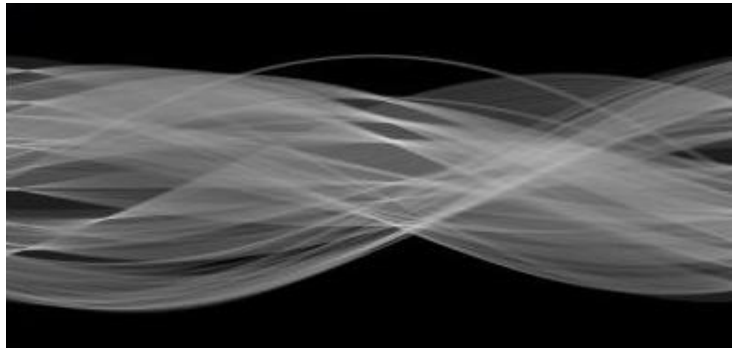
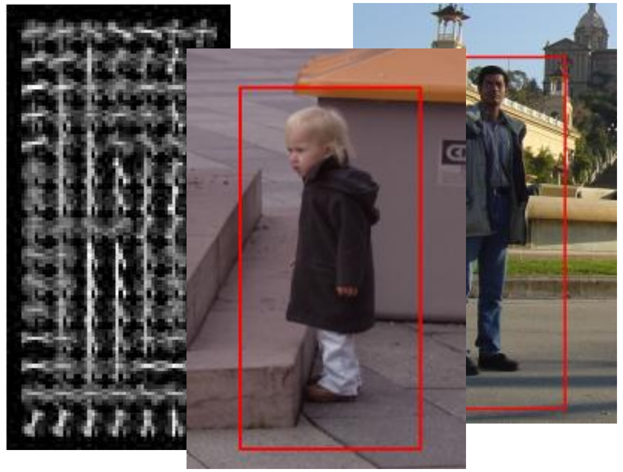
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

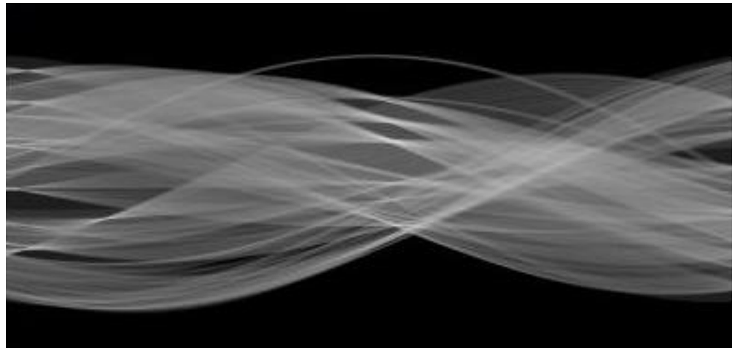


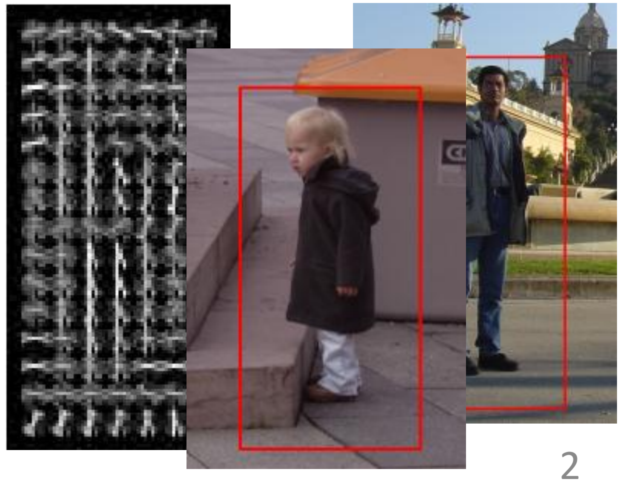


Элементы теории информации, информативные признаки

Тема 10

20.03.2026





Количество информации

Одни изображения, являются более содержательными, чем другие, имеют больше деталей, содержат больше информации.

Количество информации - количественная мера разнообразия. Данные одной и той же длины, могут иметь различную меру разнообразия.

Разнообразие можно определить через вероятность (неопределенность) исхода одного из множества событий, например, реализаций случайного процесса. Если все события из множества реализуются с одинаковой вероятностью, тогда пространство событий – разнообразно, одинаковая неопределённость у каждого исхода. Наоборот, если преобладают часть событий над другими, неопределенность меньше, разнообразие событий меньше, эффективное число реализаций меньше.

Данные, которые содержат численные реализации случайного процесса, записаны в памяти в виде последовательности элементов (символов из заданного алфавита). Данные имеют размер (длину) – число элементов в последовательности. Однако данные разной длины могут представлять один и тот же объем информации, быть избыточными.

Количество информации - минимальное (без избыточное) число символов в записи данных, из которых можно извлечь (восстановить) исходную информацию (реализацию случайного события/процесса) без потерь.

Количество информации

Одни изображения, являются более содержательными, чем другие, имеют больше деталей, содержат больше информации.

Количество информации - количественная мера разнообразия. Данные одной и той же длины, могут иметь различную меру разнообразия.

