

Байесовский выбор моделей: обоснованность и отбор признаков в линейной и логистической регрессии

Александр Адуенко

18е октября 2025

- Формула Байеса: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$;
- Формула полной вероятности: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$;
- Определение априорных вероятностей и selection bias;
- (Множественное) тестирование гипотез
- Экспоненциальное семейства. Достаточные статистики.
- Наивный байесовский классификатор. Связь целевой функции и вероятностной модели.
- Линейная регрессия: связь МНК и $\mathbf{w}_{ML}$, регуляризации и $\mathbf{w}_{MAP}$.
- Свойство сопряженности априорного распределения правдоподобию.
- Прогноз для одиночной модели:
$$p(\mathbf{y}_{test}|\mathbf{X}_{test}, \mathbf{X}_{train}, \mathbf{y}_{train}) = \int p(\mathbf{y}_{test}|\mathbf{w}, \mathbf{X}_{test})p(\mathbf{w}|\mathbf{X}_{train}, \mathbf{y}_{train})d\mathbf{w}.$$
- Связь апостериорной вероятности модели и обоснованности
$$p(M_i|\mathbf{X}_{train}, \mathbf{y}_{train}) \propto p(M_i)p_i(\mathbf{y}_{train}|\mathbf{X}_{train}).$$

$$\text{Evidence : } p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = \int p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w})p_i(\mathbf{w})d\mathbf{w}$$

$$p_i(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \frac{p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w})p_i(\mathbf{w})}{p(\mathbf{y}|\mathbf{X})}.$$

Предположения:

- w одномерный
- Априорное распределение $p_i(w)$ плоское с шириной Δw_{prior}
- Апостериорное распределение $p_i(w|\mathbf{X}, \mathbf{y})$ сконцентрировано вокруг w_{MAP} с шириной Δw_{post}

$$\text{Тогда: } \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) \approx \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, w_{MAP}) + \log \left(\frac{\Delta w_{\text{post}}}{\Delta w_{\text{prior}}} \right).$$

$$\text{Для } M\text{-мерного } \mathbf{w}: \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) \approx \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}_{MAP}) + M \log \left(\frac{\Delta w_{\text{post}}}{\Delta w_{\text{prior}}} \right).$$

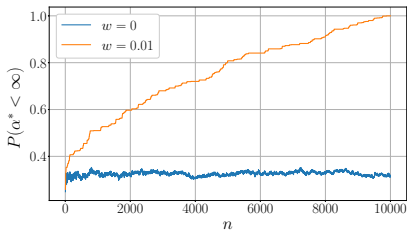
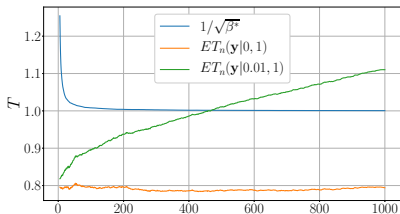
Пример оптимизации evidence

$$y_i = w + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\varepsilon|0, \beta^{-1})$$

$$y_1|w, \dots, y_n|w \sim \mathcal{N}(y_i|w, \beta^{-1}), w \sim \mathcal{N}(w|0, \alpha^{-1}).$$

$$p(\mathbf{y}|\alpha, \beta) = \frac{\beta^{n/2}\alpha^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{n\beta + \alpha}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{\beta^2(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{2(n\beta + \alpha)}\right).$$

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \max_{\alpha, \beta} p(\mathbf{y}|\alpha, \beta).$$



$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{n^2 \beta^*}{\beta^* (\sum_{i=1}^n y_i)^2 - n}, \underbrace{\frac{|\sum_{i=1}^n y_i|}{\sqrt{n}}}_{T_n(\mathbf{y}|w, \beta)} > \frac{1}{\sqrt{\beta^*}}, \\ +\infty, \text{ иначе.} \end{cases} \quad \frac{1}{\beta^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}.$$

Обоснованность для линейной регрессии

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \varepsilon, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}), \varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Совместное правдоподобие: $p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \sigma^2) p(\mathbf{w} | \mathbf{A})$.

