Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Дополнительный материал 1: Скорости сходимости последовательностей

1 Скорости сходимости последовательностей

Ключевой характеристикой сходящейся последовательности является ее предел. При этом, как известно, разные последовательности могут иметь один и тот же предел. Возникает естественный вопрос: как понять, *насколько быстро* та или иная последовательность сходится к своему пределу? Общепринятой здесь является классификация последовательностей по *скорости сходимости*.

Традиционно скорости сходимости вводятся только для последовательностей неотрицательных чисел, сходящихся к нулю. Чтобы распространить эти понятия на произвольную последовательность объектов $(a_k)_{k=m}^\infty$ (например, чисел, многомерных векторов, матриц и т. д.), сходящуюся к пределу a, поступают следующим образом. По $(a_k)_{k=m}^\infty$ определяется новая последовательность невязок $(r_k)_{k=m}^\infty$, которая состоит из неотрицательных чисел и сходится к нулю. Например, если $(a_k)_{k=m}^\infty$ — это последовательность чисел, то в качестве $(r_k)_{k=m}^\infty$ обычно берут $r_k := |a_k - a|$ или $r_k := |a_k - a|^2$; аналогичным образом, заменяя модуль на некоторую норму, можно ввести $(r_k)_{k=m}^\infty$ для последовательности многомерных векторов или матриц. Говоря о скорости сходимости $(a_k)_{k=m}^\infty$, в итоге подразумевают скорость сходимости $(r_k)_{k=m}^\infty$.

Базовым понятием является линейная сходимость, которая основана на сравнении последовательности с геометрической прогрессией:

Определение 1.1 (Линейная сходимость)**.** Пусть $(r_k)_{k=m}^\infty$ — последовательность неотрицательных чисел. Говорят, что $(r_k)_{k=m}^\infty$ *линейно сходится с параметром* $0 < q < 1$, если найдется $C > 0$, такое, что

$$r_k \leq Cq^k$$

для всех $k \geq m$. Если существует хотя бы одно $0 < q < 1$, такое, что $(r_k)_{k=m}^\infty$ линейно сходится с параметром q, то говорят, что $(r_k)_{k=m}^\infty$ имеет *линейную сходимость*. При этом точная нижняя грань множества всех q, для которых $(r_k)_{k=m}^\infty$ линейно сходится с параметром q, называется *константной линейной сходимости* последовательности $(r_k)_{k=m}^\infty$.

Замечание 1.2. Поскольку $Cq^k \to 0$ при $k \to \infty$, то из этого определения автоматически следует, что последовательность $(r_k)_{k=m}^\infty$ обязана сходиться к нулю. Таким образом, слово «сходимость» в названии означает сходимость последовательности к нулю. Другими словами, если последовательность $(r_k)_{k=m}^\infty$ не сходится к нулю, то она не может иметь линейную сходимость.

Пример 1.3. Пусть $(r_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность $r_k := 1/3^k$, и пусть $(z_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность $z_k := 4/3^k$. Обе последовательности $(r_k)_{k=1}^\infty$ и $(z_k)_{k=1}^\infty$ линейно сходятся с любым параметром $1/3 \leq q < 1$. При этом константа линейной сходимости обеих последовательностей равна $1/3$. Покажем, это, например, для последовательности $(r_k)_{k=1}^\infty$; для второй последовательности это делается аналогично. Предположим противное, т. е. что константа линейной сходимости $(r_k)_{k=1}^\infty$ строго меньше $1/3$. Тогда, согласно определению, для некоторого $0 < q < 1/3$ найдется $C > 0$, такое, что $1/3^k \leq Cq^k$ для всех $k \geq 1$. Но отсюда следует $C^{-1} \leq (3q)^k$ для всех $k \geq 1$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ получаем, что $C^{-1} \leq 0$ (поскольку $0 \leq 3q < 1$), что невозможно.

Упражнение 1.4. Покажите, используя определение, что последовательность $(1/k)_{k=1}^\infty$, хотя и сходится к нулю, линейной сходимостью не обладает.

