligned}\theta_i(0) &+= a, \theta_{ij}(0, 0) -= a, \\ \theta_{ij}(0, 1) &-= a.\end{aligned}$$

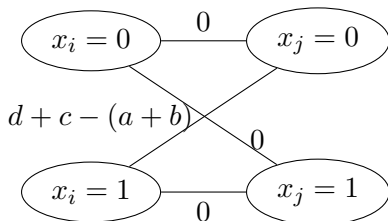


$$\begin{aligned}\theta_i(1) &+= a + b - c, \theta_{ij}(1, 0) -= \\ &a + b - c, \\ \theta_{ij}(1, 1) &-= a + b - c.\end{aligned}$$

Репараметризация для парных потенциалов 2



$$\begin{aligned}\theta_{ij}(0, 0) &= a, \theta_{ij}(1, 1) = b \\ \theta_{ij}(0, 1) &= c, \theta_{ij}(1, 0) = d.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta_{ij}(0, 0) &= 0, \theta_{ij}(1, 1) = 0 \\ \theta_{ij}(0, 1) &= 0, \theta_{ij}(1, 0) = d + c - (a + b).\end{aligned}$$

Условие субмодулярности (УС):

$$\theta_{ij}(0, 1) + \theta_{ij}(1, 0) \geq \theta_{ij}(0, 0) + \theta_{ij}(1, 1).$$

Утверждение: УС необходимо и достаточно для применимости алгоритмов разрезом графов для решения задачи $\tilde{E}(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}$.

Вопрос: Как выбрать потенциалы $\theta_i(x_i)$, $\theta_{ij}(x_i, x_j)$?

Пусть $x_i = 1$ есть метка объекта, а $x_i = 0$ метка фона.

$\theta_i(0) = +\infty \equiv C(x_i, t) = +\infty$ гарантирует $x_i = 1$.

$\theta_i(1) = +\infty \equiv C(s, x_i) = +\infty$ гарантирует $x_i = 0$.

Выбор парного потенциала:

- Модель Поттса: $\theta_{ij}(x_i, x_j) = [x_i \neq x_j]$;
- $\theta_{ij}(x_i, x_j) = [x_i \neq x_j] \cdot \exp\left(-\frac{(y_i - y_j)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Вопрос 1: Какую поправку выражает второй потенциал по отношению к модели Поттса?

Вопрос 2: Как учесть многоканальность (то есть $y_i \in \mathbb{R}_+^3$)?

Вопрос 3: Как учесть наличие / отсутствие линий / углов в двух пикселях?

Иллюстрация работы алгоритма GraphCut



Результат сшивки

Исходные изображения

Алгоритм α – расширение

$$\tilde{E}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \sum_{(i,j) \in \varepsilon} \theta_{ij}(x_i, x_j) + \sum_i \theta_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, x_i \in [K], K \geq 3.$$

Замечание: Задача NP-трудна даже для $K = 3$ и парных потенциалов Поттса.

Идея (α – расширение): Пошагово решать задачи с бинарными переменными.

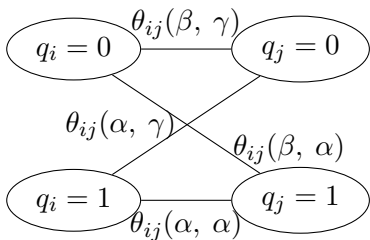
- 1 Выбираем начальное приближение $\mathbf{x}$, $x_i \in [K]$;
- 2 В цикле для каждой метки $\alpha \in [K]$ заменяем часть меток на данную, минимизируя энергию;
- 3 Останавливаемся, когда нет улучшений ни для одной метки.

Шаг 2 соответствует введению переменных $q_j \in \{0, 1\}$, что

- $q_j = 0$, если $x_j^{\text{old}} = x_j^{\text{new}}$;
- $q_j = 1$, если $x_j^{\text{old}} \neq \alpha$, $x_j^{\text{new}} = \alpha$.

Алгоритм α – расширение 2

Пусть $x_i^{\text{old}} = \beta$, $x_j^{\text{old}} = \gamma$.



Условие субмодулярности для бинарных потенциалов требует $\theta_{ij}(\beta, \alpha) + \theta_{ij}(\alpha, \gamma) \geq \theta_{ij}(\beta, \gamma) + \theta_{ij}(\alpha, \alpha) \forall \beta, \gamma$.

Вопрос 1: Какое условие получаем при $\theta_{ij}(\alpha, \alpha) = 0$?

Замечание: Для $x_i^{\text{old}} = \alpha$, $c(s, x_i) = +\infty$, $c(x_i, t) = \theta_i(\alpha)$.
Для $x_i^{\text{old}} \neq \alpha$, $c(s, x_i) = \theta_i(\alpha)$, $c(x_i, t) = \theta_i(x_i^{\text{old}})$.

Вопрос 2: Какое условие обеспечивает при $c(s, x_i) = +\infty$?

Иллюстрация работы алгоритма α – расширение



Исходные изображения

Результат сшивки

Иллюстрация работы алгоритма α – расширение 2



Исходные изображения

Результат сшивки

- 1 Boykov, Yuri, and Vladimir Kolmogorov. "An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision." IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence 26.9 (2004): 1124-1137.
- 2 Примеры использования GraphCut. URL: <http://www.f.waseda.jp/hfs/PSIVT2009.pdf>
- 3 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 4 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 5 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 6 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.