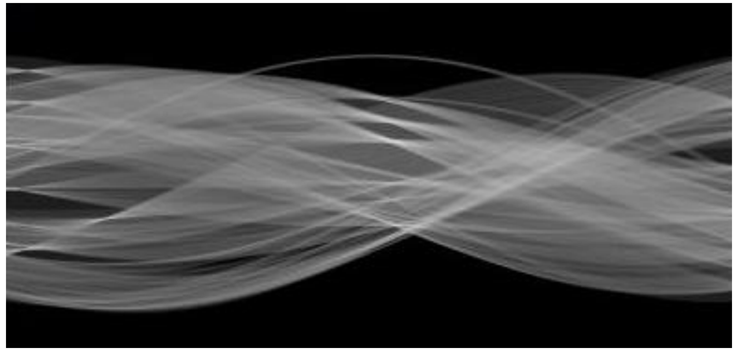
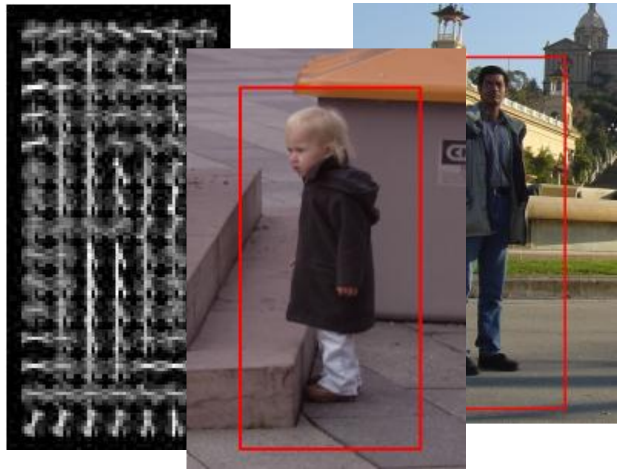
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

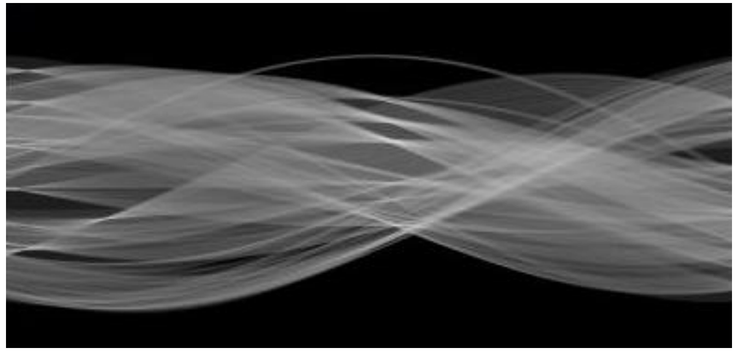


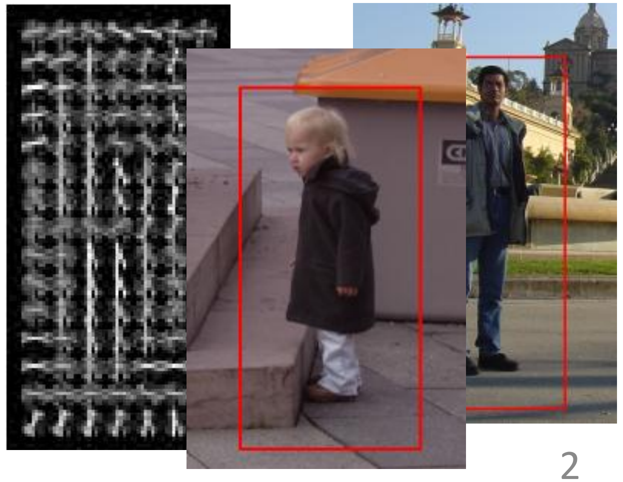


Дискретная фильтрация изображений

Тема 6

20.03.2026





Модель системы обработки изображения. Дискретный случай.
Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)

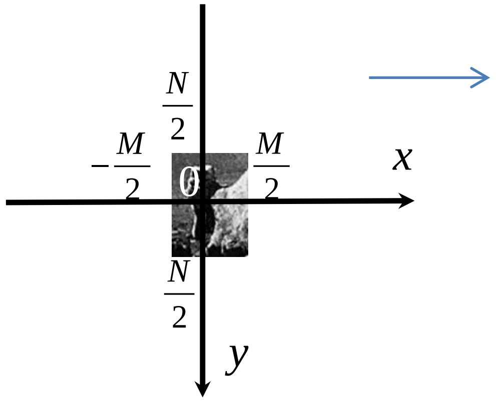
Для $\forall f(x,y) \in L^2\left([-M/2, M/2]\times[-N/2, N/2]\right)$

$$e^{i2\pi\frac{\omega_x x}{M}} = \cos\left(2\pi\frac{\omega_x x}{M}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{\omega_x x}{M}\right),\ \omega_x \in \mathbb{Z}$$

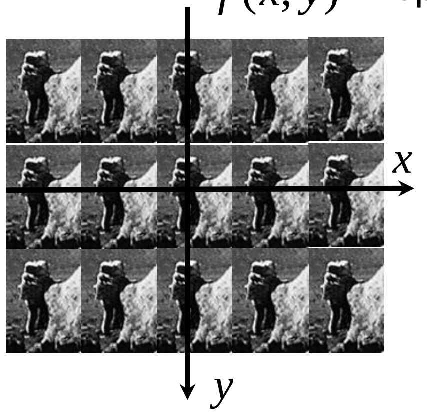
Ряд Фурье:

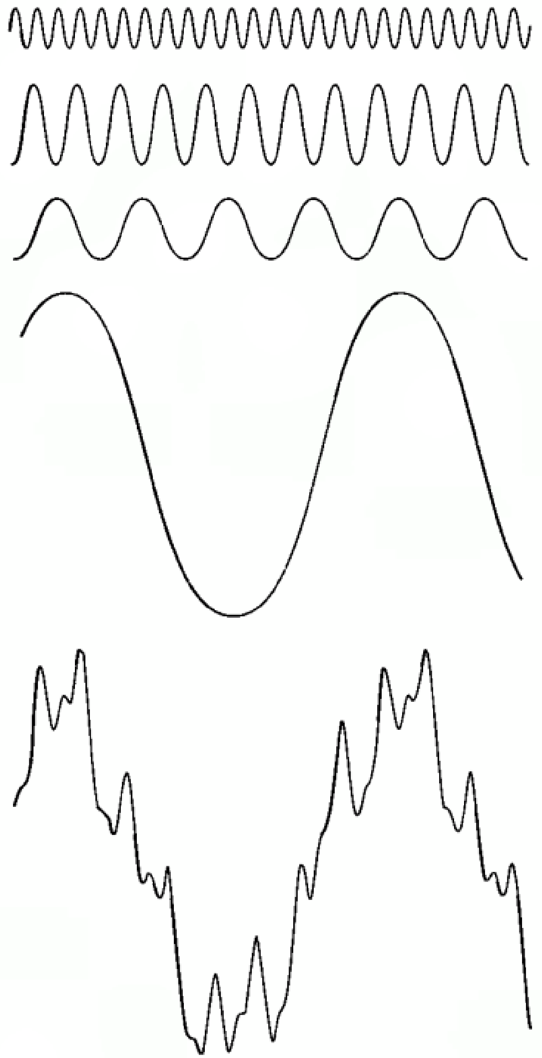
$$f(x,y) = \sum_{\omega_x=-\infty}^{+\infty}\sum_{\omega_y=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},$$

$f(x+M, y+N) = f(x, y+N) = f(x+M, y) = f(x,y)$ - периодическая функция



$f(x,y)$ - периодическая функция





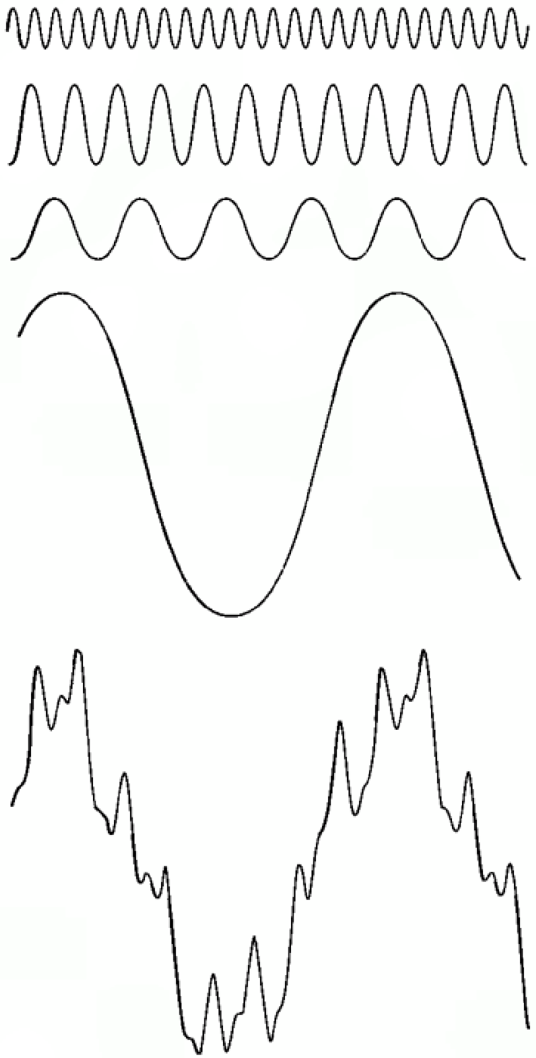
Модель системы обработки изображения. Дискретный случай.
Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)

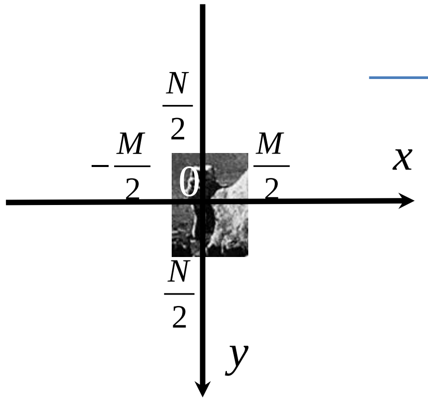
Для $\forall f(x,y) \in L^2\left([-M/2, M/2]\times[-N/2, N/2]\right)$

$$e^{i2\pi\frac{\omega_x x}{M}} = \cos\left(2\pi\frac{\omega_x x}{M}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{\omega_x x}{M}\right),\ \omega_x \in \mathbb{Z}$$

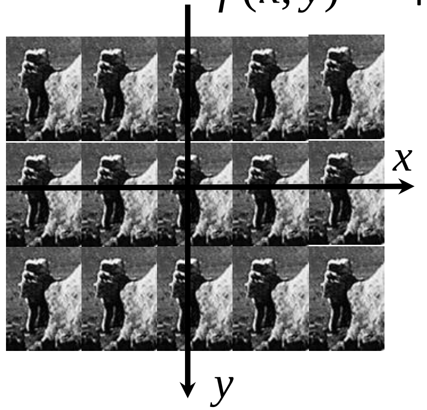
Ряд Фурье:
$$f(x,y) = \sum_{\omega_x=-\infty}^{+\infty}\sum_{\omega_y=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_x,\omega_y) e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},$$

$$f(x+M, y+N) = f(x, y+N) = f(x+M, y) = f(x,y)$$ - периодическая функция



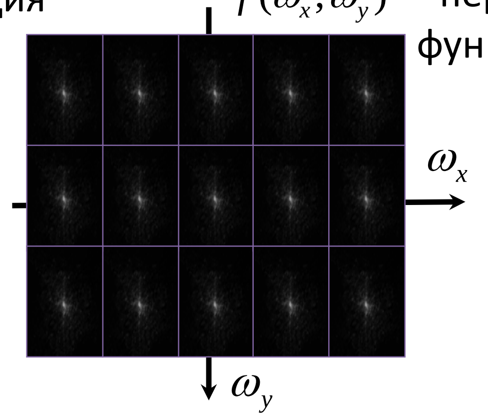


$f(x,y)$ - периодическая функция



$\xrightarrow{\mathcal{F}\{f(x,y)\}}$

$\hat{f}(\omega_x,\omega_y)$ - периодическая функция



Коэффициенты Фурье, дискретный спектр :

$$\hat{f}(\omega_x,\omega_y) = \mathcal{F}\{f(x,y)\} = \frac{1}{MN}\sum_{x=-M/2}^{M/2-1}\sum_{y=-N/2}^{N/2-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},$$
$$\omega_x \in \mathbb{Z},\ \omega_y \in \mathbb{Z}$$

Вся информация о спектре содержится в любом (MxN) прямоугольнике.