Разнообразие можно определить через вероятность (неопределенность) исхода одного из множества событий, например, реализаций случайного процесса. Если все события из множества реализуются с одинаковой вероятностью, тогда пространство событий – разнообразно, одинаковая неопределённость у каждого исхода. Наоборот, если преобладают часть событий над другими, неопределенность меньше, разнообразие событий меньше, эффективное число реализаций меньше.

Данные, которые содержат численные реализации случайного процесса, записаны в памяти в виде последовательности элементов (символов из заданного алфавита). Данные имеют размер (длину) – число элементов в последовательности. Однако данные разной длины могут представлять один и тот же объем информации, быть избыточными.

Количество информации - минимальное (без избыточное) число символов в записи данных, из которых можно извлечь (восстановить) исходную информацию (реализацию случайного события/процесса) без потерь.

Пусть на дискретном конечном множестве X заданы подмножества – события E. Заметим, что множество Ω всевозможных подмножеств X содержит $|\Omega| = 2^{|X|}$ альтернатив. Пусть на множестве Ω событий N –альтернатив, тогда при равновероятных исходах: $P(E) = \frac{1}{N}$. Чем больше N, тем больше равновероятных исходов, больше неопределенность и разнообразие альтернатив-вариантов, определяемое мощностью множества X. Определим количество элементов (элементарных символов) для представления N равновероятных реализаций: $\boxed{I(E) = \log N \propto \log_2 N}$ - количество информации для равновероятного события E (в битах)

(формула Хартли)

Для события с двумя альтернативами/реализациями: $I(E) = \log_2 2 = 1$ бит

Количество информации

В общем случае, при не равновероятной реализации событий, количество символов для представления информации, получаемой при реализации события E: $I(E) = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{N}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I(E) = -\log_2 P(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)}}$

Если $P(E) = 1$, то $\mathrm{I}(E) = 0$ - событие возникает всегда, нет неопределенности, нет разнообразия, значит событие не несет никакой информации. Если $P(E) = 0.1$, то $\mathrm{I}(E) > 0$ - событие редкое и сообщение, что оно произошло, несет значительную информацию.

Количество информации, которое содержится в данных, характеризуется уменьшением (снятием) неопределенности при получении этих данных. Если данные не изменяют априорную неопределенность, то количество информации в них равно нулю.

Количество информации

В общем случае, при не равновероятной реализации событий, количество символов для представления информации, получаемой при реализации события E: $I(E) = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{N} \Rightarrow \boxed{I(E) = -\log_2 P(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)}}$

Если $P(E) = 1$, то $\mathrm{I}(E) = 0$ - событие возникает всегда, нет неопределенности, нет разнообразия, значит событие не несет никакой информации. Если $P(E) = 0.1$, то $\mathrm{I}(E) > 0$ - событие редкое и сообщение, что оно произошло, несет значительную информацию.

Количество информации, которое содержится в данных, характеризуется уменьшением (снятием) неопределенности при получении этих данных. Если данные не изменяют априорную неопределенность, то количество информации в них равно нулю.

Пусть вероятностный источник генерирует N альтернатив с вероятностями $P(E_j)$, причем $\sum_{j=1}^{N} P(E_j) = 1$ Тогда, **среднее число символов** для представления “разнообразия” исходов (мат. ожидание):

Среднее количество информации на один символ (**энтропия**)

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbf{E}) = \mathbf{M}[-\log_2 P(E)] = -\sum_{j=1}^{N} P(E_j) \log_2 P(E_j)}$$

- Формула Шеннона, 1948

В случае, если все альтернативы известны заранее (априори), то **энтропия** равна нулю. Действительно, если все $P(E_j)$=0, кроме $P(E_k)$=1, то $P(E_k)\log_2 P(E_k) = 0$ и $\lim\limits_{P(E_j)\to 0} \left(P(E_j)\log_2 P(E_j)\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}(\mathbf{E})=0$

В случае, если все альтернативы равновероятны, нет преобладающих, то энтропия максимальна и равна длине числа альтернатив:

$$\mathrm{H}_{max}(\mathbf{E}) = \log_2 N$$ (в битах, формула Хартли)

Количество информации

Формула Шеннона, 1948

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbf{E}) = -\sum_{j=1}^{N} P(E_j)\log_2 P(E_j)}$$

$$\sum_{j=1}^{N} P(E_j) = 1$$

Энтропия максимальна при равновероятных исходах. Действительно, лагранжиан источника:

$$L(E) = -\sum_{j=1}^{N} P(E_j)\log_2 P(E_j) + \lambda\left(\sum_{j=1}^{N} P(E_j) - 1\right)$$

$$\Rightarrow -\log_2 P(E_j) - \frac{P(E_j)}{P(E_j)\ln 2} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad -\log_2 P(E_j) - \log_2 e + \lambda = 0, \quad (j = 1, \ldots, N)$$

$$\Rightarrow \log_2 P(E_j) = \log_2 e - \lambda$$

Максимум достигается при равных между собой $P(E_j)$.

Так как $\sum_{j=1}^{N} P(E_j) = 1$, то

$$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_N) = \frac{1}{N}.$$

$$\mathrm{H}_{max}(\mathbf{E}) = \log_2 N$$

Максимальное количество информации несут данные, хранящие равновероятные реализации, и равно числу вариантов исходов.

