

Непрерывное представление времени в задачах декодирования сигналов

Самохина Алина Максимовна

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Москва
2021

Исследуется проблема построения фазового пространства при непрерывном представлении времени: рассматриваются способы построения непрерывного по времени представления сигнала.

Задача: построение нейроинтерфейса работающего с многомерными временными рядами как с непрерывными по времени.

Гипотеза: рекуррентные нейронные сети с решением обыкновенных дифференциальных уравнений работают с входящим сигналом как с непрерывным по времени и позволяют получить его непрерывное представление.

Актуальность: предполагается, что рассматриваемый подход к декодированию сигналов применим к сигналам с носимых устройств:

- 1 для передискретизации сигнала при низких частотах семплирования
- 2 для обработки нерегулярных по времени данных при непостоянном контакте со считывающим устройством

Метод решения:

Для поставленной задачи предлагается использовать рекуррентные сети (RNN, LSTM) и нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения (Neural ODE).

Данные потенциалов P300

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^M, \mathbf{X}_i = \{\mathbf{x}_t\}_{t \in T}, \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^E, T = \{t_i\}_{i=1}^N, t_i \in \mathbb{R}$$

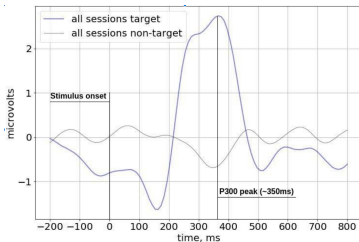
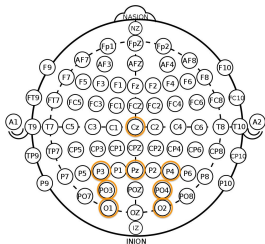
$$\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^M, y_i \in \{0, 1\}$$

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \text{const}$$

M — количество наблюдений в выборке

$E = 8$ — количество электродов

$N = 40$ — количество отсчётов времени в одном отрезке ЭЭГ



Непрерывность сигнала по времени

Пусть \mathbf{X} — реализация процесса $V(t)$, т.е. $\mathbf{x}_{t_i} \approx V(t_i)$.

Предполагается, что: $f_{\mathbf{X}}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^E$, такая что $f_{\mathbf{X}}(t) \approx \mathbf{x}_t \approx V(t)$.

- ① *Chen Ricky T. Q., Rubanova Yulia, Bettencourt Jesse, Duvenaud David* Neural Ordinary Differential Equations. // Advances in Neural Information Processing Systems 2018
- ② *Kidger, Patrick and Morrill, James and Foster, James and Lyons, Terry* Neural Controlled Differential Equations for Irregular Time Series // Advances in Neural Information Processing Systems 2020
- ③ *Lechner Mathias, Hasani Ramin* Learning Long-Term Dependencies in Irregularly-Sampled Time Series // arXiv:2006.04418, 2020

Определение процесса

$V(t), t \in \mathbb{R}$ — непрерывный процесс (активность мозга).

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_t\}_{t \in T}, \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^E, T = \{t_i\}_{i=1}^N, t_i \in \mathbb{R}$ — регистрируемый сигнал ($\exists \exists \Gamma$), реализация процесса $V(t)$.

Задача декодирования сигнала

Данные: $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^M, \mathbf{X}_i = \{\mathbf{x}_t\}_{t \in T}, \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^E, T = \{t_i\}_{i=1}^N, t_i \in \mathbb{R}$.

Целевая переменная: $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^M, y_i \in \{0, \dots, C\}$,

где C — количество классов, T — количество отсчетов времени, M — количество наблюдений, N — количество отсчётов времени.

Целевая функция $g_\theta : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$.

Критерий качества: $L = -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\sum_{c=0}^C y_{m_c} \log(p_{m_c}) \right)$,

где $p_{m_c} = g_\theta(\mathbf{X}_m)$ — вероятность класса c для \mathbf{X}_m

Оптимизационная задача:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta, \mathbf{X}).$$

Внешние критерии качества: точность, F1-score.

Гипотеза

Предполагается, что скрытые состояния нейронных обыкновенных дифференциальных уравнений являются непрерывным представлением сигнала.

Критерии

Скрытое состояние считается непрерывным представлением сигнала, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

- 1 скрытое состояние обученной модели доступно и его можно использовать самостоятельно как представление сигнала,
- 2 полученное представление сохраняет форму приближаемого процесса,
- 3 функция представления позволяет получить значения в произвольный момент времени.

Модель

S — аппроксимация процесса реализации которого представлены в \mathbf{X} .

$S_{\mathbf{X}}(t) : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}^{E+1}$ — натуральный кубический сплайн с узлами в t_0, \dots, t_n ,

$S_{t_i} = (\mathbf{x}_i, t_i)$.