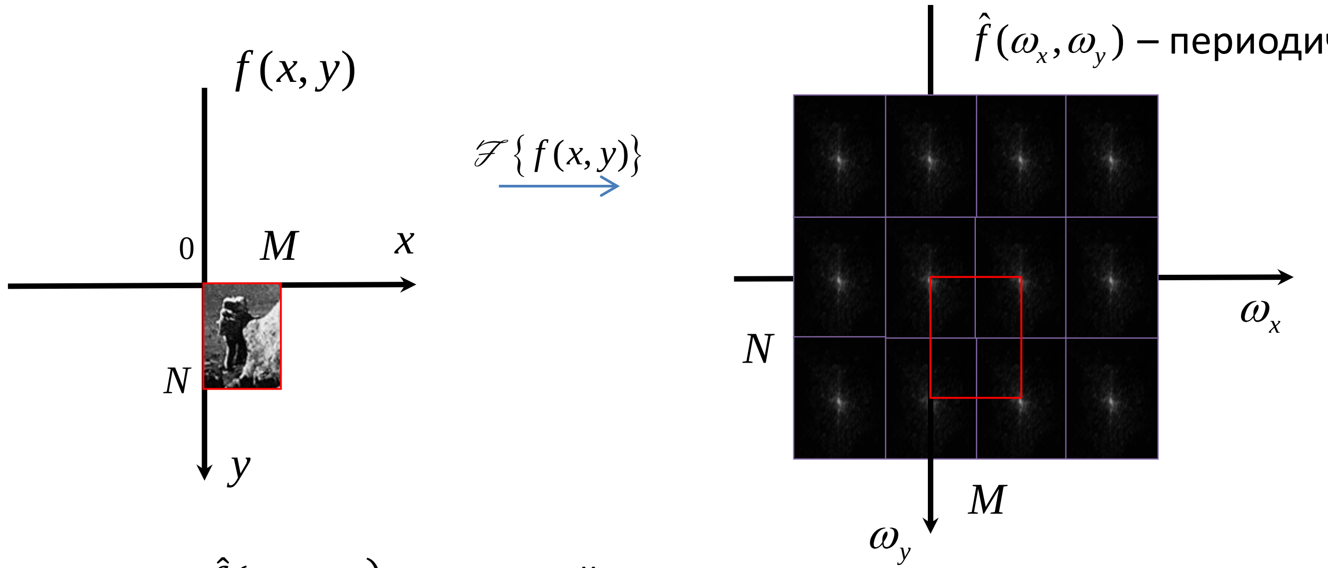
Дискретный спектр – периодическая функция:
$$\hat{f}(\omega_x+M, \omega_y+N) = \hat{f}(\omega_x, \omega_y+N) = \hat{f}(\omega_x+M, \omega_y) = \hat{f}(\omega_x,\omega_y)$$

Модель системы обработки изображения. Дискретный случай.
Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)

Для функции с компактным носителем: $\forall f(x,y) \in L^2:\ f(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in \Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le M, 0 \le y \le N\}$

Проекция $f(x,y)$ на базисные функции:

$$\hat{f}(\omega_x,\omega_y) = \mathscr{F}\{f(x,y)\} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},$$



Сдвинем проекцию $\hat{f}(\omega_x,\omega_y)$ на кратный размер носителя:

$$\hat{f}(\omega_x+Mn,\omega_y+Nm) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)} e^{-i2\pi\left(\frac{Mn}{M}+\frac{Nm}{N}\right)} = \hat{f}(\omega_x,\omega_y) \longrightarrow \omega_x = \overline{0, M-1},\ \omega_y = \overline{0, N-1}$$

– периодическая функция

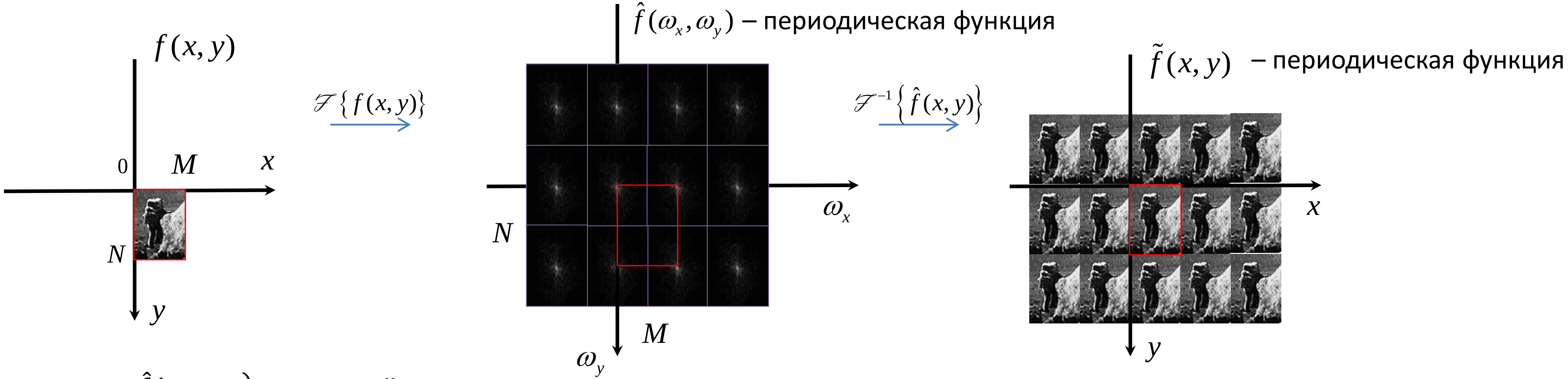
- основной прямоугольник.

Модель системы обработки изображения. Дискретный случай.
Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)

Для функции с компактным носителем: $\forall f(x,y)\in L^2:\ f(x,y)\neq 0 \text{ при } (x,y)\in\Omega=\{(x,y):0\le x\le M, 0\le y\le N\}$

Проекция $f(x,y)$ на базисные функции:

$$\hat f(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \tilde f(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},$$



Сдвинем проекцию $\hat f(\omega_x,\omega_y)$ на кратный размер носителя:

$$\hat f(\omega_x+Mn,\omega_y+Nm)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}e^{-i2\pi\left(\frac{Mn}{M}+\frac{Nm}{N}\right)}=\hat f(\omega_x,\omega_y)\longrightarrow\ \omega_x=\overline{0,M-1},\ \omega_y=\overline{0,N-1}$$

– периодическая функция

- основной прямоугольник.

$$\tilde f(x+Mn,y+Nm)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}e^{i2\pi\left(\frac{Mn}{M}+\frac{Nm}{N}\right)}=\tilde f(x,y),\longrightarrow\ f(x,y)\equiv\tilde f(x,y),\ x=\overline{0,M-1},\ y=\overline{0,N-1}$$

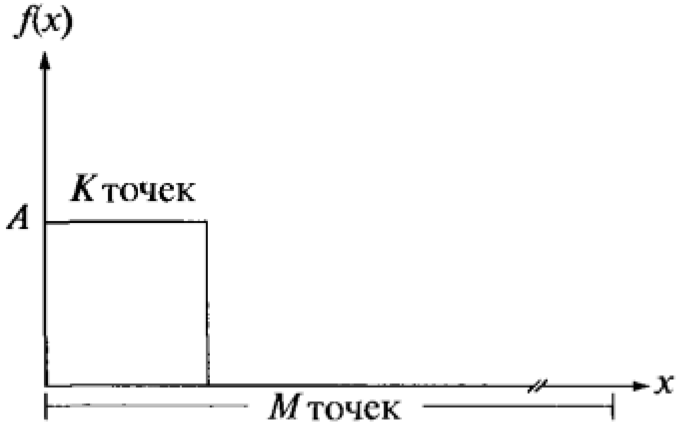
– периодическая функция

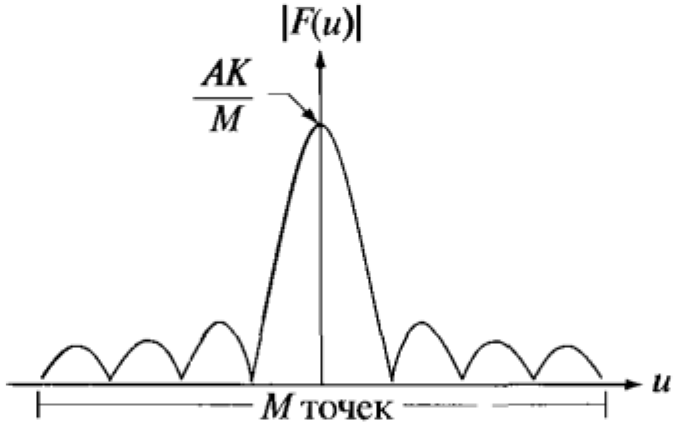
Дискретное Фурье-преобразование

$$\hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\left\{f(x,y)\right\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