Количество информации в изображении

Пусть вектор изображения получен разверткой по столбцам: $\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{U}_m \mathbf{F} \mathbf{v}_m$ как реализация выхода вероятностного источника.

Пусть J уровней яркости для MxM элементов дает $\mathrm{N} = J^Q$ различных изображений, где $Q = M^2$. Только часть этих изображений будут такими, какие давал бы реальный источник при наблюдении. Пусть $P(\mathbf{f}_j), j = 1, .., N$ – априорные вероятности появления каждого изображения. Среднее количество информации в изображении $\mathbf{f}$ равно энтропии источника:

$$\boxed{H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P(\mathbf{f}_j)}$$

Количество информации в изображении

Пусть вектор изображения получен разверткой по столбцам: $\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{U}_m \mathbf{F} \mathbf{v}_m$ как реализация выхода вероятностного источника.

Пусть J уровней яркости для MxM элементов дает $\mathrm{N} = J^Q$ различных изображений, где $Q = M^2$. Только часть этих изображений будут такими, какие давал бы реальный источник при наблюдении. Пусть $P(\mathbf{f}_j), j = 1, .., N$ – априорные вероятности появления каждого изображения. Среднее количество информации в изображении $\mathbf{f}$ равно энтропии источника:

$$\boxed{H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P(\mathbf{f}_j)}$$

Вероятность появления $P(\mathbf{f}_j)$ можно выразить через совместное распределение компонент вектора изображения:

$$P(\mathbf{f}_j) = P\left(f(1) = r_{i1}, f(2) = r_{i2}, \ldots, f(Q) = r_{iQ}\right),$$

r_{iq} - значение для i уровня квантования q элемента.

$$\Rightarrow P(\mathbf{f}_j) = P\left[f(1) = r_{i1}\right] P\left[f(2) = r_{i2} \mid f(1)\right] P\left[f(3) = r_{i3} \mid f(2), f(1)\right] \times$$

$$\times P\left[f(q) = r_{iq} \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1)\right] \ldots P\left[f(Q) = r_{iQ} \mid f(Q-1), f(Q-2), \ldots, f(2), f(1)\right]$$

Количество информации в изображении

Пусть вектор изображения получен разверткой по столбцам: $\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{U}_m \mathbf{F} \mathbf{v}_m$ как реализация выхода вероятностного источника.

Пусть J уровней яркости для MxM элементов дает $\mathrm{N} = J^Q$ различных изображений, где $Q = M^2$. Только часть этих изображений будут такими, какие давал бы реальный источник при наблюдении. Пусть $P(\mathbf{f}_j), j = 1, .., N$ – априорные вероятности появления каждого изображения. Среднее количество информации в изображении $\mathbf{f}$ равно энтропии источника:

$$\boxed{H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P(\mathbf{f}_j)}$$

Вероятность появление $P(\mathbf{f}_j)$ можно выразить через совместное распределение компонент вектора изображения:

$$P(\mathbf{f}_j) = P\left(f(1) = r_{i1}, f(2) = r_{i2}, \ldots, f(Q) = r_{iQ} \right),$$

r_{iq} - значение для i уровня квантования q элемента.

Источник не обладает памятью:

$$\Rightarrow P(\mathbf{f}_j) = P\left[f(1) = r_{i1} \right] P\left[f(2) = r_{i2} \mid f(1) \right] P\left[f(3) = r_{i3} \mid f(2), f(1) \right] \times$$

$$\times P\left[f(q) = r_{iq} \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1) \right] \ldots P\left[f(Q) = r_{iQ} \mid f(Q-1), f(Q-2), \ldots, f(2), f(1) \right]$$

Логарифмируем правую и левую часть, с учетом определения энтропии:

$$H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P\left[f(1) = r_{i1} \right] - \sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P\left[f(2) = r_{i2} \mid f(1) \right] - \sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P\left[f(3) = r_{i3} \mid f(2), f(1) \right] -$$

$$\boxed{-\sum_{j=1}^{N} P(\mathbf{f}_j) \log_2 P\left[f(q) = r_{iq} \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1) \right]} - \ldots$$

средняя информация в q компоненте вектора $\mathbf{f}_j$ при условии, что известны яркости предшествующих q-1 компонент.

Количество информации в изображении

Энтропия q компоненты вектора $\mathbf{f}_j$ при условии, что известны яркости предшествующих q-1 компонент:

$$H\left(f(q) \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1)\right) = -\sum_{j=1}^{N} P\left(\mathbf{f}_j\right) \log_2 P\left[f(q) = r_{iq} \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1)\right]$$

- условная энтропия

Энтропия изображения определяется энтропией каждой яркостной компоненты (пренебрегаем краевыми эффектами):

$$\boxed{H(\mathbf{f}) = \sum_{q=1}^{Q} H\left(f(q) \mid f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1)\right)}$$

Количество информации в изображении

Энтропия q компоненты вектора $\mathbf{f}_j$ при условии, что известны яркости предшествующих q-1 компонент:

$$H\left(f(q)\,|\,f(q-1),f(q-2),...,f(2),f(1)\right)=-\sum_{j=1}^{N}P\left(\mathbf{f}_j\right)\log_2 P\left[f(q)=r_{iq}\,|\,f(q-1),f(q-2),...,f(2),f(1)\right]$$