Следующее утверждение показывает, что линейная сходимость не зависит от конечного числа начальных элементов последовательности:

Утверждение 1.5. *Пусть $(r_k)_{k=m}^\infty$ — последовательность неотрицательных чисел, и пусть $s \geq 0$ — целое число. Тогда последовательность $(r_k)_{k=m+s}^\infty$ сходится линейно с параметром $0 < q < 1$, если и только если последовательность $(r_k)_{k=m}^\infty$ также сходится линейно с параметром q. (В частности, константы линейной сходимости последовательностей $(r_k)_{k=m}^\infty$ и $(r_k)_{k=m+s}^\infty$ совпадают.)*

Доказательство. В обратную сторону утверждение является очевидным. Поэтому проведем доказательство лишь в прямую сторону. Поскольку при $s = 0$ утверждение является бессодержательным, будем считать, что $s \geq 1$.

Пусть $(r_k)_{k=m+s}^{\infty}$ сходится линейно с параметром q. Тогда, согласно определению, найдется $C > 0$, такое, что $r_k \leq Cq^k$ для всех $k \geq m + s$. Положим

$$C' := \max\left\{C, \frac{r_m}{q^m}, \ldots, \frac{r_{m+s-1}}{q^{m+s-1}}\right\}.$$

Тогда нетрудно видеть, что $r_k \leq C'q^k$ для всех $k \geq m$. Таким образом, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится линейно с параметром q. $\square$

Теперь перейдем к рассмотрению двух других типов сходимости.

Определение 1.6 (Сублинейная и сверхлинейная сходимости)**.** Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел. Если $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится к нулю, но при этом не обладает линейной сходимостью, то говорят, что $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет *сублинейную сходимость*. Если же, наоборот, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ обладает линейной сходимостью, и при этом константа линейной сходимости равна 0, то говорят, что имеет место *сверхлинейная сходимость*.

Говоря неформально, сублинейная сходимость означает, что последовательность сходится медленнее любой (даже «самой медленной») геометрической прогрессии; сверхлинейная сходимость, наоборот, означает, что последовательность сходится быстрее любой (даже «самой быстрой») геометрической прогрессии.

Пример 1.7. Последовательность $(1/k)_{k=1}^{\infty}$ имеет сублинейную сходимость (согласно упражнению 1.4). Последовательность $(1/3^{k^2})_{k=1}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость. Действительно, пусть $0 < q < 1$ — произвольное число. Поскольку $1/3^k \to 0$ при $k \to \infty$, то найдется $N \geq 1$, такое, что $1/3^k \leq q$ для всех $k \geq N$. Отсюда $1/3^{k^2} = (1/3^k)^k \leq q^k$ для всех $k \geq N$. Но это означает, что $(1/3^{k^2})_{k=1}^{\infty}$ сходится линейно с параметром q (согласно утверждению 1.5, не важно, что неравенство выполнено только с номера N). В силу произвольности q, это означает, что константа линейной сходимости $(1/3^{k^2})_{k=1}^{\infty}$ равна 0.

Замечание 1.8. Согласно введенным определениям, если последовательность имеет сверхлинейную сходимость, то она также имеет и линейную сходимость. Таким образом, класс сверхлинейно сходящихся последовательностей является подклассом линейно сходящихся последовательностей. При желании эти классы можно было бы отделить друг от друга, введя понятие *истинно линейной сходимости* как линейной сходимости с константой, отличной от нуля. Однако мы не будем этого делать.

Из утверждения 1.5 сразу же вытекает аналогичное утверждение относительно сублинейной и сверхлинейной сходимостей:

Следствие 1.9. *Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, и пусть $s \geq 0$ — целое число. Тогда последовательность $(r_k)_{k=m+s}^{\infty}$ имеет сублинейную (соответственно сверхлинейную) сходимость, если и только если последовательность $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ также имеет сублинейную (соответственно сверхлинейную) сходимость.*

Таким образом, тип сходимости не меняется при удалении из последовательности конечного числа начальных элементов.

Скорость сходимости удобно определять с помощью следующего теста, аналогичного признаку Коши сходимости числовых рядов:

Теорема 1.10 (Тест корней)**.** *Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть $\alpha := \limsup_{k\to\infty} r_k^{1/k}$. (Заметим, что $\alpha \geq 0$.)*

(a) Если $0 \leq \alpha < 1$, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет линейную сходимость с константной α.