при $\omega_x=0,\ \omega_y=0:$

$$\hat{f}(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$



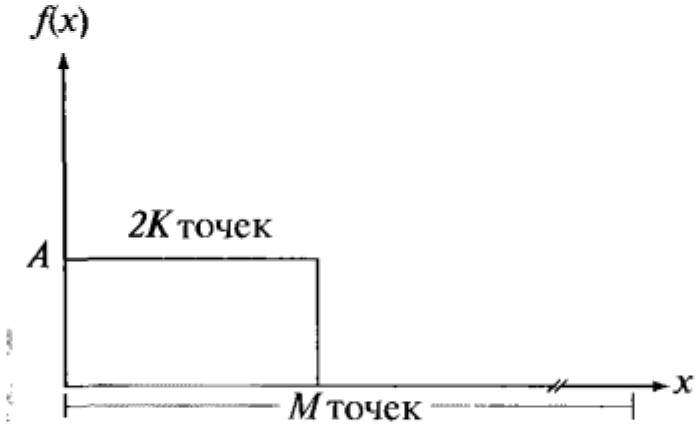


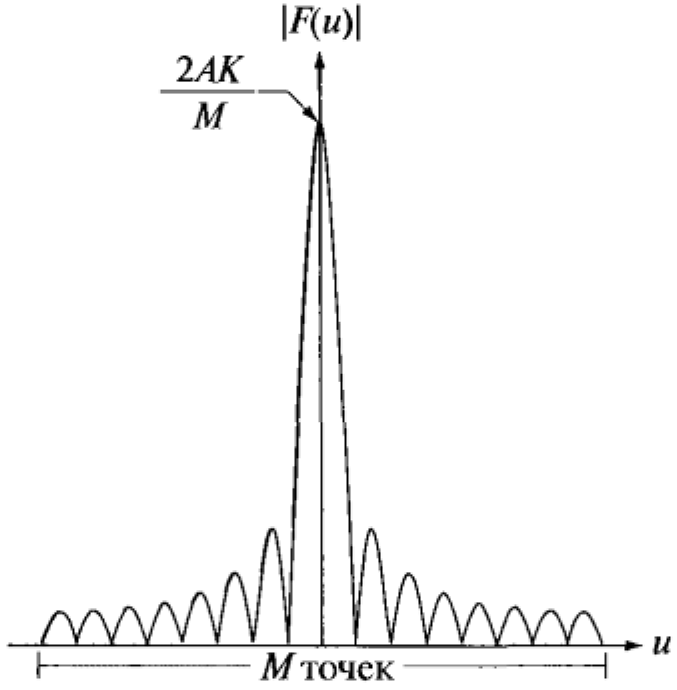
$M=1024, K=8, A=1$

Значения в дискретных отсчетах:

$$f(x_0+x\Delta x, y_0+y\Delta y)\Leftrightarrow \hat{f}\left(\frac{\omega_x}{M\Delta x},\frac{\omega_y}{N\Delta y}\right)=\hat{f}\left(\omega_x\Delta\omega_x,\omega_y\Delta\omega_y\right)$$

$$\Delta\omega_x=\frac{1}{M\Delta x},\ \Delta\omega_y=\frac{1}{N\Delta y}$$





Теорема о свертке. Дискретный случай.

$$\tilde{f}(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\left\{f(x,y)\right\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Теорема о свертке. Дискретный случай.

$$\tilde{f}(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\left\{f(x,y)\right\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=\left[\hat{h}(\omega_x,\omega_y)=\left[\tilde{x}=x-m,\tilde{y}=y-n\right]=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}\right]=$$

$$=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Теорема о свертке. Дискретный случай.

$$\tilde{f}(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=\left[\hat{h}(\omega_x,\omega_y)=[\tilde{x}=x-m,\tilde{y}=y-n]=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}\right]=$$

$$=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x m}{M}+\frac{\omega_y n}{N}\right)}$$

Теорема о свертке. Дискретный случай.

$$\tilde f(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \hat f(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\hat f(\omega_x,\omega_y)\hat h(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)\hat h(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=$$

$$=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde h(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde h(x-m,y-n)\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat f(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x m}{M}+\frac{\omega_y n}{N}\right)}=$$

Периодические:

$$\tilde f(x+M,y+N)=\tilde f(x,y+N)=\tilde f(x+M,y)=\tilde f(x,y)$$
$$\tilde h(x+M,y+N)=\tilde h(x,y+N)=\tilde h(x+M,y)=\tilde h(x,y)$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde f(m,n)\tilde h(x-m,y-n)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde f(m,n)\tilde h(x-m,y-n)=\tilde f(x,y)*\tilde h(x,y)$$

Периодические

Периодические !!!

Теорема о свертке. Дискретный случай.

$$\tilde{f}(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)},\qquad \hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathcal{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=$$

$$=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x(x-m)}{M}+\frac{\omega_y(y-n)}{N}\right)}e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{h}(x-m,y-n)\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x m}{M}+\frac{\omega_y n}{N}\right)}=$$

Периодические:

$$\tilde{f}(x+M,y+N)=\tilde{f}(x,y+N)=\tilde{f}(x+M,y)=\tilde{f}(x,y)$$

$$\tilde{h}(x+M,y+N)=\tilde{h}(x,y+N)=\tilde{h}(x+M,y)=\tilde{h}(x,y)$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=x}^{x-M+1}\sum_{n=y}^{y-N+1}\tilde{f}(m,n)\tilde{h}(x-m,y-n)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}(m,n)\tilde{h}(x-m,y-n)=\tilde{f}(x,y)*\tilde{h}(x,y)$$

Периодические

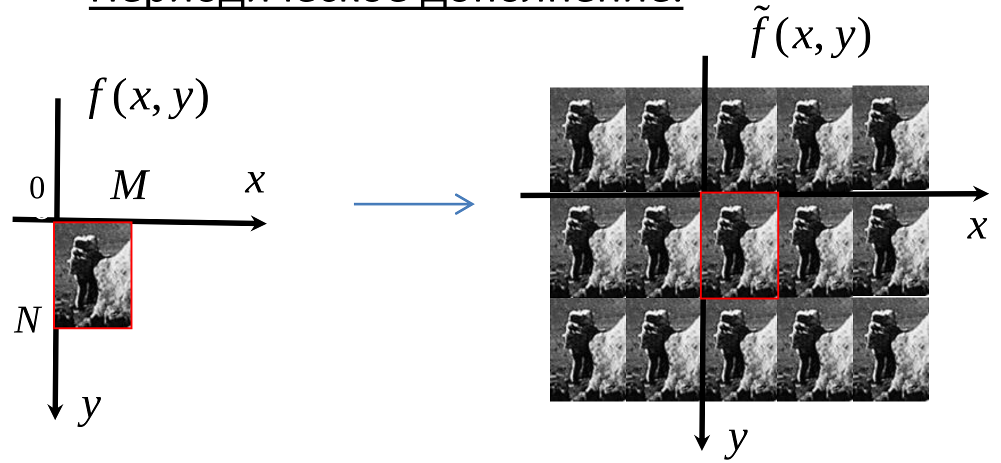
Циклическая свертка

Для непериодических: Для периодических:

$$f(x,y)\odot h(x,y)=\tilde{f}(x,y)*\tilde{h}(x,y)$$

$$f(x,y)\odot h(x,y)\Leftrightarrow\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\hat{h}(\omega_x,\omega_y)$$

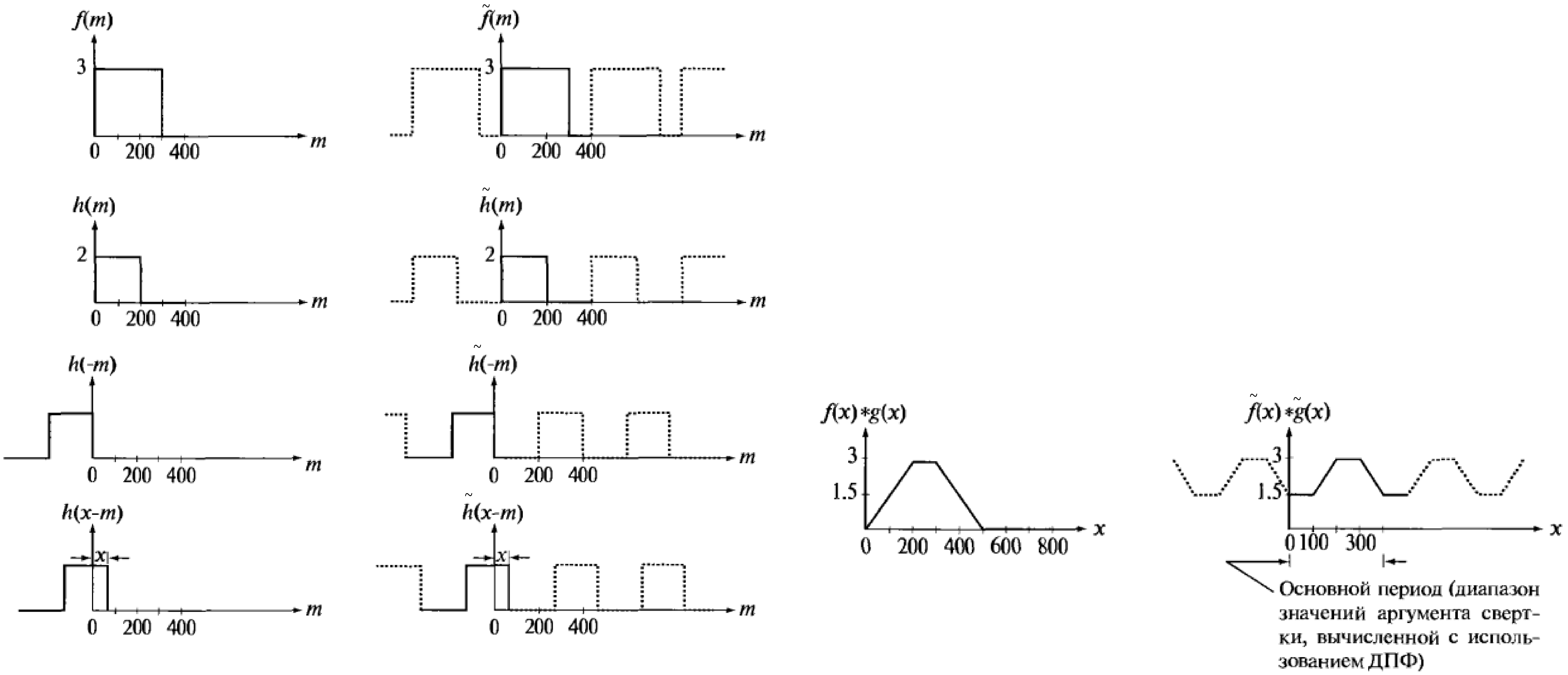
Периодическое дополнение:



Линейная и циклическая свертка. Фактор периодичности.

Одномерный случай.

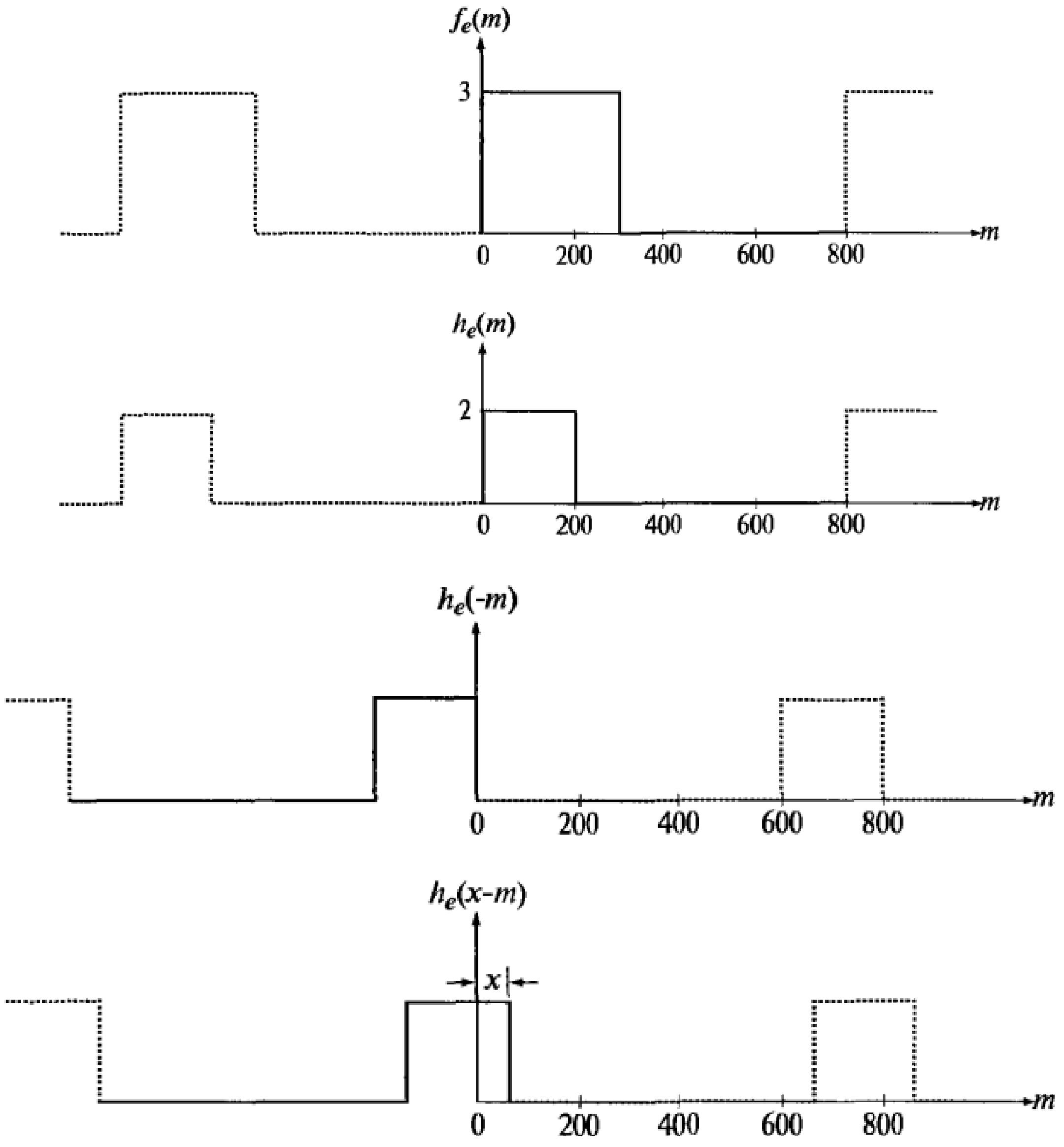
$$f(x) * h(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(x) h(x-m) \qquad \tilde{f}(x) * \tilde{h}(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{f}(x) \tilde{h}(x-m)$$