- условная энтропия

Энтропия изображения определяется энтропией каждой яркостной компоненты (пренебрегаем краевыми эффектами):

$$\boxed{H(\mathbf{f})=\sum_{q=1}^{Q}H\left(f(q)\,|\,f(q-1),f(q-2),...,f(2),f(1)\right)}$$

Пусть $f(q),f(q-1),f(q-2),\dots,f(2),f(1)$ - **марковская** последовательность $\mathrm{k}-$ого порядка, при $\mathrm{k}<\mathrm{j}$:

$$H\left(f(q)\,|\,f(q-1),...,f(q-k)\right)\le H\left(f(q)\,|\,f(q-1),...,f(q-j)\right)$$

Информация в q той компоненте уменьшается при увеличении числа известных компонент и стремиться к ненулевому предельному числу.

$$\boxed{H(\mathbf{f})\approx Q\cdot H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right)}$$

Энтропия всего изображения определяется энтропией одного элемента вектора.

В явном виде: $P\left(f(q)\,|\,f(q-1),...,f(1)\right)P\left(f(q-1),...,f(1)\right)=P\left(f(q),f(q-1),...,f(1)\right)$

$$\boxed{H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right)=-\sum_{j0=1}^{J}\cdots\sum_{jk=1}^{J}P\left(f(q),...,f(q-k)\right)\log_2\frac{P\left(f(q),...,f(q-k)\right)}{P\left(f(q-1),...,f(q-k)\right)}}$$

Где: $P\left(f(q),...,f(q-k)\right)=P\left[f(q)=r_{j0},...,f(q-k)=r_{jk}\right]$

Количество информации в изображении

$$\boxed{H\left(f(q) \mid f(q-1),\ldots,f(q-k)\right) = -\sum_{J0=1}^{J}\cdots\sum_{jk=1}^{J} P\left(f(q),\ldots,f(q-k)\right)\log_2 \frac{P\left(f(q),\ldots,f(q-k)\right)}{P\left(f(q-1),\ldots,f(q-k)\right)}}$$

Оценки энтропии изображения, полученные Шрайбером Для 6 битного изображения

Порядок	Функциональное выражение энтропии	Энтропия, бит/элемент	
Первый	$H[f(q)]$	4,4	
Второй	$H[f(q) \mid f(q-1)]$	1,9	(+2.5 бита)
Третий	$H[f(q) \mid f(q-1), f(q-2)]$	1,5	(+0.4 бита)

Если нет пространственной корреляции, т.е. $k = 1$ и изображение – стационарный эргодический случайный процесс:

$$H\left(f(q)\right) = -\sum_{j=0}^{J-1} P\left(f(q)=r_j\right)\log_2 P\left(f(q)=r_j\right)$$

$$\boxed{H(\mathbf{f}) \approx Q \cdot H\left(f(q)\right)}$$

Первая теорема о кодировании Шеннона

$$H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 P(\mathbf{f}_j) \approx Q \cdot H\left(f(q) \,|\, f(q-1),.., f(q-k)\right)$$

Количество информации в реализации изображения $\mathbf{f}_j$: $-\log_2 P(\mathbf{f}_j)$. Будем кодировать изображение $\mathbf{f}_j$ кодом с целочисленной длиной $l(\mathbf{f}_j)$, таким что:

$$\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} \le l(\mathbf{f}_j) < \log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} + 1, \text{ для всех } j = \overline{0, J^Q}$$ - ближайшее целое.

$$\sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} \le \sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j) l(\mathbf{f}_j) < \sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} + 1$$

Первая теорема о кодировании Шеннона

$$H(\mathbf{f}) = -\sum_{j=1}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 P(\mathbf{f}_j) \approx Q\cdot H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right)$$

Количество информации в реализации изображения $\mathbf{f}_j$: $-\log_2 P(\mathbf{f}_j)$. Будем кодировать изображение $\mathbf{f}_j$ кодом с целочисленной длиной $l(\mathbf{f}_j)$, таким что:

$$\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} \le l(\mathbf{f}_j) < \log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} + 1,\ \text{для всех}\ j = \overline{0, J^Q}$$ - ближайшее целое.

$$\sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} \le \sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\, l(\mathbf{f}_j) < \sum_{j=0}^{J^Q} P(\mathbf{f}_j)\log_2 \frac{1}{P(\mathbf{f}_j)} + 1$$

$$H(\mathbf{f}) \le l_{cp} < H(\mathbf{f}) + 1$$

$$H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right) \le \frac{l_{cp}}{Q} < H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right) + \frac{1}{Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{Q\to\infty}\left[\frac{l_{cp}}{Q}\right] = H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right)}$$ - Первая теорема Шеннона

При увеличении числа компонент (размера изображения) в векторе изображения до бесконечности достигается значение $\frac{l_{\text{ср}}}{Q}$ сколь угодно близкое к энтропии одного элемента изображения. **Количество информации в изображении равно произведению теоретического предела** среднего числа символов для представления элемента изображения **на размер изображения**, **т.е. энтропии изображения.**

Информационная эффективность представления: $$\boxed{\eta = Q\frac{H\left(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\right)}{l_{cp}}}$$

Понятие избыточности изображения

- Изображения, содержащие одно и тоже количество информации, могут иметь разные размеры, представляться разным объемом данных.
- Сокращение объема данных, требуемого для представления изображения, равнозначно удалению избыточных данных.
- Избыточность – существование статистических взаимосвязей между элементами данных. Мерой статистических взаимосвязей является степень коррелированности элементов.
- Удаление избыточных данных – преобразование исходных данных в некоррелированный массив.