Пусть $f_{\theta} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times (E+1)}$ — нейронная сеть, зависящая от параметров θ ,

d — размерность скрытого пространства

Скрытое состояние Neural CDE — решение управляемого дифференциального уравнения

$$z_t = z_{t_0} + \int_{t_0}^t f_{\theta}(z_{\tau}) dS_{\tau} \quad \text{for } t \in (t_0, t_n]$$

Получение значения скрытого состояния: ODESolve()

Функция, определяющая начальное скрытое состояние: $i_{\theta_i} : \mathbb{R}^{E+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$

Функция классификации: $r_{\theta_r} : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, \dots, c\}$, c — количество классов в выборке

Результирующая модель:

$$r_{\theta_r}(\text{ODESolve}(S, i_{\theta_i}(S)))$$

Скрытое состояние $z(t)$ является непрерывным представлением исходного сигнала.

Модель LMU LSTM

Рассматривается $\theta \dot{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{m}(t) + \mathbf{b}u(t)$, где $\mathbf{m}(t) \in \mathbb{R}^d$ вектор состояния.
 $u_t = \mathbf{e}_x^\top \mathbf{x}_t + \mathbf{e}_h^\top \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{e}_m^\top \mathbf{m}_{t-1} \in \mathbb{R}$ — история изменения сигнала по скользящему окну $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$.

$\mathbf{e}, \mathbf{e}_h, \mathbf{e}_m$ — векторы, кодирующие соответствующие входы LSTM.

$$\mathbf{A} = [a]_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad a_{ij} = (2i + 1) \begin{cases} -1 & i < j \\ (-1)^{i-j+1} & i \geq j \end{cases}$$

$$\mathbf{b} = [b]_i \in \mathbb{R}^{d \times 1}, \quad b_i = (2i + 1)(-1)^i, \quad i, j \in [0, d - 1]$$

\mathbf{m} — скользящее окно u по полиномам Лежандра $\mathcal{P}_i(r)$ степени до $d - 1$.

Теорема (Самохина, 2021)

При нормировке градиента на $\|A\|_1$, сеть LMU LSTM не подвержена затуханию или взрыву градиентов.

Непрерывное представление сигнала — разложение на d базисных функций:

$$V(t - \theta') \approx \sum_{i=0}^{d-1} \mathcal{P}_i\left(\frac{\theta'}{\theta}\right) m_i(t), \quad 0 \leq \theta' \leq \theta,$$

Цели:

- 1 сравнить качество работы рассматриваемых алгоритмов с используемыми на практике,
- 2 получить непрерывное по времени представление сигнала.

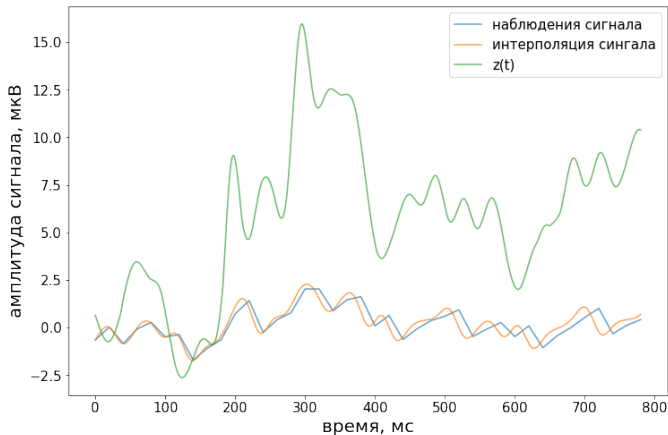
Выборка: сравнение моделей проведено на наборе данных по потенциалам P300: DemonsP300. В выборке представлены записи ЭЭГ при игре в виртуальной реальности для 60 человек.

Объём обучающей выборки: 39000 отрезков ЭЭГ, объём тестовой выборки: 17000 отрезков ЭЭГ.

Модель	Точность на обучении	Точность на тесте	F1-score на обучении	F1-score на тесте
Neural CDE	0.83	0.81	0.82	0.73
LMU LSTM	0.77	0.76	0.71	0.70
EEGNet	0.81	0.71	0.80	0.69
PyRiemann	0.74	0.51	0.70	0.53

Скрытое состояние NeuralCDE $z(t)$ отвечает всем поставленным критериям непрерывного представления сигнала.

$z(t)$ не является точным описанием процесса $V(t)$, но сохраняет его форму: на графике можно увидеть чёткий ожидаемый пик Р300. Для $z(t)$ можно получить значения для любого момента времени.



Результаты

- 1 Исследована возможность декодирования сигналов как непрерывных по времени.
- 2 Доказана теорема о градиентах для LMU LSTM.
- 3 На данных реальной задачи проведено сравнение качества моделей, использующих Neural ODE со стандартными подходами к декодированию сигналов ЭЭГ.
- 4 Получено непрерывное по времени представление сигнала.

Публикации и выступления

- 1 *Гончаренко В.В., Григорян Р.К., Самохина А.М.* Подходы к мультиклассовой классификации датасета потенциалов R300 // (в процессе)
- 2 10.12.2020. ИОИ-2020.
Подходы к мультиклассовой классификации датасета потенциалов R300.
- 3 28.11.2020. 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ.
Датасет потенциалов R300 и подходы к его обработке.