Фактор периодичности. Решение – расширение периода для циклической свертки.

Одномерный случай.

$$f(x) * h(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_e(x)h_e(x-m) = f(x) \odot h(x) \Leftrightarrow \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)$$

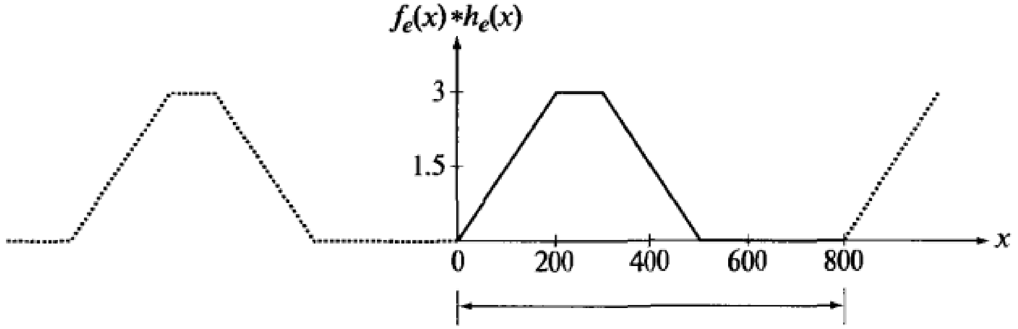


$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le A-1; \\ 0, & A \le x \le P; \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x), & 0 \le x \le B-1; \\ 0, & B \le x \le P. \end{cases}$$

Условие равенства линейной и циклической свертки:

$$P > A + B - 1$$



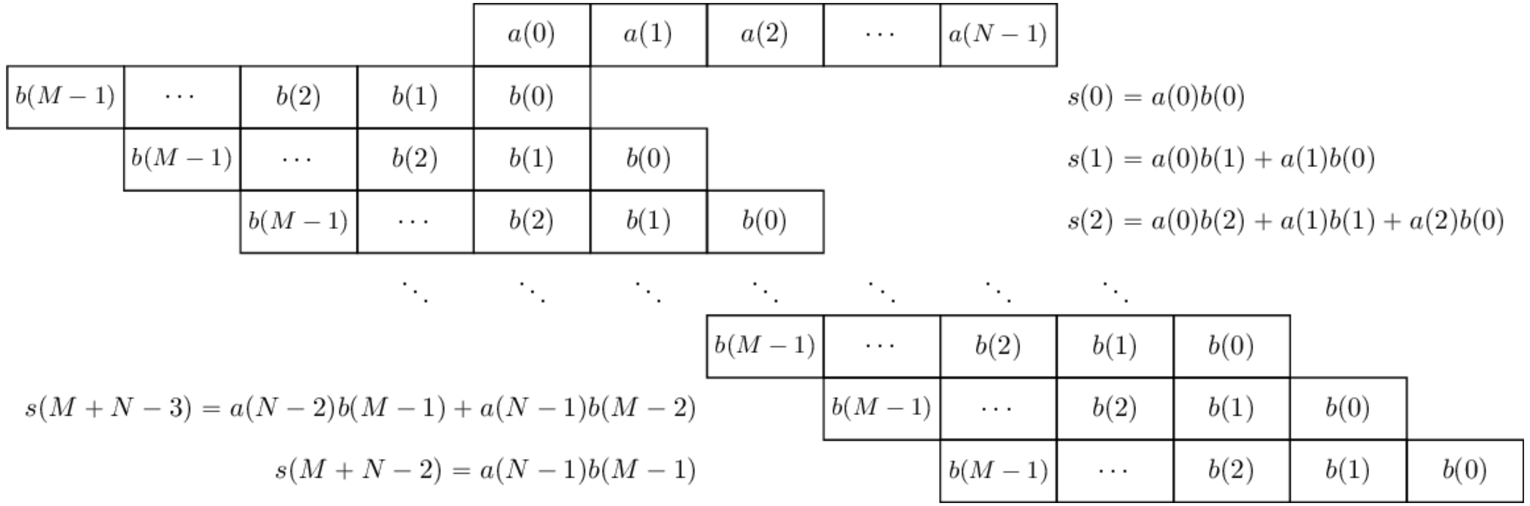
Основной период (диапазон значений аргумента свертки, вычисленной с использованием ДПФ)

Линейная и циклическая свертки. Реализация.

Одномерный случай.

Линейная свертка двух последовательностей

$$s(n) = a(n) * b(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)b(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)a(n-m).$$



Линейная и циклическая свертки. Реализация.

Одномерный случай.

Линейная свертка двух последовательностей

$$s(n) = a(n) * b(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)b(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)a(n-m).$$

				$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	$\cdots$	$a(N-1)$					
$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$									$s(0) = a(0)b(0)$
	$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$								$s(1) = a(0)b(1) + a(1)b(0)$
		$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$							$s(2) = a(0)b(2) + a(1)b(1) + a(2)b(0)$
			$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$				
						$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$			
							$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$		$s(M+N-3) = a(N-2)b(M-1) + a(N-1)b(M-2)$
								$b(M-1)$	$\cdots$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$	$s(M+N-2) = a(N-1)b(M-1)$

Циклическая свертка двух последовательностей

$$c(n) = a(n) \circledast b(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m)b(n-m)_{\bmod N}, \quad n = 0 \ldots N.$$

$$x_{\bmod N} = \begin{cases} x \bmod N, & x \geqslant 0, \\ N - ((-x) \bmod N), & x < 0. \end{cases}$$

$a(n),\ n = 0 \ldots 7$	$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$	$a(5)$	$a(6)$	$a(7)$
$a(n-3)_{\bmod 8},\ n = 0 \ldots 7$	$a(5)$	$a(6)$	$a(7)$	$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$

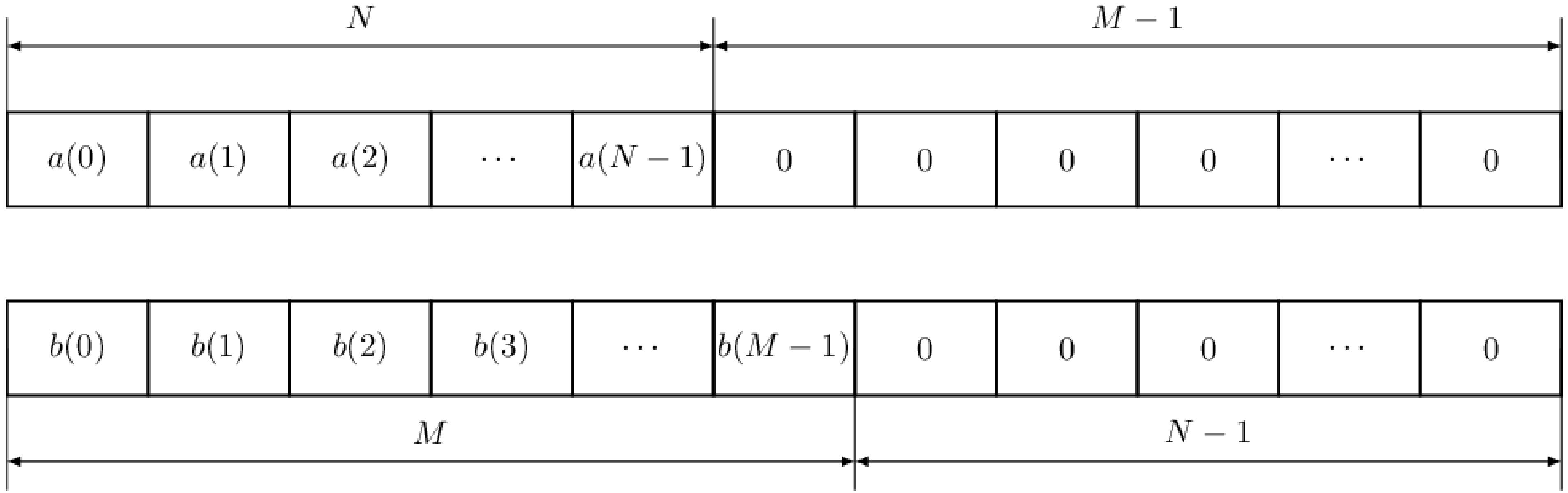
$\longleftarrow m = 3 \longrightarrow$

m	0	1	2	3	
$a(m)$	$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	
$b(0-m)_{\bmod 4}$	$b(0)$	$b(3)$	$b(2)$	$b(1)$	$c(0) = \sum_{m=0}^{3} a(m)b(0-m)_{\bmod 4}$
$b(1-m)_{\bmod 4}$	$b(1)$	$b(0)$	$b(3)$	$b(2)$	$c(1) = \sum_{m=0}^{3} a(m)b(1-m)_{\bmod 4}$
$b(2-m)_{\bmod 4}$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$	$b(3)$	$c(2) = \sum_{m=0}^{3} a(m)b(2-m)_{\bmod 4}$
$b(3-m)_{\bmod 4}$	$b(3)$	$b(2)$	$b(1)$	$b(0)$	$c(3) = \sum_{m=0}^{3} a(m)b(3-m)_{\bmod 4}$

Линейная и циклическая свертки. Периодическое дополнение.

Одномерный случай.

Добавление нулей для приведения линейной свертки к циклической



$$c(n) = \sum_{m=0}^{N+M-1} a(m)b(n-m)_{\bmod (N+M-1)},$$

$$a(n) = 0, \text{ при } (n \bmod (N+M-1)) \geqslant N,$$

$$b(n) = 0, \text{ при } (n \bmod (N+M-1)) \geqslant M,$$

$$n = 0 \ldots N+M-2.$$

Дискретная свертка. Периодическое дополнение. Двумерный случай.