Обоснованность:

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) = \int p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) d\mathbf{w} = \int p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \sigma^2) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) d\mathbf{w}.$$

$$\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^\top)$$

Поэтому:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) \propto -\frac{1}{2} \log \det(\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^\top) - \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top (\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^\top)^{-1} \mathbf{y}.$$

Пример

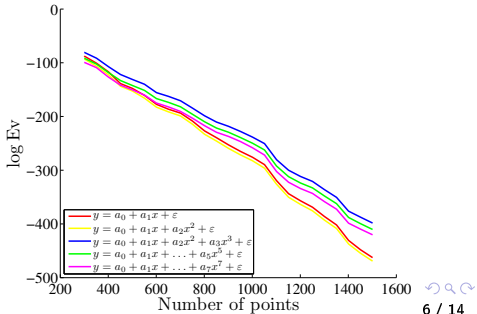
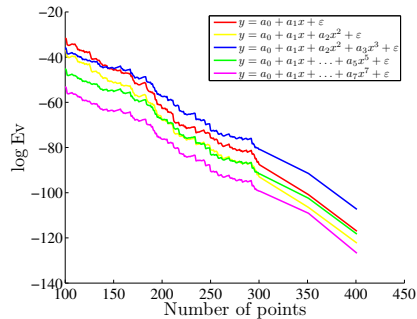
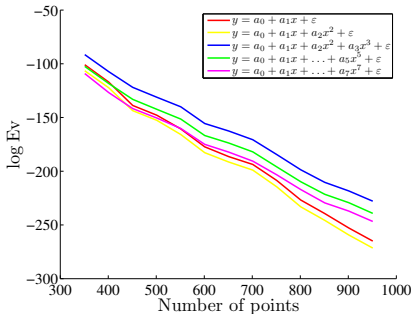
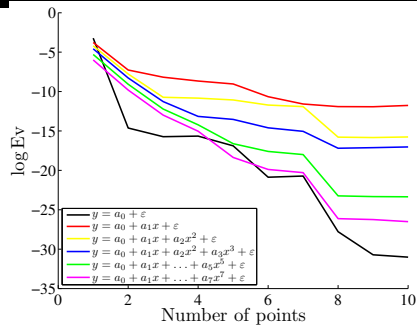
$y_i = \sin x_i + \varepsilon_i$, x_i равномерно выбрано на $[-\pi/2, \pi/2]$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \alpha^{-1} \mathbf{I})$$

Значения параметров: $\alpha = 0.01$, $\sigma^2 = 0.1$.

Признаки: $1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^k, \dots$

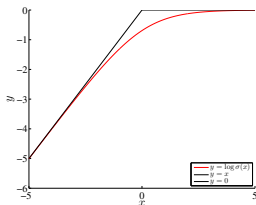
Пример: сравнение моделей



Байесовская логистическая регрессия

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – признаковая матрица, а $\mathbf{y} \in \{\pm 1\}^m$ – метки класса.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j).$$



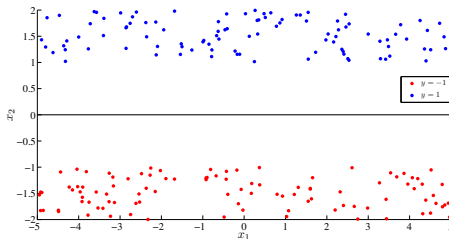
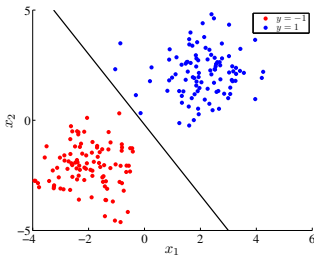
$$p(y_j | \mathbf{w}, \mathbf{x}_j) = \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j) = \frac{1}{1 + \exp(-y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j)}.$$

Вопрос 1: как выбрать $p(\mathbf{w} | \mathbf{A})$?

Вопрос 2: Пусть $p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha)$

Что происходит, когда $\alpha_i \rightarrow \infty$?

Примеры неоднозначности выбора разделительной прямой.



Вопрос 3: чему равна $\mathbf{w}_{\text{ML}}$ для выборок на рис. выше?