Относительная избыточность: $R_D = \frac{n_2 - n_1}{n_2} = 1 - \frac{n_1}{n_2} = 1 - \frac{1}{C_R}$ $C_R = \frac{n_2}{n_1}$ - коэффициент сжатия.

n_2, n_1 - числа элементов носителей информации для двух различных представлений одного и того же количества информации.

Типы избыточности изображения

- Кодовая избыточность
- Межэлементная (пространственная/временная) избыточность
- Визуальная избыточность

Понятие избыточности изображения. Кодовая избыточность

$$H\left(f(q)\right) = -\sum_{j=0}^{J-1} P\left(f(q)=r_j\right)\log_2 P\left(f(q)=r_j\right)$$

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1,$$

$$L_{\text{ср}} = \sum_{k=0}^{L-1} l(r_k)\, p_r(r_k)$$

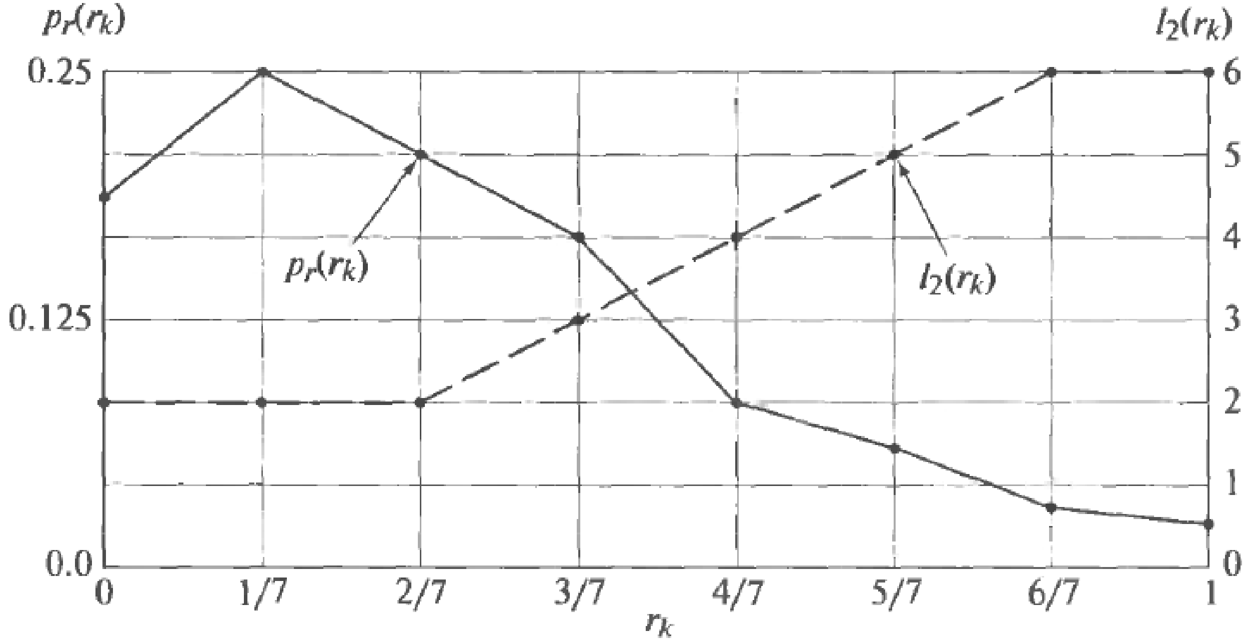
$$L_{\text{ср}} = \sum_{k=0}^{7} l_2(r_k)\, p_r(r_k) = 2(0{,}19) + 2(0{,}25) + 2(0{,}21) +$$
$$+ 3(0{,}16) + 4(0{,}08) + 5(0{,}06) + 6(0{,}03) + 6(0{,}02) = 2{,}7 \text{ битов}$$

$$R_D = 1 - \frac{1}{1{,}11} = 0{,}099.$$

$$M \cdot N \cdot L_{\text{ср}}.$$

Таблица 8.1 Пример неравномерного кодирования.

r_k	$p_r(r_k)$	Код 1	$l_1(r_k)$	Код 2	$l_2(r_k)$
$r_0 = 0$	0,19	000	3	11	2
$r_1 = 1/7$	0,25	001	3	01	2
$r_2 = 2/7$	0,21	010	3	10	2
$r_3 = 3/7$	0,16	011	3	001	3
$r_4 = 4/7$	0,08	100	3	0001	4
$r_5 = 5/7$	0,06	101	3	00001	5
$r_6 = 6/7$	0,03	110	3	000001	6
$r_7 = 1$	0,02	111	3	000000	6



