

Машинное обучение. Домашнее задание №8

Задача 1. Прочитайте конспект семинара. Убедитесь, что можете ответить на следующие вопросы:

1. Как преобразовать задачу гребневой регрессии (ridge regression), чтобы функционал зависел только от скалярных произведений объектов?
2. Что такое матрица Грама?
3. Что такое ядро и спрямляющее пространство?
4. Как ядра можно встроить в SVM?
5. Как с помощью ядра можно вычислить норму вектора в спрямляющем пространстве? Расстояние между векторами?
6. Почему $\langle x, z \rangle$ — ядро?
7. Какому спрямляющему пространству соответствует ядро $\langle x, z \rangle^m$?
8. Как проверить, что функция $K(x, z)$ является ядром?
9. Почему произведение ядер $K_1(x, z)K_2(x, z)$ является ядром? Какому спрямляющему пространству оно соответствует?
10. Какова роль параметра R в полиномиальном ядре $(\langle x, z \rangle + R)^m$?
11. Как доказать, что гауссовское ядро соответствует бесконечномерному спрямляющему пространству?
12. Какова роль параметра σ^2 в гауссовском ядре?

Задача 2. Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2} \|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T Ka \rightarrow \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y.$$

Задача 3. Центром масс выборки $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$ называется точка

$$\varphi_S = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \varphi(x_i).$$

Выразите норму центра масс $\|\varphi_S\|$ через ядро $K(x, z) = \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle$.

Задача 4. Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

является ядром.

Задача 5. Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Задача 6. Рассмотрим ядро

$$K(x, z) = \prod_{i=1}^d (1 + x_i z_i).$$

Какому спрямляющему пространству оно соответствует?

Задача 7. Рассмотрим ядро на пространстве всех подмножеств конечного множества D :

$$K(A_1, A_2) = 2^{|A_1 \cap A_2|}.$$

Покажите, что оно соответствует отображению в $2^{|D|}$ -мерное пространство

$$(\varphi(A))_U = \begin{cases} 1, & U \subseteq A, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где U пробегает по всем подмножествам множества D .

Задача 8 (*). Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Задача 9 (*). Пусть x_1, \dots, x_ℓ — произвольная выборка с метками y_1, \dots, y_ℓ , а $\varphi(x)$ — отображение в спрямляющее пространство, соответствующее гауссову ядру. Покажите, что в данном спрямляющем пространстве существует линейный классификатор, безошибочно разделяющий выборку $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_\ell)$.