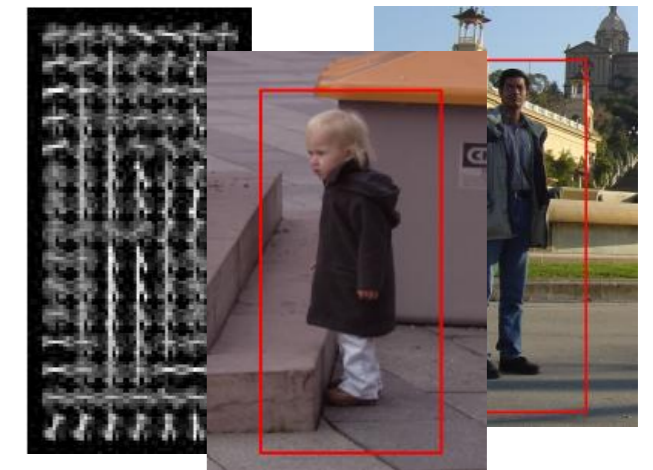
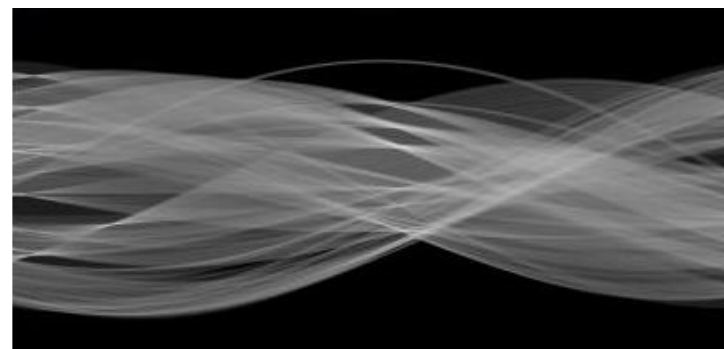
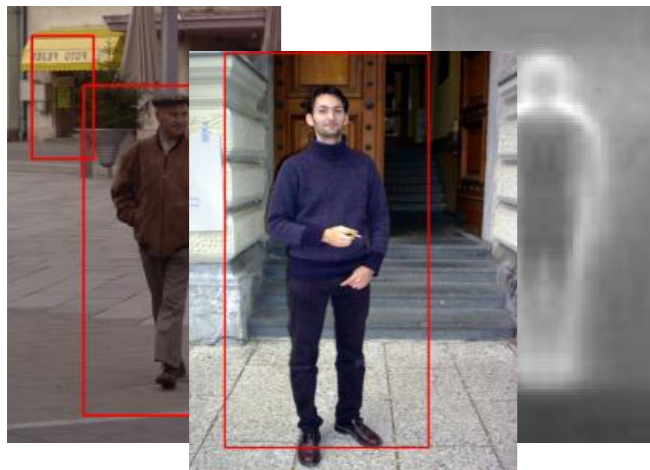


Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

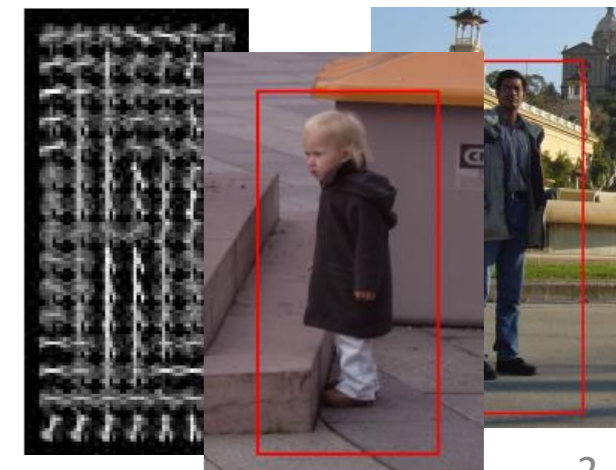
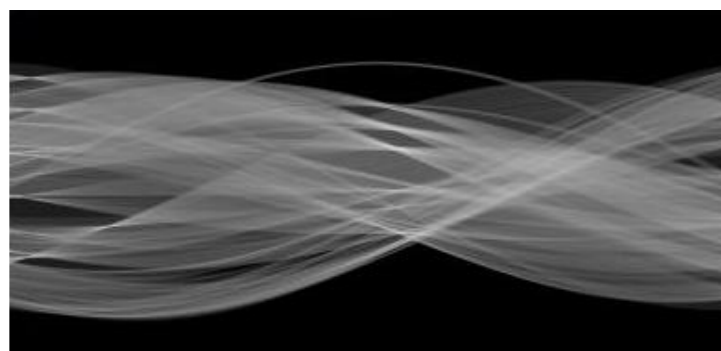
Гнеушев Александр Николаевич 



Спектральные методы реконструкции изображений

Тема 5

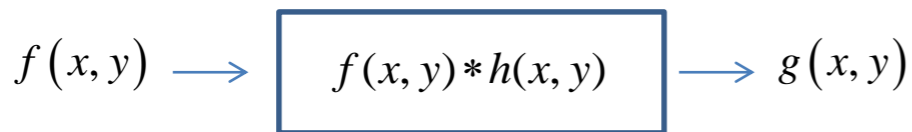
20.03.2026



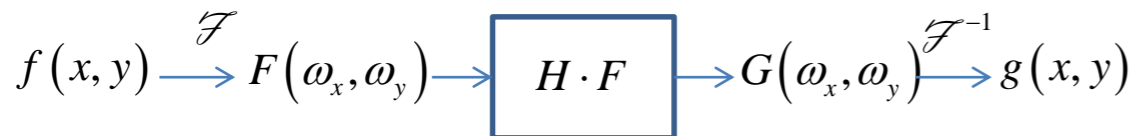
Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

(примеры)

Теорема о свертке

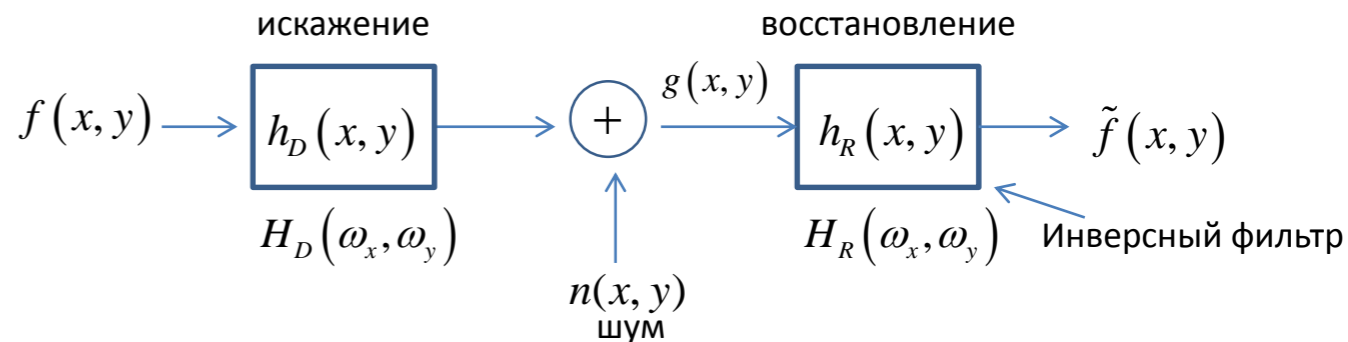


$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow G(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y)$$