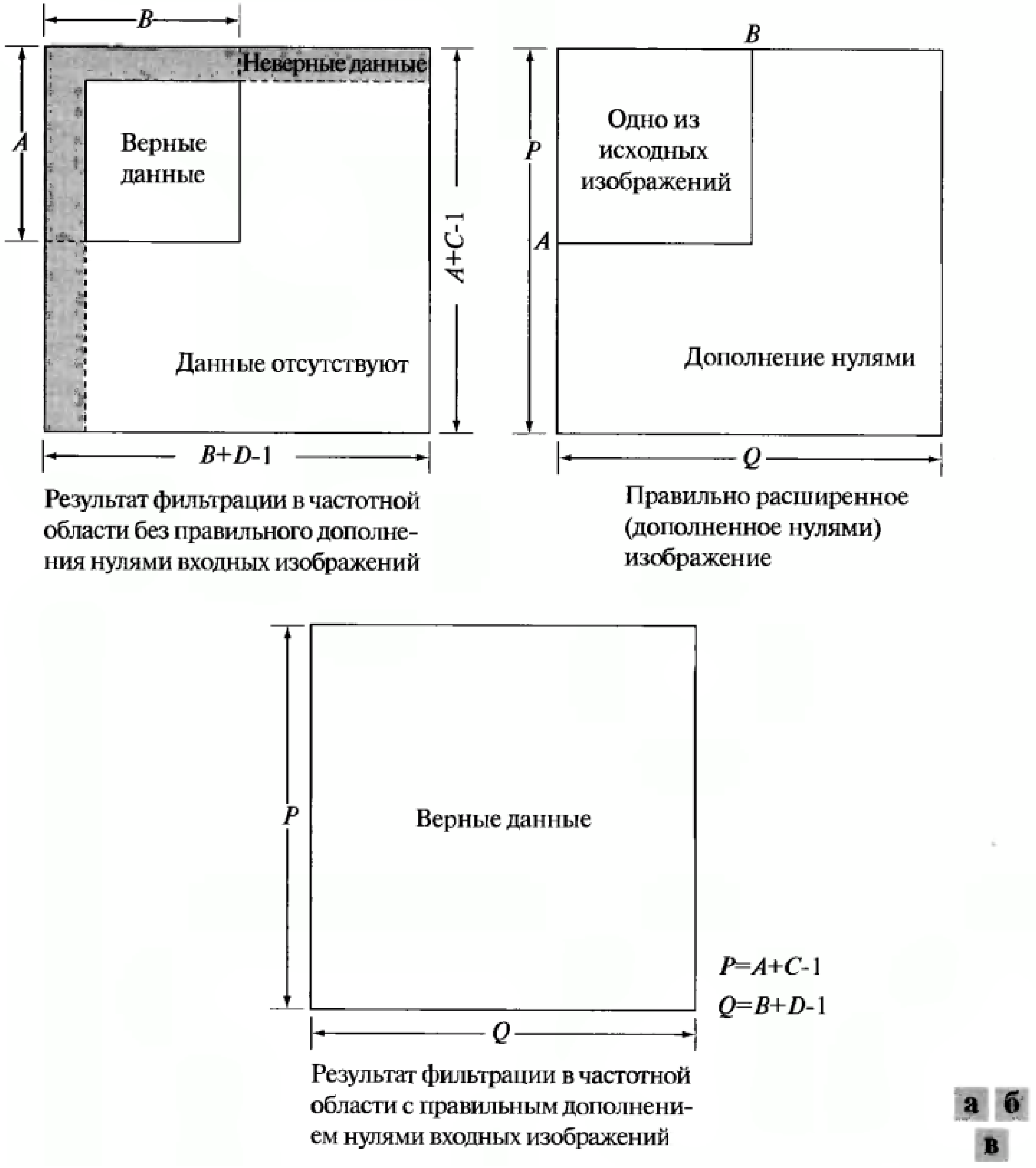


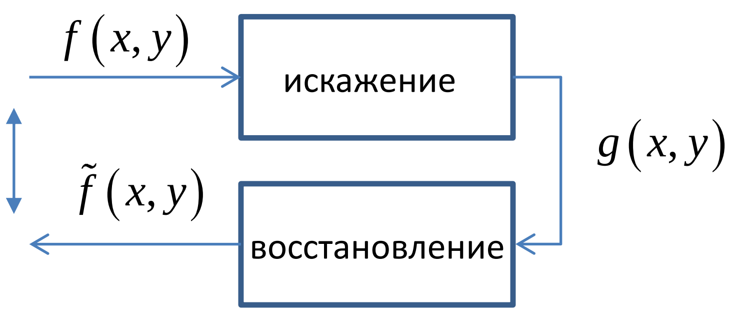
Рис. К вопросу о необходимости дополнения изображений нулями. (а) Результат применения двумерной свертки без дополнения нулями. (б) Правильное дополнение нулями. (в) Правильный результат свертки.

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)\, g(x-m, y-n)$$

Ошибка восстановления: ε^2



$h(x,y), H(\omega_x, \omega_y) - ?$

Средняя яркость

при $M[g(x,y)](x,y) = M[g(x,y)] = const$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M[g(x,y)] \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)$$

ограничение

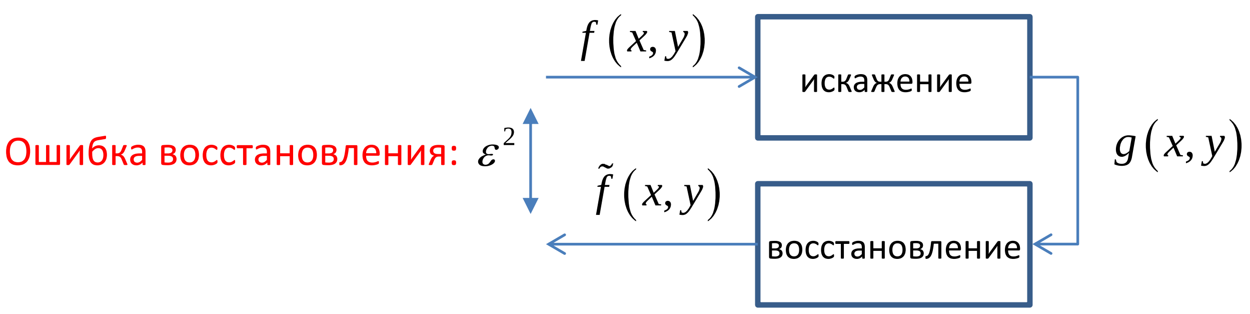
1. при $M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M[g(x,y)] \Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) = 1}$

2. при $\tilde{g}(x,y) = g(x,y) - M[g(x,y)]$

$$\Rightarrow M[\tilde{g}(x,y)] = 0 \Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = 0$$ при $\forall h(x,y)$

$$\tilde{\tilde{f}}(x,y) = \tilde{f}(x,y) + M[g(x,y)]$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$

Постановка задачи:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(x-m,y-n)h(m,n)\right)^2\right] \to \min_{h(m,n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial h(k,l)} = M\left[2g(x-k,y-l)\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)\right)\right] = 0,$$

$$k = \overline{0, M-1},\ l = \overline{0, N-1}$$

Средняя яркость

при $M\left[g(x,y)\right](x,y) = M\left[g(x,y)\right] = const$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right]\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)$$

ограничение

1. при $M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right] \Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) = 1}$

2. при $\tilde{g}(x,y) = g(x,y) - M\left[g(x,y)\right]$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{g}(x,y)\right] = 0 \Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = 0 \text{ при } \forall h(x,y)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x,y) = \tilde{f}(x,y) + M\left[g(x,y)\right]$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$

Постановка задачи:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(x-m,y-n)h(m,n)\right)^2\right] \to \min_{h(m,n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial h(k,l)} = M\left[2g(x-k,y-l)\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)\right)\right] = 0,$$

$$k = \overline{0, M-1},\; l = \overline{0, N-1}$$

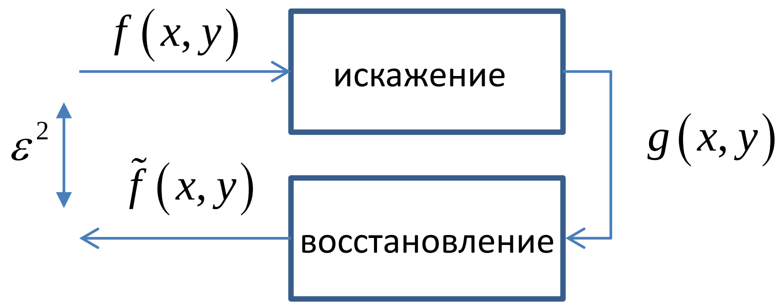
$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} {\color{blue}h(m,n)} M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right]$$



$$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$$

Средняя яркость

при $M\left[g(x,y)\right](x,y) = M\left[g(x,y)\right] = const$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right]\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)$$

ограничение

1. при $M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right] \Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) = 1}$

2. при $\tilde{g}(x,y) = g(x,y) - M\left[g(x,y)\right]$

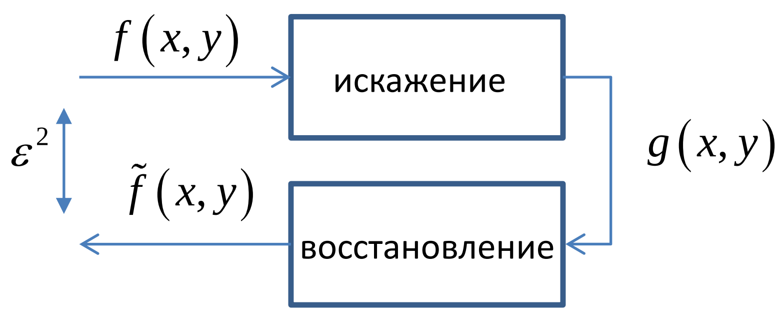
$$\Rightarrow M\left[\tilde{g}(x,y)\right] = 0 \Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = 0 \text{ при } \forall h(x,y)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x,y) = \tilde{f}(x,y) + M\left[g(x,y)\right]$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$



$$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$$

Постановка задачи:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(x-m,y-n)h(m,n)\right)^2\right] \to \min_{h(m,n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial h(k,l)} = M\left[2g(x-k,y-l)\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)\right)\right] = 0,$$

$$k = \overline{0, M-1},\ l = \overline{0, N-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right]$$

Уравнение Винера-Хопфа:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) K_{gg}(k-m,l-n) = K_{fg}(k,l), \\ k = \overline{0, M-1},\ l = \overline{0, N-1}\end{gathered}}$$

Средняя яркость

при $M\left[g(x,y)\right](x,y) = M\left[g(x,y)\right] = const$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right]\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)$$

ограничение

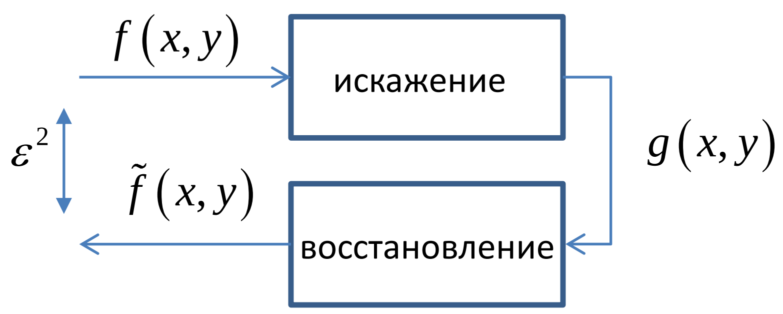
1. при $M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right] \Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) = 1}$