(b) В частности, если $\alpha = 0$, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость.

(c) Если $\alpha = 1$, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сублинейную сходимость.

(d) Случай $\alpha > 1$ невозможен.

Доказательство. Во-первых, покажем, что, если $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет линейную сходимость с константой $0 \le \beta < 1$, то непременно $\alpha \le \beta$. Действительно, по определению константы линейной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего $\beta + \varepsilon < 1$, найдется $C > 0$, такое, что $r_k \le C(\beta + \varepsilon)^k$ для всех $k \ge m$. Отсюда $r_k^{1/k} \le C^{1/k}(\beta + \epsilon)$ для всех $k \ge m$. Переходя к верхнему пределу и используя $C^{1/k} \to 1$ при $k \to \infty$, получаем $\alpha \le \beta + \varepsilon$. В силу произвольности ε, отсюда следует, что $\alpha \le \beta$.

Таким образом, в случае $\alpha = 1$ последовательность $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не может иметь линейную сходимость согласно установленному выше результату (доказывается от противного). Поскольку, тем не менее, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится к нулю, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сублинейную сходимость.

Рассмотрим теперь случай $0 \le \alpha < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, такое, что $\alpha + \varepsilon < 1$. Согласно свойствам верхнего предела, найдется $N \ge m$, такое, что $r_k^{1/k} \le \alpha + \varepsilon$ для всех $k \ge N$. Отсюда $r_k \le (\alpha + \varepsilon)^k$ для всех $k \ge N$. Таким образом, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится линейно с параметром $\alpha + \varepsilon$ (согласно утверждению 1.5, не важно, что неравенство выполнено только с номера N). В силу произвольности ε, это означает, что константа линейной сходимости $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не превосходит α. Поскольку, как было показано выше, константа линейной сходимости не может быть меньше α, это означает, что константа линейной сходимости $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ в точности равна α.

Наконец, покажем, что случай $\alpha > 1$ невозможен. Действительно, пусть $\alpha > 1$. Тогда из определения верхнего предела следует, что для любого $N \ge m$ найдется $k \ge N$, такое, что $r_k^{1/k} \ge 1$, и, в частности, $r_k \ge 1$. Но это означает, что r_k имеет подпоследовательность, которая отделена от нуля. Значит, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не может сходиться к нулю, что противоречит условию. $\square$

Замечание 1.11. В отличие от признака Коши для сходимости числовых рядов, в данном случае тест корня не имеет ситуаций, в которых ответ может быть неоднозначным.

Иногда бывает проще вычислить предел отношений, чем предел корней. Следующая лемма показывает, как связаны эти два предела:

Лемма 1.12. *Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность строго положительных чисел. (Строгая положительность необходима для того, чтобы отношения r_{k+1}/r_k, появляющиеся ниже, были корректно определены.) Тогда*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} \le \liminf_{k\to\infty} r_k^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} r_k^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

Доказательство. Среднее неравенство следует из того, что нижний предел любой последовательности всегда не превосходит ее верхнего предела. Докажем последнее неравенство; первое доказывается аналогично.

Обозначим $L := \limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$. Если $L = +\infty$, то неравенство, очевидно, верное, поэтому далее будем считать, что L конечное. Заметим, что $L \ge 0$, поскольку отношение $\frac{r_{k+1}}{r_k}$ положительное для всех $k \ge m$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Согласно свойствам верхнего предела, найдется $N \ge m$, такое, что $\frac{r_{k+1}}{r_k} \le L + \varepsilon$ для всех $k \ge N$. Отсюда $r_{k+1} \le (L+\varepsilon) r_k$ для всех $k \ge N$. Применяя индукцию, получаем, что $r_k \le (L+\varepsilon)^{k-N} r_N$ для всех $k \ge N$. Обозначим $C := (L+\varepsilon)^{-N} r_N$. Тогда $r_k \le C(L+\varepsilon)^k$ для всех $k \ge N$, откуда $r_k^{1/k} \le C^{1/k}(L+\epsilon)$. Переходя к верхнему пределу и используя $C^{1/k} \to 1$ при $k \to \infty$, получаем $\limsup_{k\to\infty} r_k^{1/k} \le L + \varepsilon$. В силу произвольности ε, отсюда следует $\limsup_{k\to\infty} r_k^{1/k} \le L$. $\square$

Следствием теоремы 1.10 и леммы 1.12 является тест отношений, который можно рассматривать как аналог признака Даламбера сходимости числовых рядов.