$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$$

Инверсная фильтрация



Модель наблюдения:

$$g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)$$

Модель восстановления, реставрации:

$$\tilde{f}(x, y) = g(x, y) * h_R(x, y) = (f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)) * h_R(x, y)$$

По Теореме о свертке:

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = (F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_D(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y)) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y)$$

Восстановление будет наиболее полным если спектр восстановленного изображения $\tilde{F}(\omega_x, \omega_y)$ будет максимально близок к спектру неискаженного изображения $F(\omega_x, \omega_y)$.

$$H_R(\omega_x, \omega_y) - ?$$

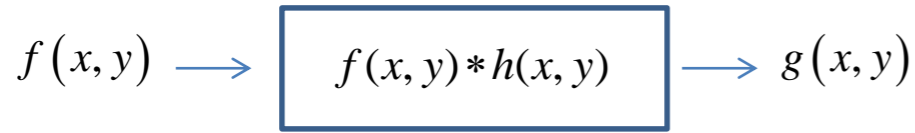
Модель искажения известна:

$$h_D(x, y), H_D(\omega_x, \omega_y)$$

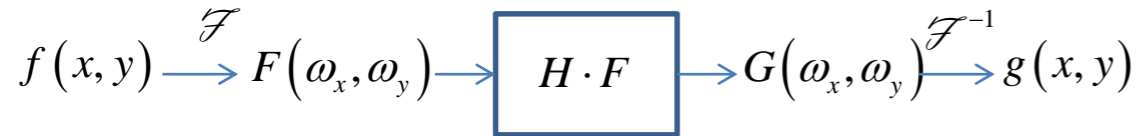
Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

(примеры)

Теорема о свертке



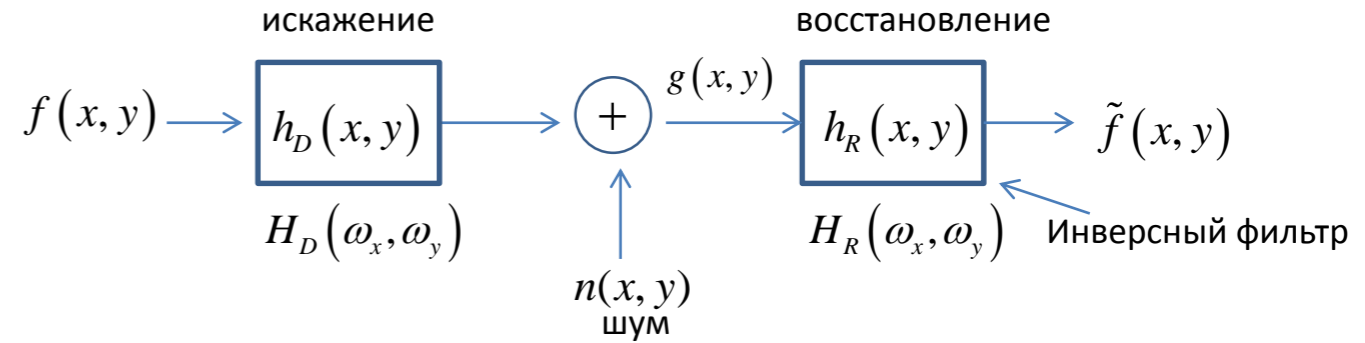
$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow G(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y)$$



$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y) \cdot F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$$

Инверсная фильтрация



Модель наблюдения:

$$g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)$$

Модель восстановления, реставрации:

По Теореме о свертке:

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = (F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_D(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y)) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y)$$

При $H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$: $\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) + \frac{N(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$

Инверсный фильтр

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)} e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$$

При малых $H_D(\omega_x, \omega_y)$ может быть большая

При $n(x, y) \equiv 0$ - идеальная реставрация

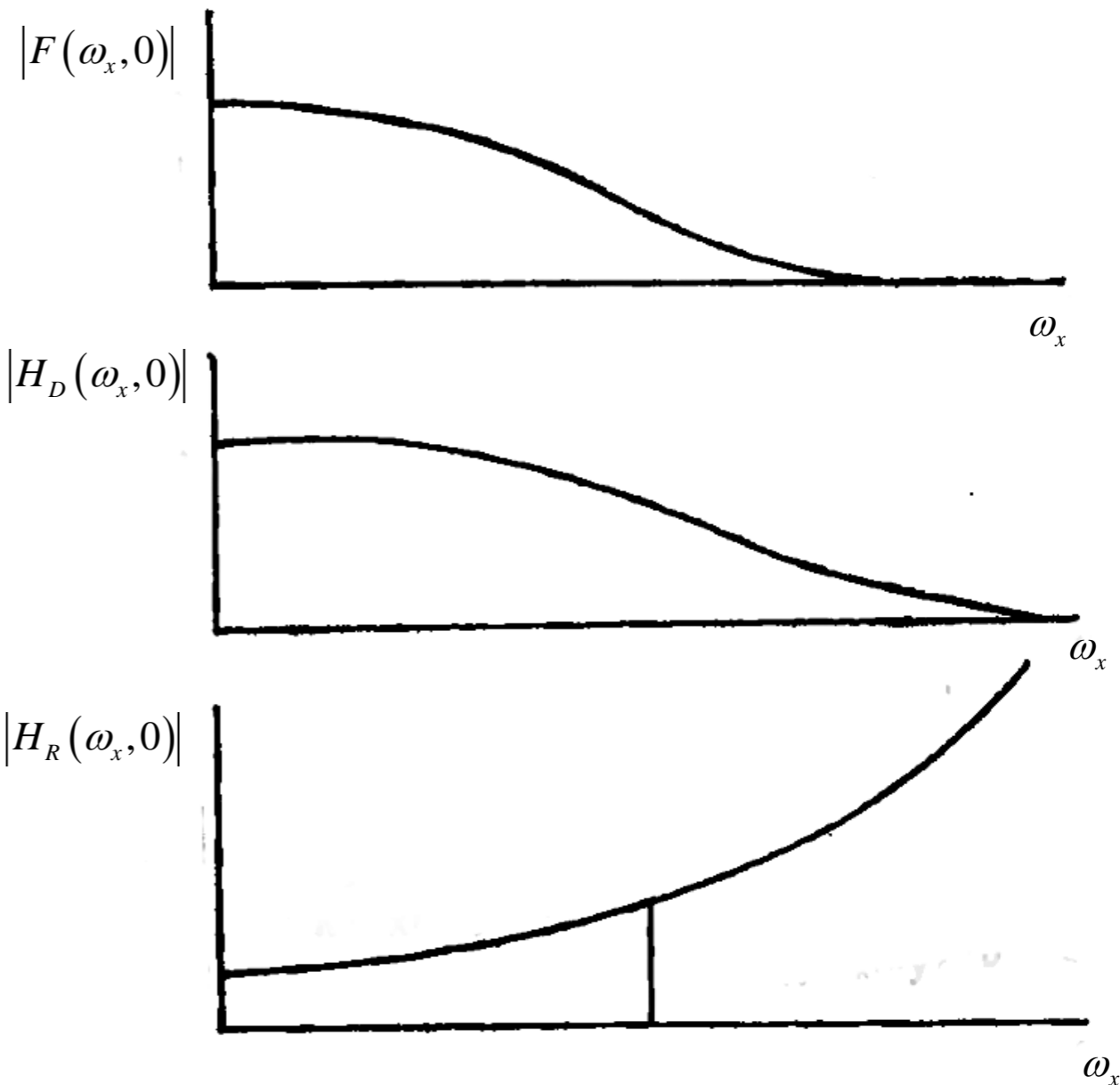
Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Инверсная фильтрация

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = (F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_D(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y)) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y).$$

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)} \Rightarrow \tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) + \frac{N(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

Если $N(\omega_x, \omega_y)$ - содержит **высокочастотные** составляющие, то уравнение восстановления плохо обусловлено и неустойчиво. На высоких частотах $H_R(\omega_x, \omega_y)$ искажает изображение.