2. при $\tilde{g}(x,y) = g(x,y) - M\left[g(x,y)\right]$

$$\Rightarrow M\left[\tilde{g}(x,y)\right] = 0 \Rightarrow M\left[\tilde{f}(x,y)\right] = 0 \text{ при } \forall h(x,y)$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x,y) = \tilde{f}(x,y) + M\left[g(x,y)\right]$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.



$$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

Постановка задачи:

$$M\left[\varepsilon^2\right] = M\left[\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(x-m,y-n)h(m,n)\right)^2\right] \to \min_{h(m,n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial h(k,l)} = M\left[2g(x-k,y-l)\left(f(x,y) - \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m,y-n)\right)\right] = 0,$$

$$k = \overline{0, M-1},\; l = \overline{0, N-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right]$$

Уравнение Винера-Хопфа:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) K_{gg}(k-m,l-n) = K_{fg}(k,l),\\ k = \overline{0, M-1},\; l = \overline{0, N-1}\end{gathered}}$$

Циклическое приближение

$$\boxed{\begin{gathered}h(k,l) \odot K_{gg}(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde h(m,n) \tilde K_{gg}(k-m,l-n) = \tilde K_{fg}(k,l),\\ k = \overline{0, M-1},\; l = \overline{0, N-1}\end{gathered}}$$

Средняя яркость

при $M\left[g(x,y)\right](x,y) = M\left[g(x,y)\right] = const$

$$\Rightarrow M\left[\tilde f(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right]\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)$$

ограничение

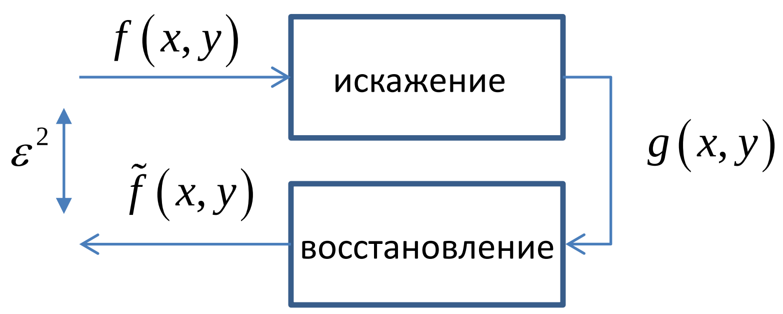
1. при $M\left[\tilde f(x,y)\right] = M\left[g(x,y)\right] \Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) = 1}$

2. при $\tilde g(x,y) = g(x,y) - M\left[g(x,y)\right]$

$\Rightarrow M\left[\tilde g(x,y)\right] = 0 \Rightarrow M\left[\tilde f(x,y)\right] = 0$ при $\forall h(x,y)$

$$\tilde{\tilde f}(x,y) = \tilde f(x,y) + M\left[g(x,y)\right]$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

$$\boxed{h(k,l) \odot K_{gg}(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(m,n)\tilde{K}_{gg}(k-m, l-n) = \tilde{K}_{fg}(k,l), \quad k = \overline{0, M-1},\ l = \overline{0, N-1}}$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y) g(x-k, y-l)\right]$$

Спектральная плотность мощности:

$$\Leftrightarrow \tilde{W}_{fg}(\omega_k, \omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde{K}_{fg}(k,l)\right\}$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m, l-n) = M\left[g(x-m, y-n) g(x-k, y-l)\right]$$

$$\Leftrightarrow \tilde{W}_{gg}(\omega_k, \omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde{K}_{gg}(k,l)\right\}$$

Теорема о свертке:

$$\tilde{H}(\omega_k, \omega_l)\tilde{W}_{gg}(\omega_k, \omega_l) = \tilde{W}_{fg}(\omega_k, \omega_l)$$

$$\omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}$$

Оптимальный Винеровский фильтр.

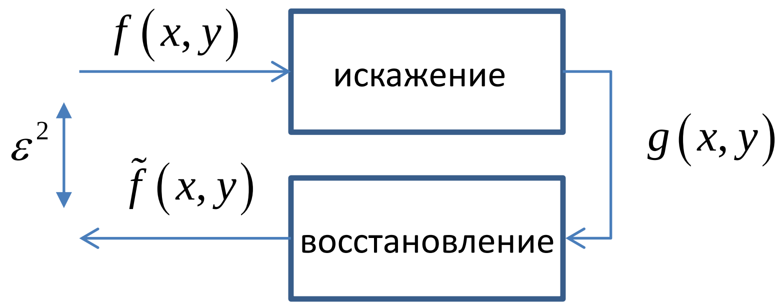
$$\Rightarrow \boxed{\tilde{H}(\omega_k, \omega_l) = \frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k, \omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k, \omega_l)}}, \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}$$

Условие применимости фильтра Винера: ширина корреляционной K_{gg} функции << M,N (размеры изображения).
На границе изображения фильтрация – не оптимальна.

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения известна

Известно: $h_D(x,y), H_D(\omega_x,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

<u>Модель реконструкции в пространственной области:</u>

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

Модель наблюдения:

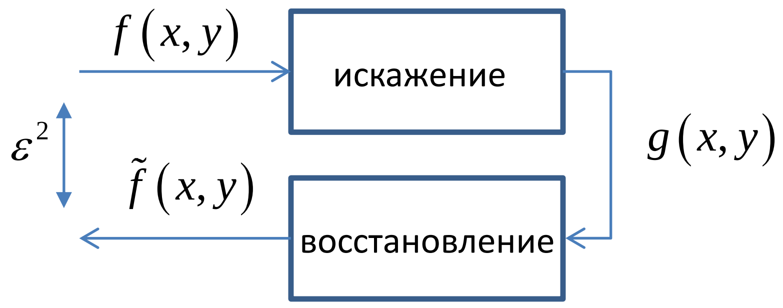
$$g(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y)$$

$$\boxed{\tilde{H}(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)}, \quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения известна

Известно: $h_D\left(x,y\right), H_D\left(\omega_x,\omega_y\right)$



$h\left(x,y\right), H\left(\omega_x,\omega_y\right) - ?$

<u>Модель реконструкции в пространственной области:</u>

$$\tilde f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$

$$\boxed{\tilde H(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde W_{fg}\left(\omega_k,\omega_l\right)}{\tilde W_{gg}\left(\omega_k,\omega_l\right)}, \quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g\left(x,y\right) = f\left(x,y\right) * h_D\left(x,y\right)$$

Корреляционная функция :

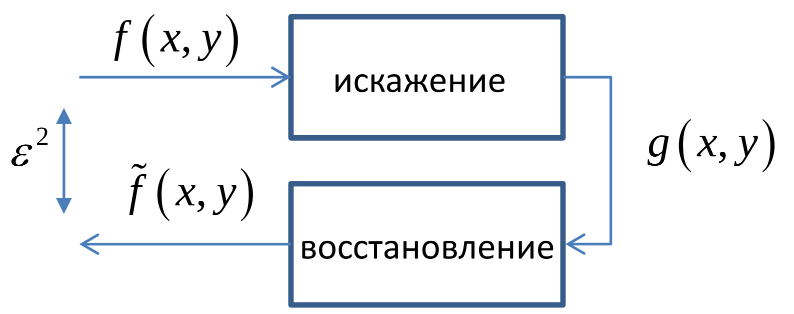
$$K_{fg}\left(k,l\right) = M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right] = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, f(x-k,y-l) * h_D\left(x-k,y-l\right) =$$

$$= \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(x-k-m,y-l-n)h_D(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\left[\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, f(x-k-m,y-l-n)\right]h_D(m,n) = \boxed{\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} K_{ff}\left(k+m,l+n\right)h_D(m,n)}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения известна

Известно: $h_D(x,y), H_D(\omega_x,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

<u>Модель реконструкции в пространственной области:</u>

$$\tilde f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

$$\boxed{\tilde H(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde W_{gg}(\omega_k,\omega_l)}, \quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y) g(x-k, y-l)\right] = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) f(x-k, y-l) * h_D(x-k, y-l) =$$

$$= \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(x-k-m, y-l-n) h_D(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\left[\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) f(x-k-m, y-l-n)\right] h_D(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} K_{ff}(k+m, l+n) h_D(m,n)$$

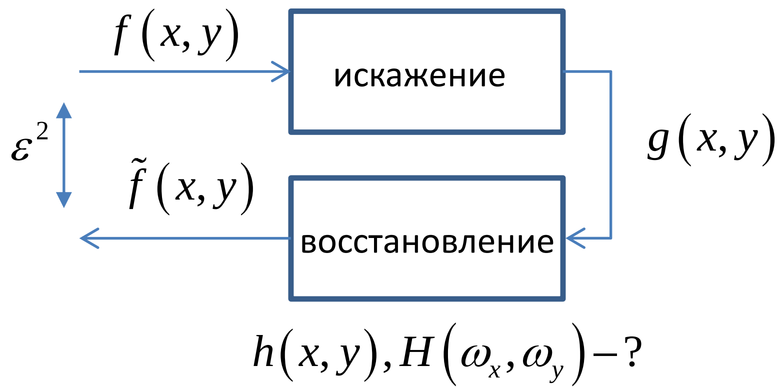
$$\Rightarrow \tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde K_{fg}(k,l)\right\} = \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde K_{ff}(k+m, l+n) h_D(m,n) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k k}{M} + \frac{\omega_l l}{N}\right)} =$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde K_{ff}(k+m, l+n) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k(k+m)}{M} + \frac{\omega_l(l+n)}{N}\right)} h_D(m,n) e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M} + \frac{\omega_l n}{N}\right)} = \tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l)\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h_D(m,n) e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M} + \frac{\omega_l n}{N}\right)} = \boxed{\tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) H_D^*(\omega_k,\omega_l)}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения известна

Известно: $h_D(x,y), H_D(\omega_x,\omega_y)$



<u>Модель реконструкции в пространственной области:</u>

$$\tilde f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)\, g(x-m, y-n)$$

$$\boxed{\tilde H(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde W_{gg}(\omega_k,\omega_l)}, \quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y) g(x-k,y-l)\right] = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) f(x-k,y-l) * h_D(x-k,y-l) =$$

$$= \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(x-k-m, y-l-n) h_D(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\left[\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) f(x-k-m,y-l-n)\right] h_D(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} K_{ff}(k+m,l+n) h_D(m,n)$$

$$\Rightarrow \tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde K_{fg}(k,l)\right\} = \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde K_{ff}(k+m,l+n) h_D(m,n) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k k}{M}+\frac{\omega_l l}{N}\right)} =$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde K_{ff}(k+m,l+n) e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k(k+m)}{M}+\frac{\omega_l(l+n)}{N}\right)} h_D(m,n) e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M}+\frac{\omega_l n}{N}\right)} = \tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l)\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h_D(m,n) e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M}+\frac{\omega_l n}{N}\right)} = \boxed{\tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) H_D^*(\omega_k,\omega_l)}$$

Автокорреляционная функция:

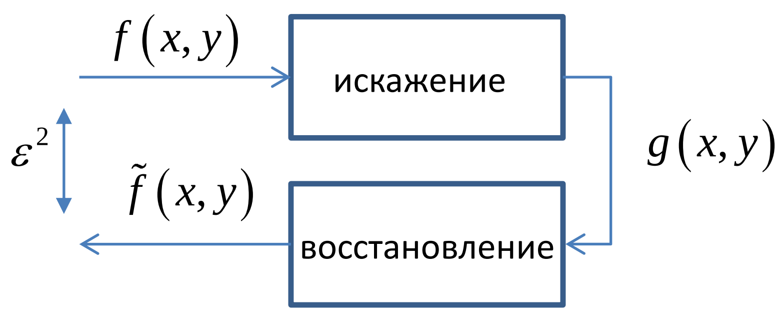
$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[g(x-m,y-n) g(x-k,y-l)\right] = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x-m,y-n) * h_D(x-m,y-n) f(x-k,y-l) * h_D(x-k,y-l)\right] =$$

$$= \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{t_1=0}^{M-1}\sum_{t_2=0}^{N-1}\sum_{r_1=0}^{M-1}\sum_{r_2=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x-m-r_1, y-n-r_2) f(x-k-t_1, y-l-t_2)\right] h_D(r_1,r_2) h_D(t_1,t_2) = \frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{t_1=0}^{M-1}\sum_{t_2=0}^{N-1}\sum_{r_1=0}^{M-1}\sum_{r_2=0}^{N-1}\tilde K_{ff}(k+t_1-m-r_1, l+t_2-n-r_2) h_D(r_1,r_2) h_D(t_1,t_2)$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения известна

Известно: $h_D(x,y), H_D(\omega_x,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y)=g(x,y)*h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}h(m,n)g(x-m,y-n)$$

$$\boxed{\tilde{H}(\omega_k,\omega_l)=\frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)},\quad \omega_k=\overline{0,M-1},\ \omega_l=\overline{0,N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y)=f(x,y)*h_D(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l)=M\left[f(x,y)g(x-k,y-l)\right]=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)f(x-k,y-l)*h_D(x-k,y-l)=$$

$$=\frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(x-k-m,y-l-n)h_D(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\left[\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)f(x-k-m,y-l-n)\right]h_D(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}K_{ff}(k+m,l+n)h_D(m,n)$$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)=\mathcal{F}\left\{\tilde{K}_{fg}(k,l)\right\}=\frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{K}_{ff}(k+m,l+n)h_D(m,n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k k}{M}+\frac{\omega_l l}{N}\right)}=$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{K}_{ff}(k+m,l+n)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_k(k+m)}{M}+\frac{\omega_l(l+n)}{N}\right)}h_D(m,n)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M}+\frac{\omega_l n}{N}\right)}=\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}h_D(m,n)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_k m}{M}+\frac{\omega_l n}{N}\right)}=\boxed{\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)H_D^*(\omega_k,\omega_l)}$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n)=M\left[g(x-m,y-n)g(x-k,y-l)\right]=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x-m,y-n)*h_D(x-m,y-n)\,f(x-k,y-l)*h_D(x-k,y-l)\right]=$$

$$=\frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{t_1=0}^{M-1}\sum_{t_2=0}^{N-1}\sum_{r_1=0}^{M-1}\sum_{r_2=0}^{N-1}\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x-m-r_1,y-n-r_2)f(x-k-t_1,y-l-t_2)\right]h_D(r_1,r_2)h_D(t_1,t_2)=\frac{1}{MN}\frac{1}{MN}\sum_{t_1=0}^{M-1}\sum_{t_2=0}^{N-1}\sum_{r_1=0}^{M-1}\sum_{r_2=0}^{N-1}\tilde{K}_{ff}(k+t_1-m-r_1,l+t_2-n-r_2)h_D(r_1,r_2)h_D(t_1,t_2)$$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)=\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)H_D(\omega_k,\omega_l)H_D^*(\omega_k,\omega_l)=\boxed{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)}$$

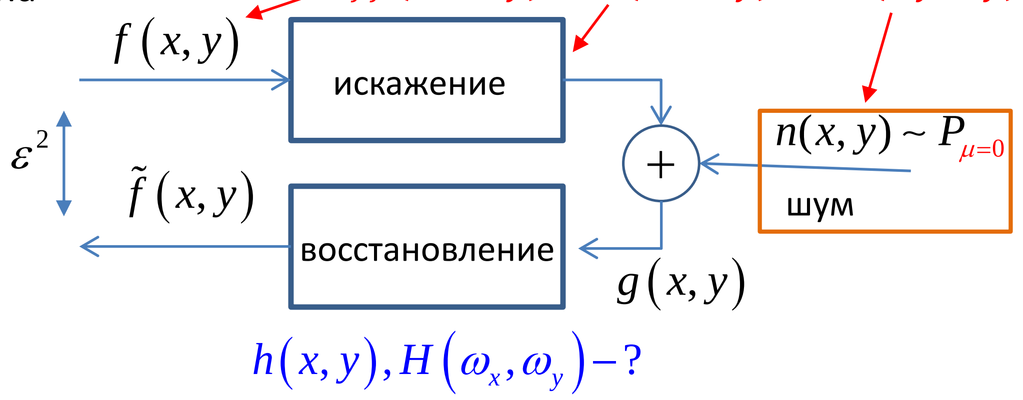
$$\tilde{H}(\omega_k,\omega_l)=\frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)}=\frac{\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)H_D^*(\omega_k,\omega_l)}{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l)}=\boxed{\frac{1}{H_D(\omega_k,\omega_l)}}$$

- Инверсный фильтр

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения с аддитивный шумом известна

Известно: $W_{ff}(\omega_x, \omega_y), H_D(\omega_x, \omega_y), W_{nn}(\omega_y, \omega_y)$



<u>Модель реконструкции в пространственной области:</u>

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f_D(x,y) + n(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y) + n(x,y)$$

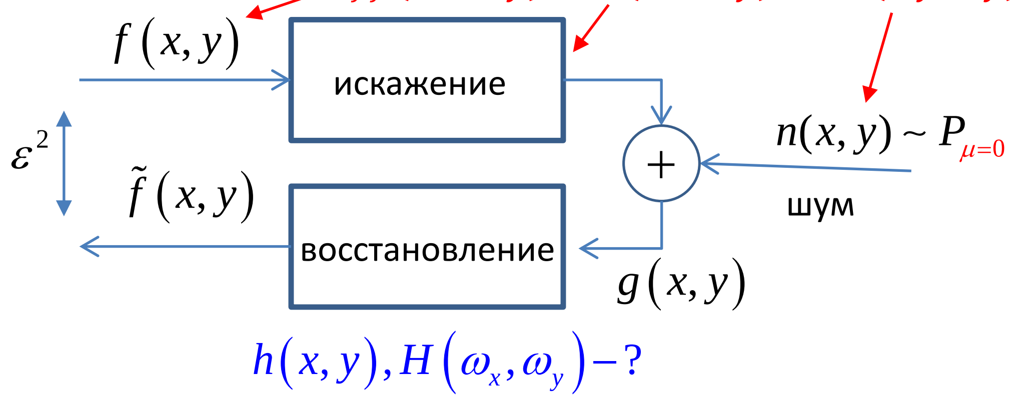
$$\boxed{\tilde{H}(\omega_k, \omega_l) = \frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k, \omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k, \omega_l)}, \quad \omega_k = \overline{0, M-1}, \ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

$$\omega_k = \overline{0, M-1}, \ \omega_l = \overline{0, N-1}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения с аддитивный шумом известна

Известно: $W_{ff}(\omega_x,\omega_y),\ H_D(\omega_x,\omega_y),\ W_{nn}(\omega_y,\omega_y)$



Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y)=g(x,y)*h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}h(m,n)g(x-m,y-n)$$

$$\boxed{\tilde{H}(\omega_k,\omega_l)=\frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)},\quad \omega_k=\overline{0,M-1},\ \omega_l=\overline{0,N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y)=f_D(x,y)+n(x,y)=f(x,y)*h_D(x,y)+n(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l)=M\left[f(x,y)\left(f_D(x-k,y-l)+n(x-k,y-l)\right)\right]=K_{ff_D}(k,l)+K_{fn}(k,l)$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n)=M\left[\left(f_D(x-m,y-n)+n(x-m,y-n)\right)\left(f_D(x-k,y-l)+n(x-k,y-l)\right)\right]=$$

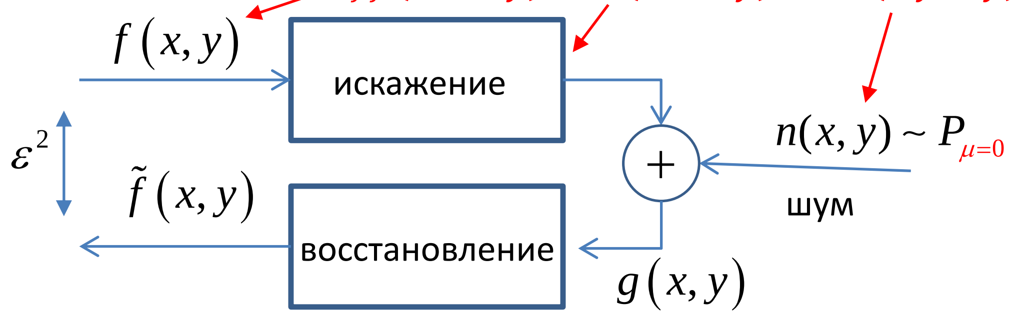
$$=K_{f_Df_D}(k-m,l-n)+K_{f_Dn}(k-m,l-n)+K_{nn}(k-m,l-n)+K_{nf_D}(k-m,l-n)$$

$$\omega_k=\overline{0,M-1},\ \omega_l=\overline{0,N-1}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения с аддитивный шумом известна

Известно: $W_{ff}(\omega_x,\omega_y),\ H_D(\omega_x,\omega_y),\ W_{nn}(\omega_y,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

$\omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$

$$\tilde{H}(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)},\quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f_D(x,y) + n(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y) + n(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)\left(f_D(x-k,y-l) + n(x-k,y-l)\right)\right] = K_{ff_D}(k,l) + K_{fn}(k,l)$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[\left(f_D(x-m,y-n)+n(x-m,y-n)\right)\left(f_D(x-k,y-l)+n(x-k,y-l)\right)\right] =$$

$$= K_{f_D f_D}(k-m,l-n) + K_{f_D n}(k-m,l-n) + K_{nn}(k-m,l-n) + K_{nf_D}(k-m,l-n)$$

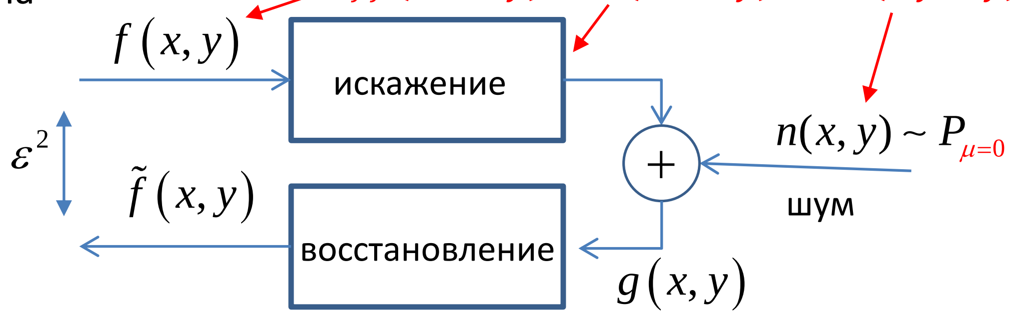
Пусть $n(x,y)\sim P_{\mu=0}$ не коррелирует с $f(x,y),\ f_D(x,y)$, тогда:

$$K_{fn}(k,l) = M\left[f(x,y)n(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)\right]M\left[n(x-k,y-l)\right] = 0 \quad \Rightarrow K_{f_D n}(k-m,l-n) = 0,\ K_{nf_D}(k-m,l-n) = 0$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения с аддитивный шумом известна