Понятие избыточности изображения. Межэлементная избыточность

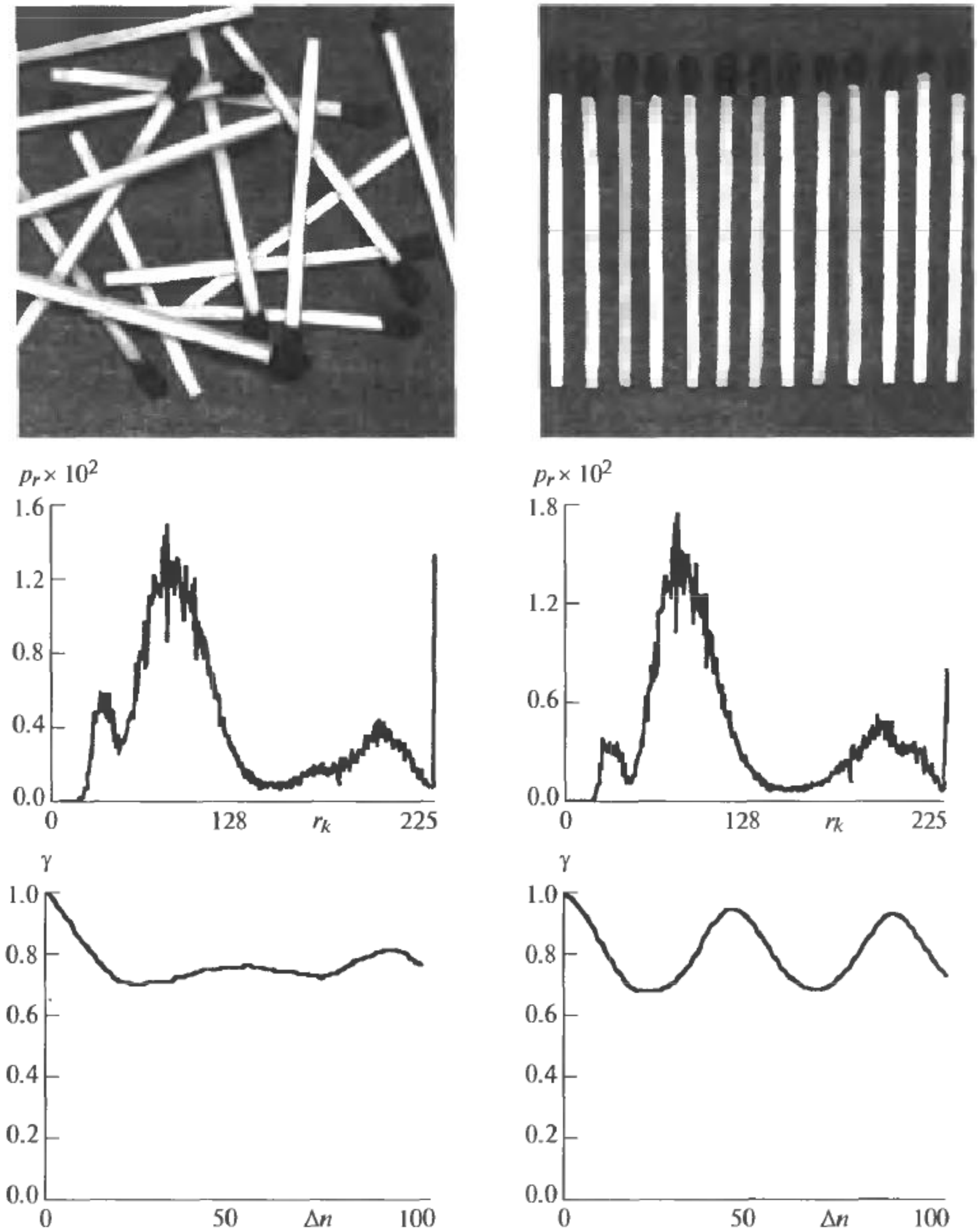
$$H\big(f(q)\,|\,f(q-1),..,f(q-k)\big)=-\sum_{j0=1}^{J}\cdots\sum_{jk=1}^{J}P\big(f(q),...,f(q-k)\big)\log_2\frac{P\big(f(q),...,f(q-k)\big)}{P\big(f(q-1),...,f(q-k)\big)}$$

$$\gamma(\Delta n)=\frac{A(\Delta n)}{A(0)}$$

$$A(\Delta n)=\frac{1}{N-\Delta n}\sum_{y=0}^{N-1-\Delta n}f(x,y)f(x,y+\Delta n).$$