Следствие 1.13 (Тест отношений)**.** *Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю.*

(a) *Если существует* $\alpha := \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$ *и при этом* $0 \le \alpha < 1$, *то* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *имеет линейную сходимость с константой* α.

(b) *В частности, если* $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0$, *то* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *имеет сверхлинейную сходимость.*

(c) *Если* $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$ *не существует, но при этом* $q := \limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$, *то* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *имеет линейную сходимость с константой, не превосходящей* q.

(d) *Если* $\liminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$, *то* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *имеет сублинейную сходимость.*

(e) *Ситуация* $\liminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ *невозможна.*

(f) *Во всех остальных случаях (т. е. когда* $\liminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1 \le \limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$*) нельзя утверждать что-либо конкретное о скорости сходимости* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$.

Замечание 1.14. В случае $\limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ некоторые авторы используют терминологию *Q-линейная сходимость* (от английского quotient, частное); если при этом $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0$, то используется термин *Q-сверхлинейная сходимость*; если $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$, то говорят, что имеет место *Q-сублинейная сходимость*. Скорость сходимость в том понимании, как она определяется в этом конспекте, эти авторы обычно называют *R-сходимостью* (от английского root, корень). К сожалению, как показывает упражнение 1.16, в отличие от R-сходимости, Q-сходимость не всегда способна «правильно» уловить скорость сходимости. В любом случае, мы не будем различать эти два типа сходимости и будем придерживаться данных выше определений.

Упражнение 1.15. Определите скорость сходимости последовательности $(1/k!)_{k=1}^{\infty}$.

В отличие от теста корней, в тесте отношений возможны случаи, когда ответ может быть неоднозначным:

Упражнение 1.16. Пусть $(r_k)_{k=1}^{\infty}$, $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательности

$$r_k := \begin{cases} \frac{1}{3^k}, & k \text{ нечетное}, \\ \frac{1}{3^{2k}}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad z_k := \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \text{ нечетное}, \\ \frac{1}{k^2}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad w_k := \begin{cases} \frac{1}{k^k}, & k \text{ нечетное}, \\ \frac{1}{k^{2k}}, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Покажите, что

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \liminf_{k\to\infty} \frac{w_{k+1}}{w_k} = 0$$

и

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{w_{k+1}}{w_k} = +\infty,$$

в то время как $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет линейную сходимость, $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет сублинейную сходимость, $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость. (*Подсказка*: используйте тест корней.)

Среди сверхлинейно сходящихся последовательностей традиционно выделяют специальный подкласс последовательностей, сходящихся особенно быстро. Этот тип сходимости называется *сверхлинейной сходимостью порядка* p. В то время как линейная сходимость основана на сравнении последовательности с геометрической прогрессией $(q^k)_{k=m}^{\infty}$, убывающей по экспоненте, сверхлинейная сходимость порядка p основана на сравнении с последовательностью $(q^{p^k})_{k=m}^{\infty}$, убывающей по *двойной экспоненте*:

Определение 1.17 (Сверхлинейная сходимость порядка p)**.** Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, и пусть $p > 1$. Говорят, что $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет *сверхлинейную сходимость порядка* p *с параметром* $0 < q < 1$, если найдется $C > 0$, такое, что

$$r_k \le C q^{p^k}$$

для всех $k \geq m$. В случае $p = 2$ используют термин *квадратичная сходимость*. Если существует хотя бы одно $0 < q < 1$, такое, что $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка p с параметром q, то говорят, что $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет *сверхлинейную сходимость порядка* p; при этом точная нижняя грань множества всех q, для которых $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка p с параметром q, называется *константой сверхлинейной сходимости порядка* p последовательности $(r_k)_{k=m}^{\infty}$.

Замечание 1.18. Нетрудно видеть (используя, например, тест корней), что если последовательность имеет сходимость порядка p, то она, действительно, сходится сверхлинейно. Это оправдывает присутствие слова «сверхлинейная» в названии этого типа сходимости.