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Инверсная фильтрация

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = (F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_D(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y)) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y).$$

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)} \Rightarrow \tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) + \frac{N(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

Если $N(\omega_x, \omega_y)$ - содержит высокочастотные составляющие, то уравнение восстановления плохо обусловлено и неустойчиво. На высоких частотах $H_R(\omega_x, \omega_y)$ искажает изображение.

Инверсный фильтр с отсечением

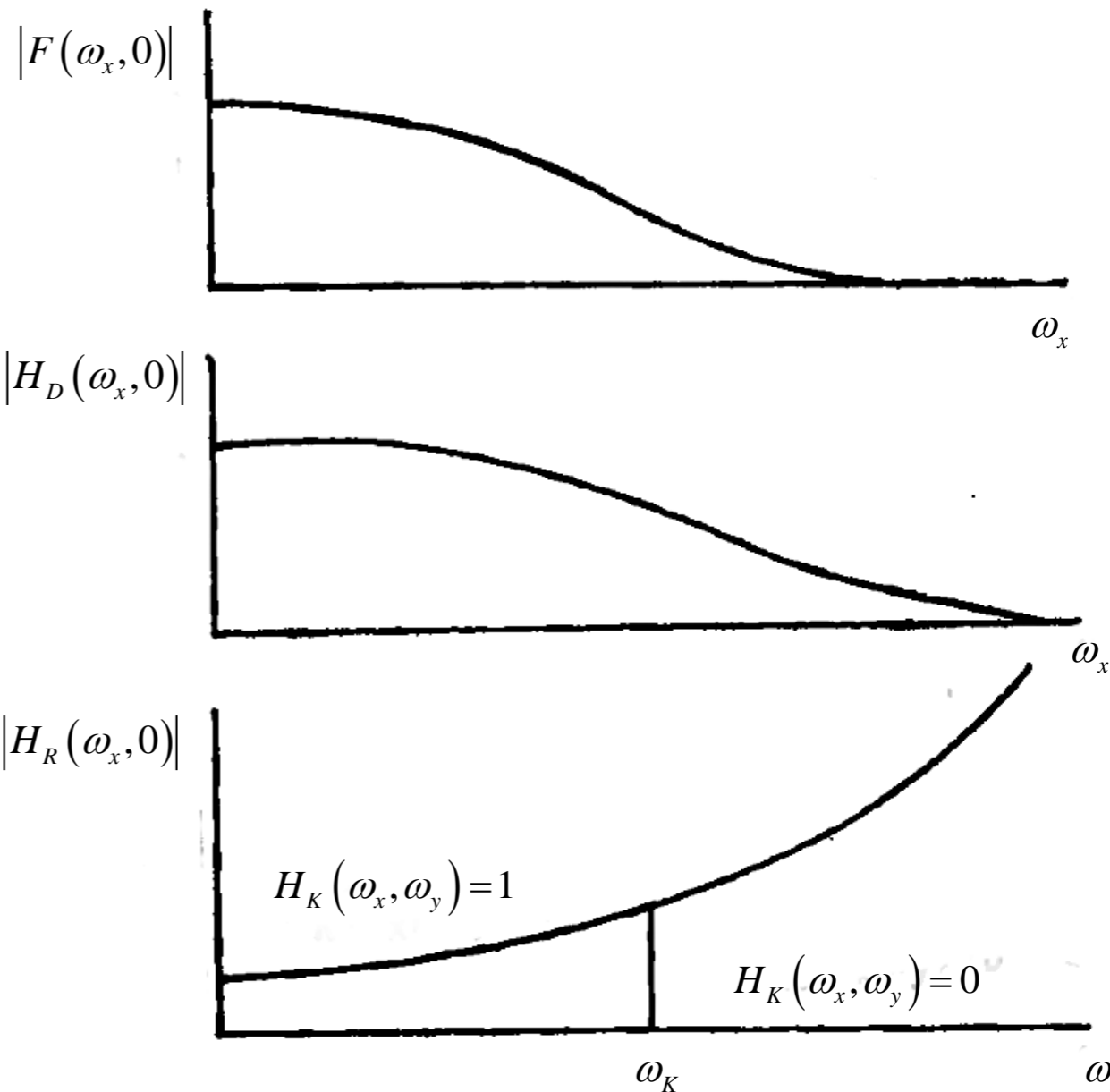
Пусть $H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_K(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$, $H_K(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \omega_x \leq \omega_K, \omega_y \leq \omega_K \\ 0, & \omega_x > \omega_K, \omega_y > \omega_K \end{cases}$

уменьшение уровня шума

$$\Rightarrow \tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) H_K(\omega_x, \omega_y) + \frac{H_K(\omega_x, \omega_y) N(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

снижение контраста и четкости мелких деталей

Если $H_D(\omega_x, \omega_y)$ имеет нули в рабочем диапазоне, то инверсный фильтр не реализуем.



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Винеровская фильтрация

Модель реконструкции :

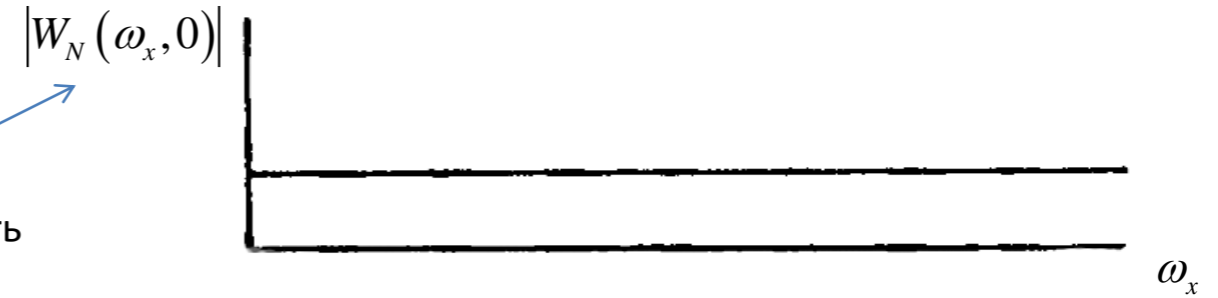
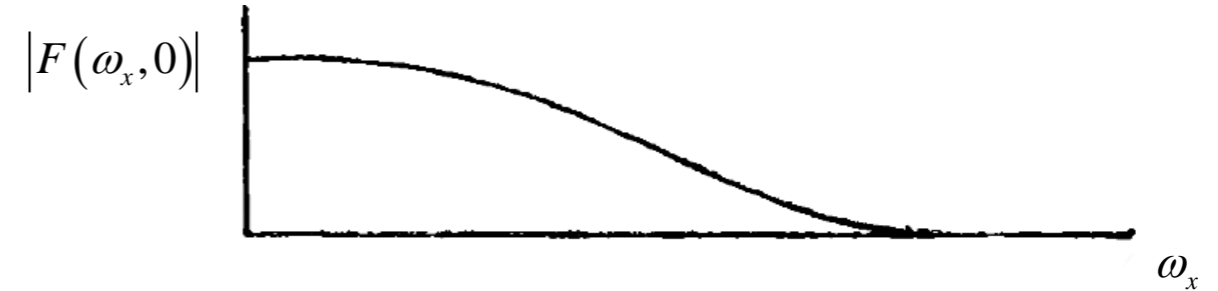
$$\tilde{f}(x, y) = (f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)) * h_R(x, y)$$

Постановка задачи:

$$\varepsilon = M \left[(f(x, y) - \tilde{f}(x, y))^2 \right] \rightarrow \min_{h_R}$$

$$\Rightarrow H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)}$$

Энергетический спектр (спектральная плотность мощности) шума известен



$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) \cdot \frac{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)} + \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y) N(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)}$$

При $W_N(\omega_x, \omega_y) \equiv 0$ получаем инверсный фильтр.