при $\Delta n = 1$, $\gamma = 0{,}9922$

$\gamma = 0{,}9928$



Понятие избыточности изображения. Визуальная избыточность

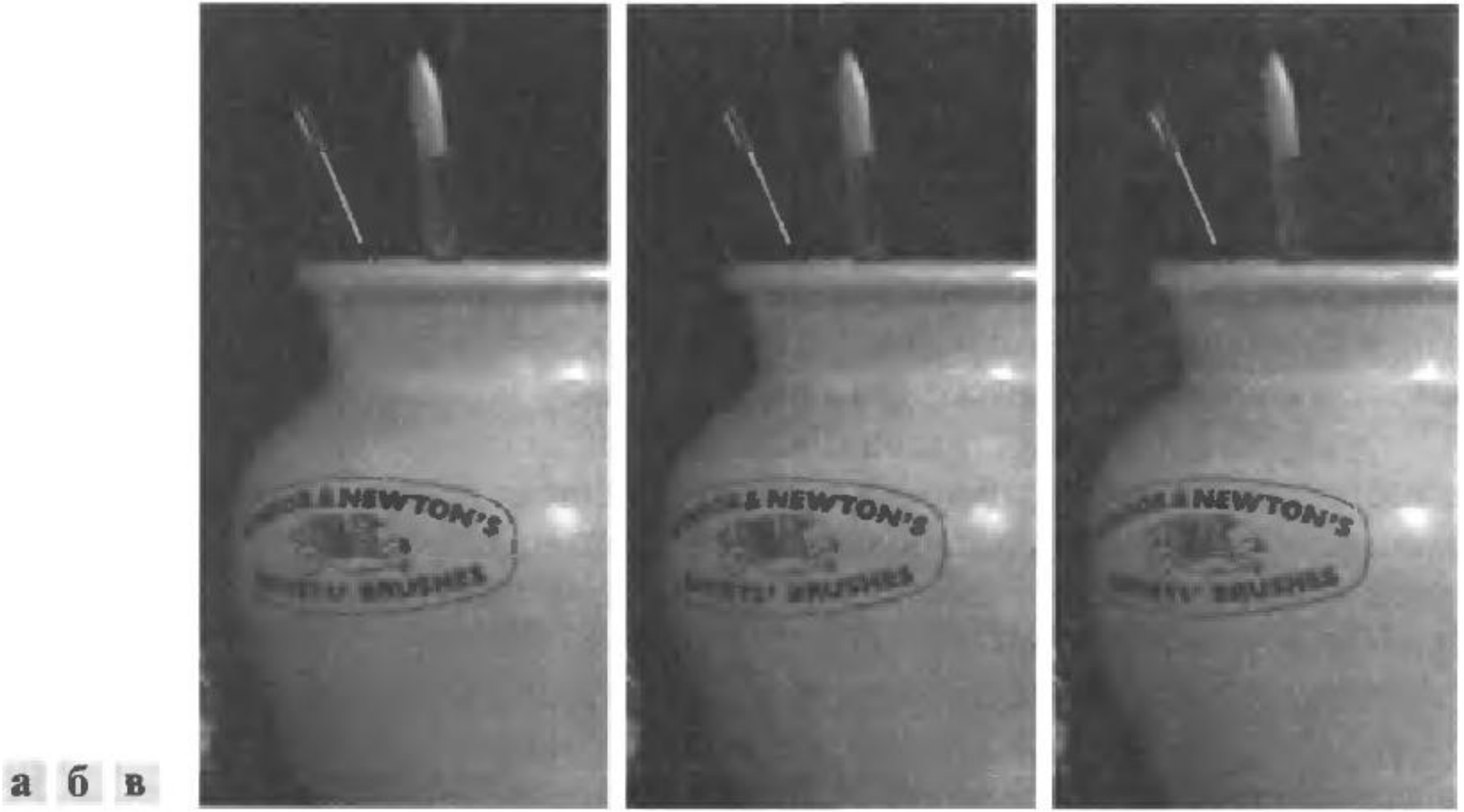


Рис. 8.4. (а) Исходное изображение. (б) Равномерное квантование на 16 уровней. (в) Метод модифицированного квантования яркости на 16 уровней.

Модели межэлементной избыточности изображения

Пусть $f(q), f(q-1), f(q-2), \dots, f(2), f(1)$ - **марковская** последовательность $\mathrm{k}-$ого порядка, при $\mathrm{k} < \mathrm{j}$:

$$H\left(f(q) \mid f(q-1), \dots, f(q-k)\right) \le H\left(f(q) \mid f(q-1), \dots, f(q-j)\right)$$

Информация в q той компоненте увеличивается при уменьшении зависимости между ней и другими компонентами. Увеличение числа наиболее независимых компонент увеличивает количество информации в этом подмножестве и уменьшает в остальных компонентах, информация перераспределяется между компонентами.

Доказательство свойства: $H\left(f_q | f_{q-1}, f_{q-2}\right) \le H\left(f_q | f_{q-1}\right) \le H\left(f_q\right)$ равенства имеют место в том и только в том случае, когда реализации f_q, f_{q-1}, f_{q-2} -независимы.

$$H\left(f_q \mid f_{q-1}\right) - H\left(f_q\right) = -\sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)\log_2 \frac{P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)}{P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right)} + \sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)\log_2 P\left(f_q = r_{j0}\right) =$$

$$= \sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)\log_2 \frac{P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right)P\left(f_q = r_{j0}\right)}{P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)} \le \sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)\left(\frac{P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right)P\left(f_q = r_{j0}\right)}{P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)} - 1\right)\log_2 e =$$