Обоснованность для логистической регрессии

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – признаковая матрица, а $\mathbf{y} \in \{\pm 1\}^m$ – метки класса.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j).$$

Идея: выбрать модель с максимальной обоснованностью.

Вопрос 1: чем отличаются разные модели байесовской логистической регрессии, описанные выше?

Вычисление обоснованности.

Пусть далее $p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$.

$$\text{Тогда } \mathbf{A}^* = \arg \max_{\mathbf{A}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = \arg \max_{\mathbf{A}} \underbrace{\int p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) d\mathbf{w}}_{Q(\mathbf{w})}.$$

Проблема: интеграл аналитически не вычисляется.

Аппроксимация Лапласа

$$\log Q(\mathbf{w}) \approx \log Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^\top \overbrace{\nabla \nabla \log Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}})}^{-\mathbf{H}^{-1}} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}).$$
$$\mathbf{A}^* = \arg \max_{\mathbf{A}} \left(Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) \int e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^\top \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})} d\mathbf{w} \right).$$

Вопрос 2: Как определяется $\mathbf{w}_{\text{MAP}}$?

Определение. $g(x, \xi)$ вариационная нижняя оценка для $f(x) \iff$

1 $f(x) \geq g(x, \xi) \forall x, \xi$

2 $f(\xi) = g(\xi, \xi)$.

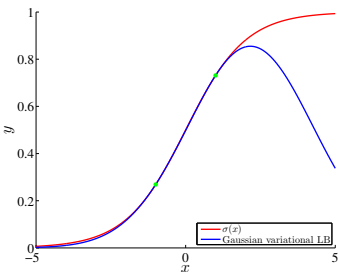
Вместо $f(x) \rightarrow \max_x$ рассмотрим $g(x, \xi) \rightarrow \max_{x, \xi}$

1 $\xi^n = \arg \max_{\xi} g(x^{n-1}, \xi)$

2 $x^n = \arg \max_x g(x, \xi^n)$

VLB для сигмоидной функции

$$\sigma(x) \geq \sigma(\xi) \exp \left(-\frac{1}{4\xi} (2\sigma(\xi) - 1)(x^2 - \xi^2) + \frac{x - \xi}{2} \right).$$



Вопрос: в чем преимущество использования VLB при максимизации обоснованности в логистической регрессии?

LB для обоснованности в логистической регрессии

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j) \frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w}} \geq \text{VLB}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}) =$$

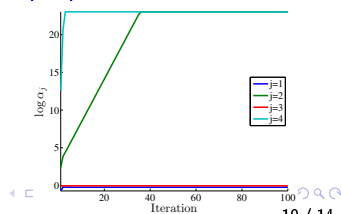
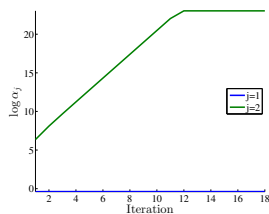
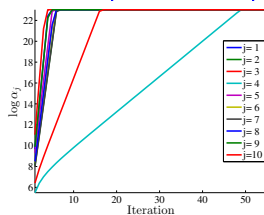
$$\frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w}} \prod_{j=1}^m \sigma(\xi_j) \exp \left(-\frac{2\sigma(\xi_j)-1}{4\xi_j} (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top \mathbf{w} - \xi_j^2) + \frac{y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j - \xi_j}{2} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^m \sigma(\xi_j) e^{\frac{2\sigma(\xi_j)-1}{4\xi_j} \xi_j^2 - \frac{\xi_j}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A}' \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top \mathbf{v}}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \sum_{j=1}^m \frac{2\sigma(\xi_j)-1}{2\xi_j} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{x}_j.$$

Тогда $p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) \geq \text{LB}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) = \int \text{VLB}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}) d\mathbf{w} \rightarrow \max_{\mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}}.$

Иллюстрация отбора признаков в логистической регрессии



Апостериорное распределение в логистической регрессии

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j).$$

$$p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{A}) = \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A})}{p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A})} = \frac{\prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j) \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})}{p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A})}.$$

$$p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) = \int p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{w}, \mathbf{X}_{\text{test}}) p(\mathbf{w} | \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) d\mathbf{w}.$$