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Винеровская фильтрация

Модель реконструкции:

$$\tilde{f}(x, y) = (f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)) * h_R(x, y)$$

Постановка задачи:

$$\varepsilon = M \left[\left(f(x, y) - \tilde{f}(x, y) \right)^2 \right] \rightarrow \min_{h_R}$$

$$\Rightarrow H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)}$$

Энергетический спектр (спектральная плотность мощности) шума **известен**

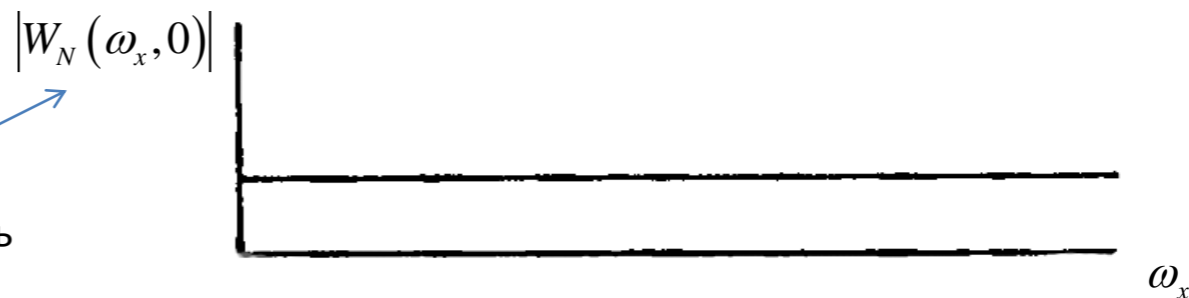
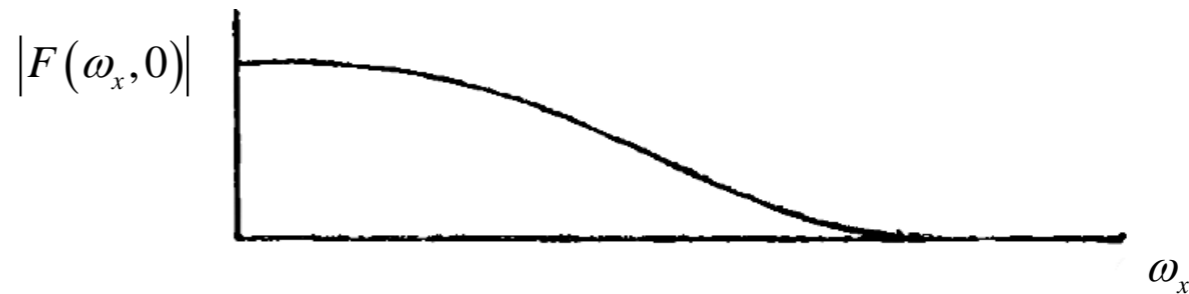
$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) \cdot \frac{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)} + \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y) N(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + W_N(\omega_x, \omega_y)}$$

Если учитывается пространственная корреляция яркостей изображения с **известным** энергетическим спектром $W_f(\omega_x, \omega_y)$.

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + \left[W_N(\omega_x, \omega_y) / W_f(\omega_x, \omega_y) \right]}$$

$1/SNR(\omega_x, \omega_y) = K(\omega_x, \omega_y) \approx K_0$ - обратное отношение сигнал-шум для энергетических спектров, регуляризационная добавка

Винеровский фильтр решает проблему нулей в спектре $H_D(\omega_x, 0)$.



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Фильтрация с регуляризацией по Тихонову

Модель наблюдения:

$$g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)$$

Модель реконструкции:

$$\tilde{f}(x, y) = g(x, y) * h_R(x, y)$$

Модель искажения известна: $h_D(x, y)$
Параметры шума известны: $M[n^2(x, y)]$
(дисперсия и мат. ожидание)

Постановка задачи:

$$\varepsilon = M \left[\left(f(x, y) - \tilde{f}(x, y) \right) \right]^2 \rightarrow \min_{h_R}$$



$$\begin{cases} \varepsilon = M \left[\nabla^2 \tilde{f}(x, y) \right]^2 \rightarrow \min_{\tilde{f}} & \text{- минимизация ВЧ, максимизация сглаживания} \\ \left\| g(x, y) - \tilde{f}(x, y) * h_D(x, y) \right\|^2 = \left\| n(x, y) \right\|^2 & \text{- ограничение на остаточную ошибку решения (связана с дисперсией шума)} \end{cases}$$

ВЧ - фильтр

$$\nabla^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{\left| H_D(\omega_x, \omega_y) \right|^2 + \gamma \cdot (\omega_x^2 + \omega_y^2)^2}$$

↑
параметр регуляризации

$$\Rightarrow \tilde{F}(\omega_x, \omega_y; \gamma) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{\left| H_D(\omega_x, \omega_y) \right|^2 + \gamma \cdot (\omega_x^2 + \omega_y^2)^2} G(\omega_x, \omega_y)$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Фильтрация с регуляризацией по Тихонову

Модель наблюдения:

$$g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)$$

Модель реконструкции:

$$\tilde{f}(x, y) = g(x, y) * h_R(x, y)$$

Модель искажения известна: $h_D(x, y)$

Параметры шума известны: $M[n^2(x, y)]$
(дисперсия и мат. ожидание)

Постановка задачи:

$$\varepsilon = M \left[\left(f(x, y) - \tilde{f}(x, y) \right) \right]^2 \rightarrow \min_{h_R}$$



$$\begin{cases} \varepsilon = M \left[\nabla^2 \tilde{f}(x, y) \right]^2 \rightarrow \min_f & \text{- минимизация ВЧ, максимизация} \\ & \text{сглаживания} \\ \left\| g(x, y) - \tilde{f}(x, y) * h_D(x, y) \right\|^2 = \left\| n(x, y) \right\|^2 & \text{- ограничение на остаточную ошибку} \\ & \text{решения (связана с дисперсией шума)} \end{cases}$$

ВЧ - фильтр

$$\nabla^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{\left| H_D(\omega_x, \omega_y) \right|^2 + \gamma \cdot (\omega_x^2 + \omega_y^2)^2}$$

↑
параметр регуляризации

$$\Rightarrow \tilde{F}(\omega_x, \omega_y; \gamma) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{\left| H_D(\omega_x, \omega_y) \right|^2 + \gamma \cdot (\omega_x^2 + \omega_y^2)^2} G(\omega_x, \omega_y)$$

Оценка параметра регуляризации.