Пример 1.19. Последовательность $(1/4^{1.5^k})_{k=0}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка 1.5 с параметром 1/4. Последовательность $(1/2^{2^k})_{k=0}^{\infty}$ сходится квадратично с параметром 1/2.

Полностью аналогично тому, как это было сделано для трех базовых типов сходимости, можно показать, что сверхлинейная сходимость порядка p не зависит от любого конечного числа начальных элементов последовательности и получить полный аналог теста корней.

Упражнение 1.20. Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть $s \geq 0$ — целое число. Покажите, что последовательность $(r_k)_{k=m+s}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка $p > 1$ с параметром $0 < q < 1$, если и только если последовательность $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ также имеет сверхлинейную сходимость порядка p с параметром q.

Упражнение 1.21 (Тест корней для сверхлинейной сходимости порядка p)**.** Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, $p > 1$, и пусть $\alpha := \limsup_{k\to\infty} r_k^{1/p^k}$. (Заметим, что $\alpha \geq 0$.)

(a) Если $0 \leq \alpha < 1$, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка p с константой α.

(b) Если $\alpha = 1$, то $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сверхлинейной сходимостью порядка p не обладает.

(c) Случай $\alpha > 1$ невозможен.

Пример 1.22. Согласно примеру 1.7, последовательность $(1/3^{k^2})_{k=1}^{\infty}$ сходится сверхлинейно, однако не обладает сходимостью порядка p ни для какого $p > 1$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3^{k^2}}\right)^{1/p^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^{k^2/p^k}} = 1.$$

Для сходимости порядка p также имеется аналог теста отношений, как и для базовых типов сходимости, однако этот тест имеет ряд ограничений: во-первых, он не позволяет установить, что последовательность сходимостью порядка p не обладает, и, во-вторых, он не позволяет определить константу сходимости.

Утверждение 1.23 (Тест отношений для сверхлинейной сходимости порядка p)**.** *Пусть* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *— последовательность строго положительных чисел, и пусть* $p > 1$*. Если* $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ *сходится к нулю, и при этом* $\limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k^p} < +\infty$*, то сходимость является сверхлинейной порядка* p*.*

Доказательство. Пусть $L := \limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k^p}$ — конечное число. Поскольку отношение $\frac{r_{k+1}}{r_k^p}$ положительное для всех $k \geq m$, то $L \geq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно свойствам верхнего предела, найдется $N \geq m$, такое, что $\frac{r_{k+1}}{r_k^p} \leq L + \varepsilon$ для всех $k \geq N$. Отсюда $r_{k+1} \leq (L+\varepsilon) r_k^p$ для всех $k \geq N$. Положим $C := (L+\varepsilon)^{-1/(p-1)}$. Пусть $n \geq N$, такое, что $r_n < C$; такое n существует, поскольку $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится к нулю. Применяя индукцию, получаем

$$r_k \leq C (C^{-1} r_n)^{p^{k-n}} = C \left((C^{-1} r_n)^{p^{-n}} \right)^{p^k}$$

для всех $k \geq n$. Поскольку по построению $r_n < C$, то $(C^{-1} r_n)^{p^{-n}} < 1$. Таким образом, по определению последовательность $(r_k)_{k=n}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость порядка p, а значит, и исходная последовательность $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ также имеет сверхлинейную сходимость порядка p (упражнение 1.20). $\square$

Замечание 1.24. Аналогично замечанию 1.14, в случае $\limsup_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k^p} < +\infty$ иногда говорят, что имеет место *Q-сверхлинейная сходимость порядка* p (если $p = 2$, то говорят о *Q-квадратичной сходимости*). Сходимость порядка p в смысле определения, данного выше, при этом называется *R-сверхлинейной сходимостью порядка* p (соответственно *R-квадратичной сходимостью*). Опять же, мы не будем различать эти два понятия, и будем придерживаться данного выше определения.

Упражнение 1.25. Пусть $M > 0$, $r_0 \geq 0$, и пусть $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ — последовательность, определенная рекуррентно по правилу $r_{k+1} := M r_k^2$ для $k \geq 0$. Установите необходимое и достаточное условие для M и r_0, при котором последовательность $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ будет сходиться к нулю.