Вопрос 1: Как определить $\mathbf{w}_{\text{MAP}}$? Единственное ли решение?

$$q(\mathbf{w}) = -\log p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = -\log p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) - \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \\ q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^\top \mathbf{H}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}) + O(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}\|^3), \text{ где} \\ \mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{X}^\top \mathbf{R} \mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{R} = \text{diag}(\sigma(\mathbf{w}_{\text{MAP}}^\top \mathbf{x}_j) \sigma(-\mathbf{w}_{\text{MAP}}^\top \mathbf{x}_j)).$$

Нормальная аппроксимация: $p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{A}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{w}_{\text{MAP}}, \mathbf{H}^{-1})$.

Пример. Пусть $n = 1$, $\mathbf{w}_{\text{MAP}} = 1$.

Вопрос 2: Что можно сказать про принадлежность объектов с $x = 0; 1; -1; 5; -5$ к классу 1?

Вопрос 3: Как результат зависит от неопределенности h^{-1} ? Что происходит при $h \rightarrow 0$ и при $h \rightarrow \infty$?

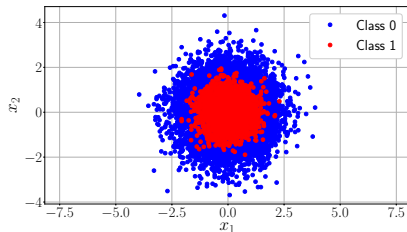
Нелинейная разделяющая поверхность

$$p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) = \int p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{w}, \mathbf{X}_{\text{test}}) p(\mathbf{w} | \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) d\mathbf{w}.$$

Прогноз вероятности класса 1 в зависимости от неопределенности h^{-1}

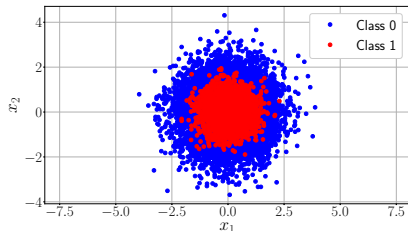
	$x = -5$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 5$
$h = \infty$	0.0067	0.269	0.5	0.731	0.9933
$h = 1$	0.169	0.301	0.5	0.699	0.831
$h = 0$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

Вопрос 1: как учесть в модели, что классы не сбалансированы?



Вопрос 2: что делать, если разделяющая поверхность нелинейна?

Выбросы и пропуски в данных



Вопрос 1: что делать, если разделяющая поверхность нелинейна?

Идея:

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = [K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m].$$

Вопрос 2: Чему соответствует отбор признаков при замене $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = [K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m]$?

Вопрос 3: Что если значения части признаков не заданы или некорректны? Что происходит при замене на среднее / медиану?

Исходная модель: $p(y, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(y | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A})$.

Пусть $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}$, $\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{Z}$ – матрица значений пропусков.

Новая модель: $p(y, \mathbf{w}, \mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) = p(y | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) p(\mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}})$.

$$p(\mathbf{w} | y, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) \propto p(y, \mathbf{w} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) = \int p(y, \mathbf{w}, \mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) d\mathbf{Z} =$$

$$\int p(y | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) \underbrace{p(\mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}})}_{\text{вс}} d\mathbf{Z}.$$

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 113-120, 161-171.
- 2 MacKay, David JC. Bayesian methods for adaptive models. Diss. California Institute of Technology, 1992.
- 3 Gelman, Andrew, et al. Bayesian data analysis, 3rd edition. Chapman and Hall/CRC, 2013.
- 4 Chen, Ming-Hui, and Joseph G. Ibrahim. "Conjugate priors for generalized linear models." *Statistica Sinica* (2003): 461-476.
- 5 Fahrmeir, Ludwig, and Heinz Kaufmann. "Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models." *The Annals of Statistics* (1985): 342-368.
- 6 Baghishani, Hossein, and Mohsen Mohammadzadeh. "Asymptotic normality of posterior distributions for generalized linear mixed models." *Journal of Multivariate Analysis* 111 (2012): 66-77.
- 7 Jaakkola, Tommi, and Michael Jordan. "A variational approach to Bayesian logistic regression models and their extensions." *Sixth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*. Vol. 82. No. 4. 1997