Вектор невязки:

$$r(x, y; \gamma) = g(x, y) - \tilde{f}(x, y; \gamma) * h_D(x, y) \Rightarrow R(\omega_x, \omega_y) = G(\omega_x, \omega_y) - H_D(\omega_x, \omega_y) \tilde{F}(\omega_x, \omega_y; \gamma)$$

$$r(x, y; \gamma) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ G(\omega_x, \omega_y) - H_D(\omega_x, \omega_y) \tilde{F}(\omega_x, \omega_y; \gamma) \right\}$$

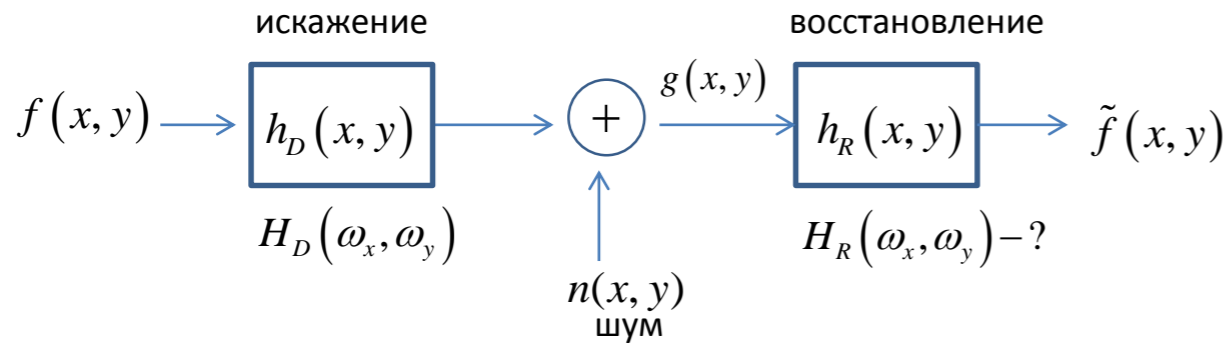
$$\varphi(\gamma) = M \left[r^2(x, y; \gamma) \right] = M \left[\left(g(x, y) - \tilde{f}(x, y; \gamma) * h_D(x, y) \right)^2 \right] \text{ - монотонная функция}$$

$$M \left[n^2(x, y) \right] - a \leq M \left[r^2(x, y; \gamma) \right] \leq M \left[n^2(x, y) \right] + a \text{ - условие на сходимость}$$

На базе оценки $M \left[r^2(x, y) \right]$ по найденному $\tilde{F}(\omega_x, \omega_y; \gamma)$ можно построить итеративный алгоритм подбора γ .

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Основные подходы линейной фильтрации



Модель наблюдения:

$$g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y) + n(x, y)$$

Модель реконструкции:

$$\tilde{f}(x, y) = g(x, y) * h_R(x, y)$$

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = (F(\omega_x, \omega_y) \cdot H_D(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y)) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y).$$

Инверсная фильтрация

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

Инверсный фильтр с отсечением

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_K(\omega_x, \omega_y)}{H_D(\omega_x, \omega_y)}, \quad H_K(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \omega_x \leq \omega_K, \omega_y \leq \omega_K \\ 0, & \omega_x > \omega_K, \omega_y > \omega_K \end{cases}$$

Оптимальная фильтрация

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + K(\omega_x, \omega_y)}$$

Винеровская фильтрация

$$K(\omega_x, \omega_y) = W_N(\omega_x, \omega_y) / W_f(\omega_x, \omega_y) = 1 / SNR(\omega_x, \omega_y) \approx K_0$$

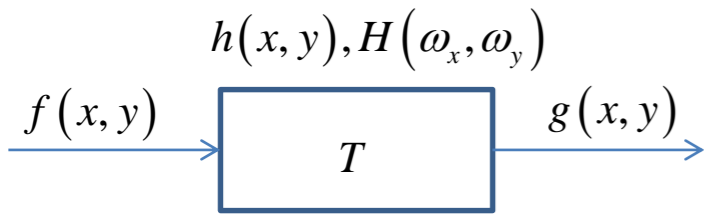
Фильтрация с регуляризацией по Тихонову

$$K(\omega_x, \omega_y) = \gamma \cdot (\omega_x^2 + \omega_y^2)^2$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Моделирование искажений для восстановления

Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, $h(x, y) - ?$



Размытость вследствие движения

$x_0(t), y_0(t)$ - закон движения изображения сцены в кадре.

Модель экспозиции движущегося объекта в плоскости изображения:

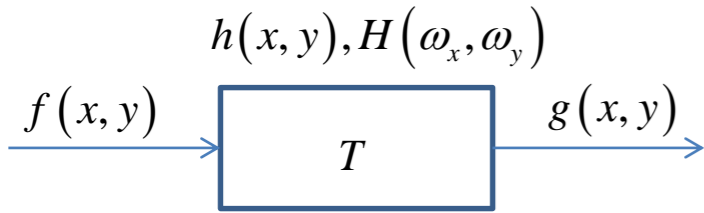
$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) d\tau - \text{размытое изображение}$$

T ← время экспозиции

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Моделирование искажений для восстановления

Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, $h(x, y) - ?$



Размытость вследствие движения

$x_0(t), y_0(t)$ - закон движения изображения сцены в кадре.

Модель экспозиции движущегося объекта в плоскости изображения:

T ← время экспозиции

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) d\tau \text{ - размытое изображение}$$

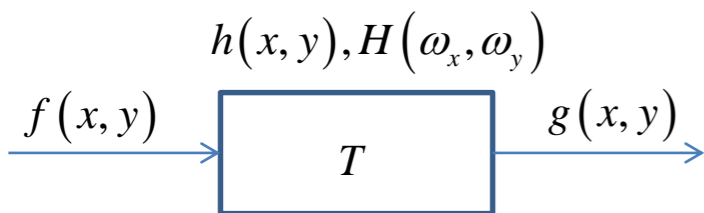
$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) d\tau \right] e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx = \\ &= \left[\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx d\tau \right] = \int_0^T F(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x x_0(\tau) + \omega_y y_0(\tau))} d\tau = \\ &= F(\omega_x, \omega_y) \underbrace{\int_0^T e^{-j(\omega_x x_0(\tau) + \omega_y y_0(\tau))} d\tau}_{H(\omega_x, \omega_y)} = F(\omega_x, \omega_y) H(\omega_x, \omega_y) \end{aligned}$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Моделирование искажений для восстановления

Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, $h(x, y) - ?$

$a = b = 0,1$ и $T = 1$.



Размытость вследствие движения

$x_0(t)$, $y_0(t)$ - закон движения изображения сцены в кадре.