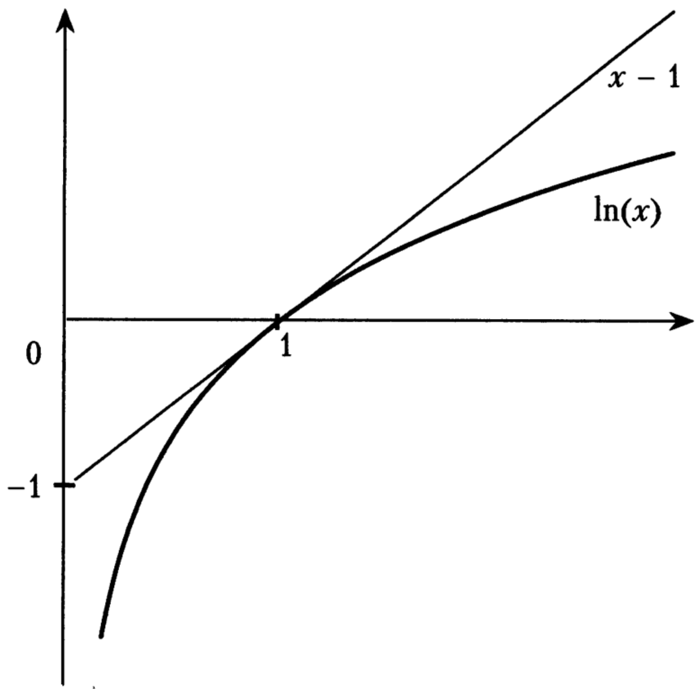
$$= \left(\sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right)P\left(f_q = r_{j0}\right) - \sum_{j0=1}^{J}\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_q = r_{j0}, f_{q-1} = r_{j1}\right)\right)\log_2 e = 0$$

- вследствие условия нормировки вероятностей.

$$H\left(f_q \mid f_{q-1} = r_{j1}, f_{q-2}\right) \le H\left(f_q \mid f_{q-1} = r_{j1}\right), \quad r_{j1} = 1..J$$

$$\sum_{j1=1}^{J} P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right) H\left(f_q \mid f_{q-1} = r_{j1}, f_{q-2}\right) \le \sum_{j1=1}^{J} P\left(f_{q-1} = r_{j1}\right) H\left(f_q \mid f_{q-1} = r_{j1}\right)$$

$$H\left(f_q \mid f_{q-1}, f_{q-2}\right) \le H\left(f_q \mid f_{q-1}\right)$$



Графическая интерпретация неравенства $\ln(x) \leqslant x - 1$

$\log x \leqslant (x-1)\log e$

Модели межэлементной избыточности изображения

Пусть $f(q), f(q-1), f(q-2), \ldots, f(2), f(1)$ - **марковская** последовательность $\mathrm{k}-\mathrm{ого}$ порядка, при $\mathrm{k} < \mathrm{j}$:

$$H\Big(f\left(q\right)|\ f\left(q-1\right),\ldots,f\left(q-k\right)\Big) \leq H\Big(f\left(q\right)|\ f\left(q-1\right),\ldots,f\left(q-j\right)\Big)$$

Информация в q той компоненте увеличивается при уменьшении зависимости между ней и другими компонентами. Увеличение числа наиболее независимых компонент увеличивает количество информации в этом подмножестве и уменьшает в остальных компонентах, информация перераспределяется между компонентами.

Признаки на изображении – наиболее характерные (информативные) элементы данных. Любое преобразование, увеличивающее количество информации на элемент данных, способствует выделению признаков. Значит максимизация энтропии пикселя без потери информации выделяет признаки изображения.

Модели межэлементной избыточности изображения

Пусть $f(q), f(q-1), f(q-2), \dots, f(2), f(1)$ - **марковская** последовательность $\mathrm{k}-$ого порядка, при $\mathrm{k} < \mathrm{j}$:

$$H\left(f(q)\mid f(q-1),\dots,f(q-k)\right) \le H\left(f(q)\mid f(q-1),\dots,f(q-j)\right)$$

Информация в q той компоненте увеличивается при уменьшении зависимости между ней и другими компонентами. Увеличение числа наиболее независимых компонент увеличивает количество информации в этом подмножестве и уменьшает в остальных компонентах, информация перераспределяется между компонентами.

Признаки на изображении – наиболее характерные (информативные) элементы данных. Преобразование, увеличивающее количество информации на элемент данных, способствует выделению признаков. На это преобразование часто накладывают дополнительное условие – **устойчивость**: небольшим изменениям исходного изображения должны соответствовать небольшие изменения в элементах, отвечающим за признаки. Это условие позволяет строить метрическое признаковое пространство для сравнений признаков. Таким образом, устойчивое преобразование, максимизирующее энтропию пикселя без потери информации, выделяет признаки изображения.

Пример: Для естественных изображений характерна высокая степень корреляции между соседними элементами, т.е. существует большая избыточность. Один из вариантов кодирования с учетом предшествующего элемента состоит в кодировании разности уровней соседних элементов. Если L уровней яркости, то разность уровней может быть 0 … 2L-1. Вероятность появления разностей с большой абсолютной величиной разности мала, можно существенно перераспределить длины кодовых символов между элементами. Эффективность такого подхода может достигать 90%.

Разность уровней D	*Кодовое слово*
0	1
+1	0100
−1	0101
+2	0110
−2	0111
+3	00100
−3	00101
+4	00110
−4	00111
$\lvert D\rvert \ge 5$	000 + *6-разр. кодовое слово*

Разности соседних элементов – перепады яркости, которые достигают максимума только на границах областей, на контурах объектов, частота встречаемости которых значительно ниже, чем точек внутри поверхностей. Таким образом, на точках контуров достигается максимальная энтропия, они содержат основное количество информации, поэтому будут кодироваться более длинными кодами.

Контуры – одни из наиболее информативных признаков среди всех точек изображений.