Модель экспозиции движущегося объекта в плоскости изображения:

$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) d\tau$ - размытое изображение

$$G(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) d\tau \right] e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx =$$

$$= \left[\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0(\tau), y - y_0(\tau)) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dy dx d\tau \right] = \int_0^T F(\omega_x, \omega_y) e^{-j(\omega_x x_0(\tau) + \omega_y y_0(\tau))} d\tau =$$

$$= F(\omega_x, \omega_y) \underbrace{\int_0^T e^{-j(\omega_x x_0(\tau) + \omega_y y_0(\tau))} d\tau}_{H(\omega_x, \omega_y)} = F(\omega_x, \omega_y) H(\omega_x, \omega_y)$$



Пусть $x_0(t)$, $y_0(t)$ - равномерное поступательное движение :

$$x_0(t) = \frac{at}{T}, \quad y_0(t) = \frac{bt}{T} \quad - \text{сдвиг на } a \text{ и } b \text{ за время } T.$$

$$H(\omega_x, \omega_y) = \int_0^T e^{-j \frac{\omega_x a \tau + \omega_y b \tau}{T}} d\tau = -\frac{jT}{\omega_x a + \omega_y b} (1 - e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)}) = \frac{T}{(\omega_x a + \omega_y b)/2} \sin \frac{(\omega_x a + \omega_y b)}{2} e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)/2}$$

Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Примеры реконструкции

$$F(\omega_x, \omega_y) = G(\omega_x, \omega_y) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y)$$

Модель искажения:

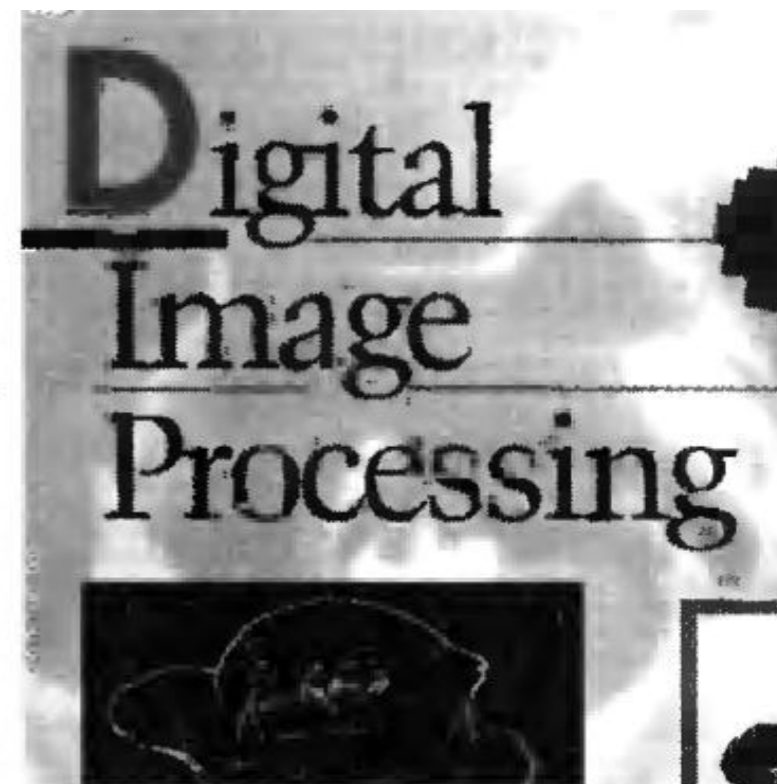
$$H_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{T}{(\omega_x a + \omega_y b)/2} \sin \frac{(\omega_x a + \omega_y b)}{2} e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)/2}$$

Инверсный фильтр

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$

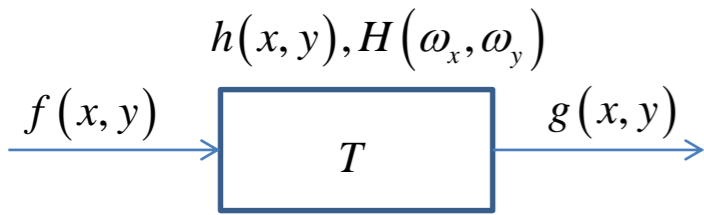
Винеровская фильтрация

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + K_0}$$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Моделирование искажений для восстановления



Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$, $h(x, y) - ?$

Размытость вследствие турбулентности атмосферы

$$H(\omega_x, \omega_y) = e^{-k(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{5/6}}$$

$k \approx 0$

$k \approx 0.0025$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Модель искажения:

$$H_D(\omega_x, \omega_y) = e^{-k(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{5/6}}$$

Примеры реконструкции

$$F(\omega_x, \omega_y) = G(\omega_x, \omega_y) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y)$$

Инверсный фильтр с отсечением

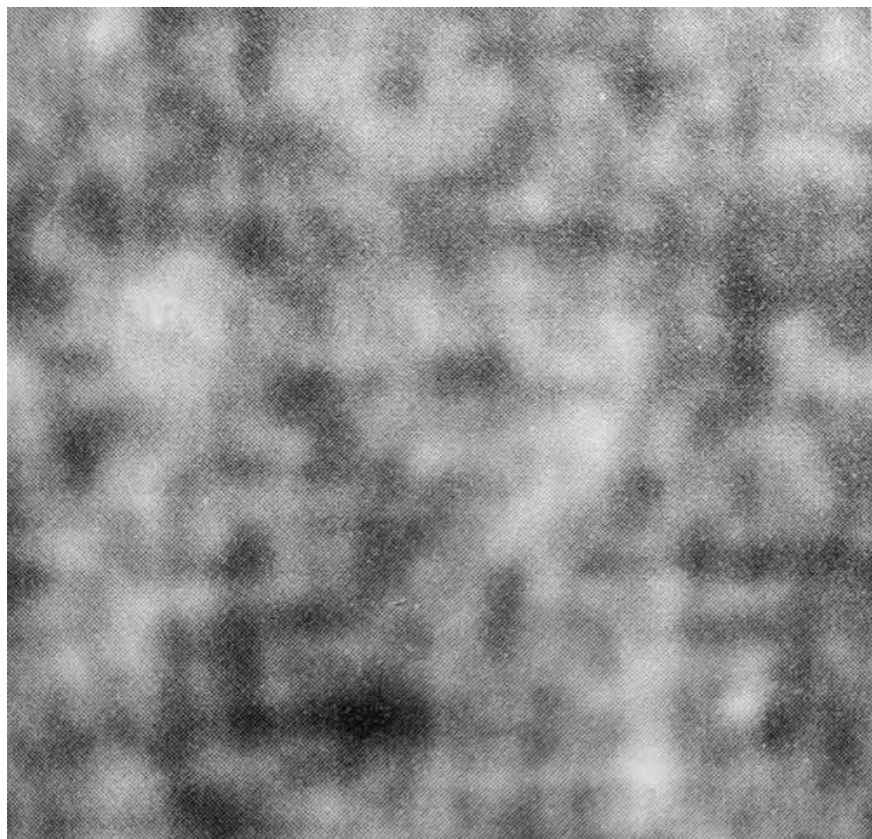
$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}, & \omega_x \leq \omega_K, \omega_y \leq \omega_K \\ 0, & \omega_x > \omega_K, \omega_y > \omega_K \end{cases}$$

Винеровская фильтрация

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{H_D^*(\omega_x, \omega_y)}{|H_D(\omega_x, \omega_y)|^2 + K_0}$$

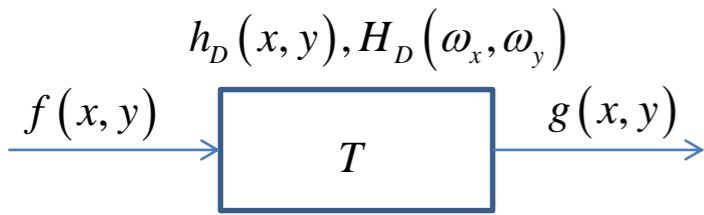
Инверсный фильтр

$$H_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H_D(\omega_x, \omega_y)}$$



Модель системы обработки изображения. Непрерывный случай.

Моделирование искажений для восстановления

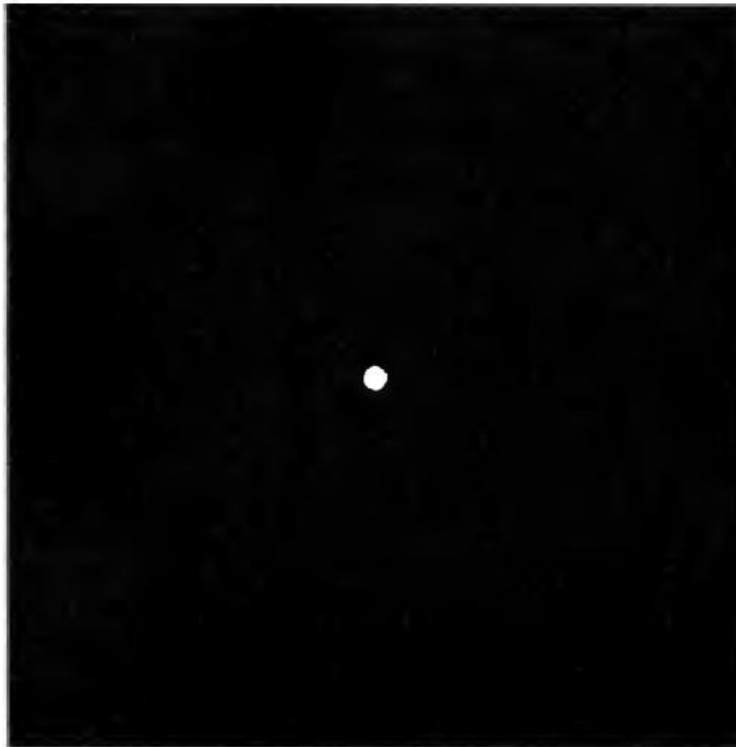


Модель наблюдения: $g(x, y) = f(x, y) * h_D(x, y)$, $h_D(x, y) - ?$

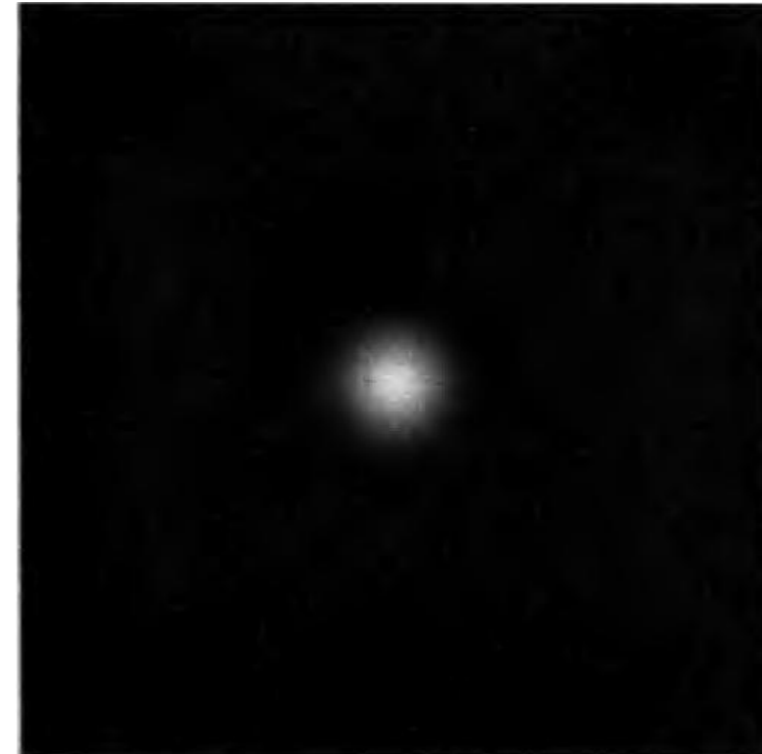
Прямое измерение функции рассеяния точки (ФРТ)

$$H_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{G(\omega_x, \omega_y)}{F(\omega_x, \omega_y)} = \frac{G(\omega_x, \omega_y)}{A}$$

$$f(x, y) = A\delta(x, y)$$

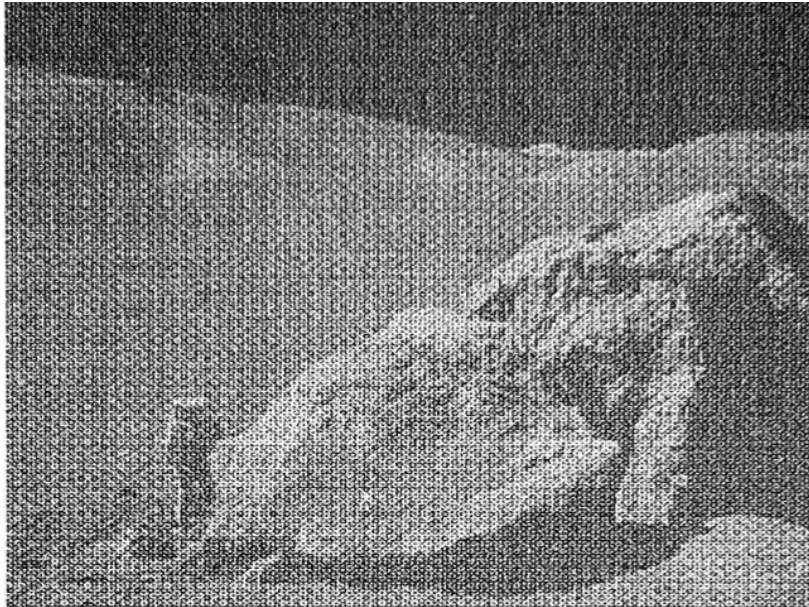


$$g(x, y) = T(\delta(x, y))$$

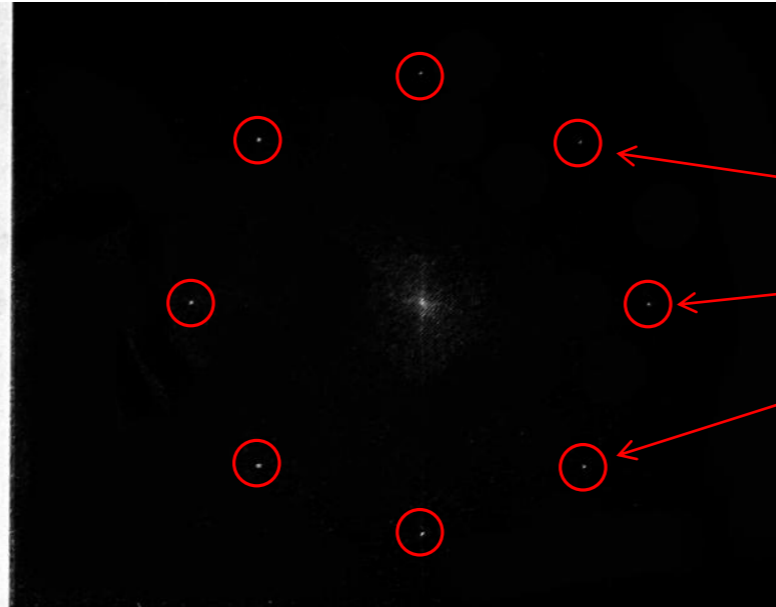


Прямое конструирование фильтра для применения в частотной области

$g(x, y)$



$G(\omega_x, \omega_y)$



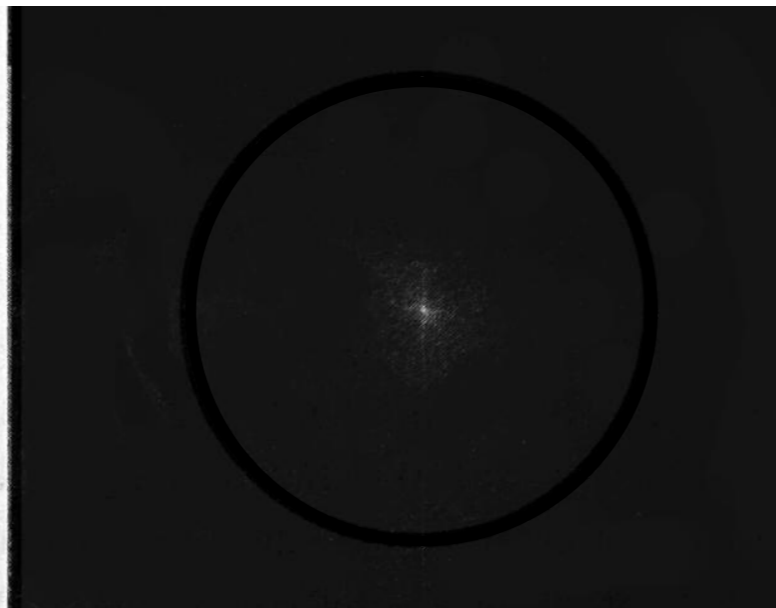
Примеры реконструкции

Пики в спектре от периодического шума (части частотной характеристики искажений)

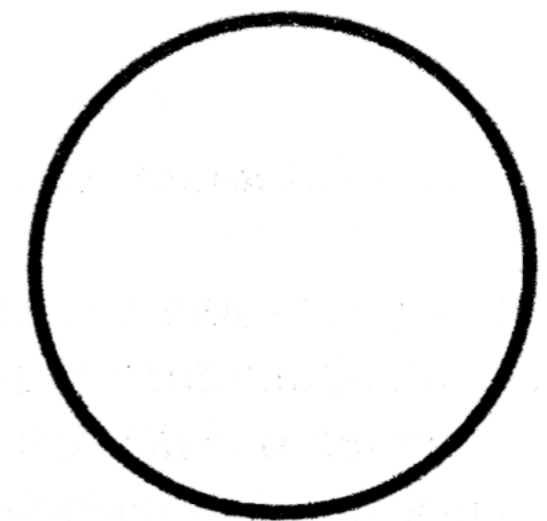
$f(x, y)$



$$F(\omega_x, \omega_y) = G(\omega_x, \omega_y) \cdot H_R(\omega_x, \omega_y)$$



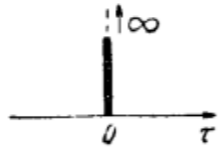
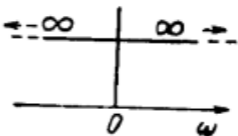

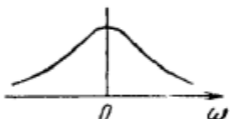
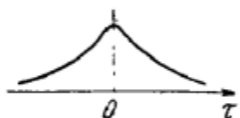
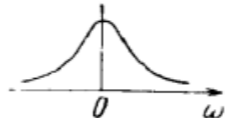
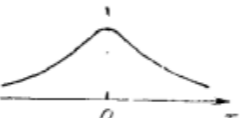
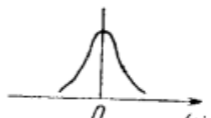
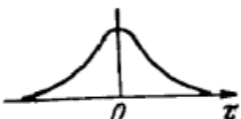
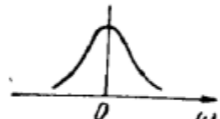
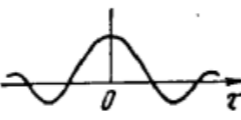
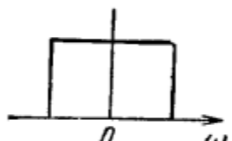
$$H_R(\omega_x, \omega_y)$$



Конструирование фильтров

примеры

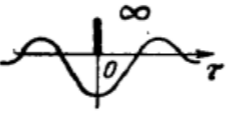

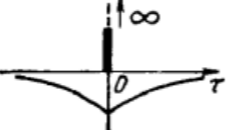
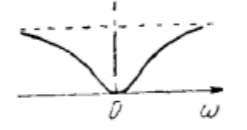
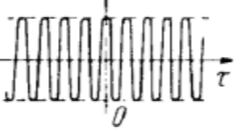
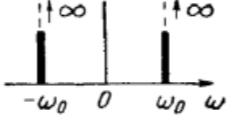

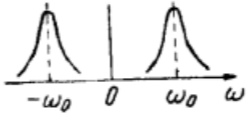

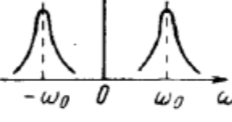

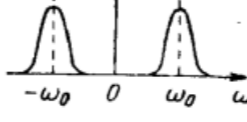
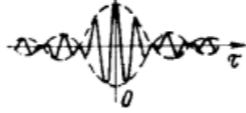
Некоторые функции и их Фурье-спектры

1.	Белый шум	$\frac{N_0}{2} \delta(\tau)$		$\frac{N_0}{2}$	
2.	Низкочастотный RC-фильтр	$e^{-\alpha \tau }$		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \alpha = \frac{1}{RC}$	
3.	Два низкочастотных RC-фильтра	$(1 + \alpha \tau) e^{-\alpha \tau }$		$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	
4.	Три низкочастотных RC-фильтра	$\left[1 + \alpha \tau + \frac{(\alpha\tau)^2}{3}\right] e^{-\alpha \tau }$		$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$	
5.	Гауссов низкочастотный фильтр	$e^{-\alpha\tau^2}$		$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$	
6.	Идеальный низкочастотный фильтр	$\frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$		$\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega \leq \Delta\omega$ 0 при $ \omega > \Delta\omega$	

Конструирование фильтров

примеры

Некоторые функции и их Фурье-спектры

7.	Идеальный высокочастотный фильтр	$\frac{\pi}{\Delta\omega} \delta(\tau) - \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$		0 при $ \omega \leq \Delta\omega$ $\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega > \Delta\omega$	
8.	Высокочастотный RL-фильтр	$\delta(\tau) - \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{ \tau }{\beta}}$		$\frac{(\beta\omega)^2}{1 + (\beta\omega)^2}, \beta = \frac{L}{R}$	
9.	Синусоида со случайной фазой	$\frac{1}{2} A_0^2 \cos \omega_0 \tau$		$\frac{\pi}{2} A_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10.	Колебательный контур	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$		$\alpha \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$	
11.	Колебательный контур	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$		$\frac{4\alpha (\omega_0^2 + \alpha^2)}{[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$	
12.	Гауссов радиофильтр	$e^{-\alpha\tau^2} \cos \omega_0 \tau$		$\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \times \left[e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha}} \right]$	
13.	Идеальный радиофильтр	$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega\tau}{\frac{1}{2} \Delta\omega\tau}$		$\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega \pm \omega_0 \leq \frac{\Delta\omega}{2}$ 0 при $ \omega \pm \omega_0 > \frac{\Delta\omega}{2}$	