Известно: $W_{ff}(\omega_x,\omega_y),\ H_D(\omega_x,\omega_y),\ W_{nn}(\omega_y,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde{f}(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)g(x-m,y-n)$$

$$\tilde{H}(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l)},\quad \omega_k = \overline{0,M-1},\ \omega_l = \overline{0,N-1}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f_D(x,y) + n(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y) + n(x,y)$$

$$\omega_k = \overline{0,M-1},\ \omega_l = \overline{0,N-1}$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)\left(f_D(x-k,y-l) + n(x-k,y-l)\right)\right] = K_{ff_D}(k,l) + K_{fn}(k,l)$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[\left(f_D(x-m,y-n) + n(x-m,y-n)\right)\left(f_D(x-k,y-l) + n(x-k,y-l)\right)\right] =$$

$$= K_{f_D f_D}(k-m,l-n) + K_{f_D n}(k-m,l-n) + K_{nn}(k-m,l-n) + K_{nf_D}(k-m,l-n)$$

Пусть $n(x,y) \sim P_{\mu=0}$ не коррелирует с $f(x,y), f_D(x,y)$, тогда:

$$K_{fn}(k,l) = M\left[f(x,y)n(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)\right]M\left[n(x-k,y-l)\right] = 0 \quad \Rightarrow K_{f_D n}(k-m,l-n) = 0,\ K_{nf_D}(k-m,l-n) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{fg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde{K}_{fg}(k,l)\right\} = \boxed{\tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l) H_D^*(\omega_k,\omega_l)}$$

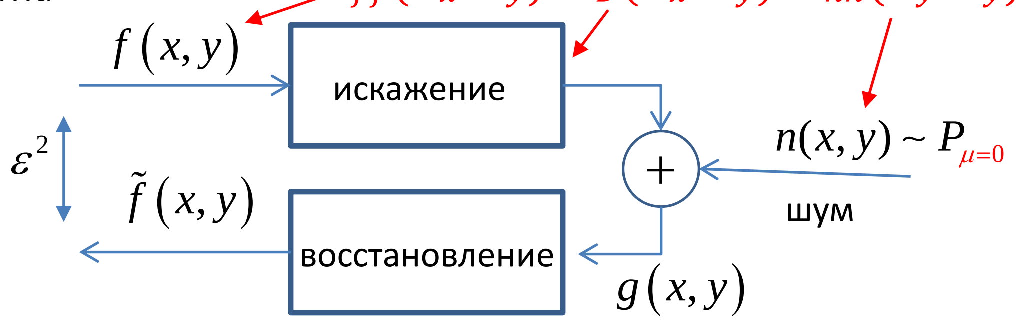
$$\Rightarrow \tilde{W}_{gg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{K_{f_D f_D}(k-m,l-n) + K_{nn}(k-m,l-n)\right\} = \mathscr{F}\left\{K_{f_D f_D}(k-m,l-n)\right\} + \mathscr{F}\left\{K_{nn}(k-m,l-n)\right\} =$$

$$= \boxed{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2 \tilde{W}_{ff}(\omega_k,\omega_l) + \tilde{W}_{nn}(\omega_k,\omega_l)}$$

Винеровская фильтрация. Дискретный случай.

Модель искажения с аддитивный шумом известна

Известно: $W_{ff}(\omega_x,\omega_y),\ H_D(\omega_x,\omega_y), W_{nn}(\omega_y,\omega_y)$



$h(x,y), H(\omega_x,\omega_y) - ?$

$\omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}$

Модель реконструкции в пространственной области:

$$\tilde f(x,y) = g(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n) g(x-m, y-n)$$

$$\boxed{\tilde H(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l)}{\tilde W_{gg}(\omega_k,\omega_l)},\quad \omega_k = \overline{0, M-1},\ \omega_l = \overline{0, N-1}}$$

Модель наблюдения:

$$g(x,y) = f_D(x,y) + n(x,y) = f(x,y) * h_D(x,y) + n(x,y)$$

Корреляционная функция :

$$K_{fg}(k,l) = M\left[f(x,y)\left(f_D(x-k,y-l) + n(x-k,y-l)\right)\right] = K_{ff_D}(k,l) + K_{fn}(k,l)$$

Автокорреляционная функция:

$$K_{gg}(k-m,l-n) = M\left[\left(f_D(x-m,y-n)+n(x-m,y-n)\right)\left(f_D(x-k,y-l)+n(x-k,y-l)\right)\right] =$$
$$= K_{f_D f_D}(k-m,l-n) + K_{f_D n}(k-m,l-n) + K_{nn}(k-m,l-n) + K_{nf_D}(k-m,l-n)$$

Пусть $n(x,y) \sim P_{\mu=0}$ не коррелирует с $f(x,y), f_D(x,y)$, тогда:

$$K_{fn}(k,l) = M\left[f(x,y) n(x-k,y-l)\right] = M\left[f(x,y)\right] M\left[n(x-k,y-l)\right] = 0 \quad \Rightarrow K_{f_D n}(k-m,l-n) = 0,\ K_{nf_D}(k-m,l-n) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde W_{fg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{\tilde K_{fg}(k,l)\right\} = \boxed{\tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) H_D^*(\omega_k,\omega_l)}$$

$$\Rightarrow \tilde W_{gg}(\omega_k,\omega_l) = \mathscr{F}\left\{K_{f_D f_D}(k-m,l-n) + K_{nn}(k-m,l-n)\right\} = \mathscr{F}\left\{K_{f_D f_D}(k-m,l-n)\right\} + \mathscr{F}\left\{K_{nn}(k-m,l-n)\right\} =$$
$$= \boxed{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2 \tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) + \tilde W_{nn}(\omega_k,\omega_l)}$$

$$\tilde H(\omega_k,\omega_l) = \frac{\tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) H_D^*(\omega_k,\omega_l)}{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2 \tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l) + \tilde W_{nn}(\omega_k,\omega_l)} = \boxed{\frac{H_D^*(\omega_k,\omega_l)}{\left|H_D(\omega_k,\omega_l)\right|^2 + \tilde W_{nn}(\omega_k,\omega_l) / \tilde W_{ff}(\omega_k,\omega_l)}}$$

$1/SNR(\omega_x,\omega_y)$ обратное отношение сигнал-шум для энергетических спектров, регуляризирующая добавка

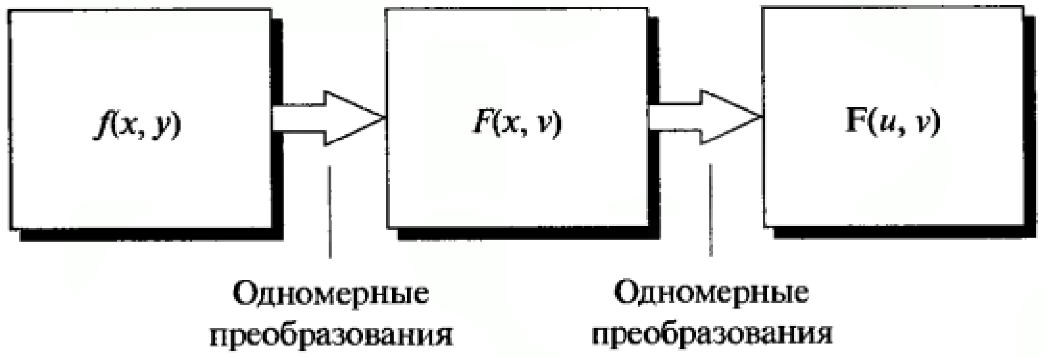
Практические свойства дискретного Фурье-преобразование (ДПФ)

$$\hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\left\{f(x,y)\right\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

количество умножений N^2M^2

Разделение переменных, количество умножений: N^2+M^2

$$\hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}\right)}\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_y y}{N}\right)}}_{\hat{f}_y(x,\omega_y)}=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}\hat{f}_y(x,\omega_y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}\right)}$$



Вычисление обратного ДПФ через прямое:

$$f(x,y)=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}\Rightarrow\frac{1}{MN}f^*(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}*(\omega_x,\omega_y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}=\mathscr{F}\left\{\hat{f}*(x,y)\right\}$$

Для действительного изображения:

$$f(x,y)=MN\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{MN}f^*(x,y)\right)=MN\,\mathrm{Re}\left(\mathscr{F}\left\{\hat{f}*(x,y)\right\}\right)$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-i\frac{2\pi\omega}{M}x}$$

M^2 операций умножения на $e^{-i\frac{2\pi}{M}\omega x}$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i\frac{2\pi\omega}{M}x}$$ $\leftarrow$ M^2 операций умножения на $e^{-i\frac{2\pi}{M}\omega x}$

Пусть $W_M = e^{-i\frac{2\pi}{M}}, \quad M = 2^n,\ n > 0,\ n \in \mathbb{Z}$ - Если $M < 2^n$, $f(x)$ можно дополнить нулями до 2^n. M – четное.

$$\Rightarrow\ M = 2K,\ \mathrm{K} = 2^{n-1}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{\omega x} = \frac{1}{2K}\sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{\omega x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{\omega(2x)} + \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{\omega(2x+1)}\right]$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i\frac{2\pi\omega}{M}x} \longleftarrow M^2$$ операций умножения на $e^{-i\frac{2\pi}{M}\omega x}$

Пусть $W_M = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$, $\quad M = 2^n,\ n > 0,\ n \in \mathbb{Z}$ - Если $M < 2^n$, $f(x)$ можно дополнить нулями до 2^n. M – четное.

$$\Rightarrow\ M = 2K,\ \mathrm{K} = 2^{n-1}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{\omega x} = \frac{1}{2K}\sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{\omega x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{\omega(2x)} + \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{\omega(2x+1)}\right],\ \omega = 0,..,M-1$$

$$\left(W_{2K}\right)^{\omega(2x)} = e^{-i\frac{2\pi}{2K}2\omega x} = \left(W_K\right)^{\omega x}$$

$$\Rightarrow\ \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_e(\omega)} + \underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_o(\omega)} W_{2K}^{\omega}\right],\quad \omega = 0,..,K-1$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_e(\omega)}+\underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_o(\omega)}W_{2K}^{\omega}\right],\quad \omega=0,..,K-1$$

$$\hat{f}_e(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_K^{\omega x},\ \ \omega=0,..,K-1,\quad K=\frac{M}{2}$$

$$\hat{f}_o(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_K^{\omega x},\ \ \omega=0,..,K-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega)+\hat{f}_o(\omega)W_{2K}^{\omega}\right],}\quad \omega=0,..,\frac{M}{2}-1$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_e(\omega)}+\underbrace{\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{\omega x}}_{\hat{f}_o(\omega)}W_{2K}^{\omega}\Bigg],\quad \omega=0,..,K-1$$

$$\hat{f}_e(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{\omega x},\ \ \omega=0,..,K-1,\quad K=\frac{M}{2}$$

$$\hat{f}_o(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{\omega x},\ \ \omega=0,..,K-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega)+\hat{f}_o(\omega)W_{2K}^{\omega}\right],}\quad \omega=0,..,\frac{M}{2}-1$$

$$\left(W_K\right)^{\omega+K}=e^{-i\frac{2\pi}{K}(\omega+K)}=e^{-i\frac{2\pi}{K}\omega}e^{-i2\pi}=\left(W_K\right)^{\omega}$$

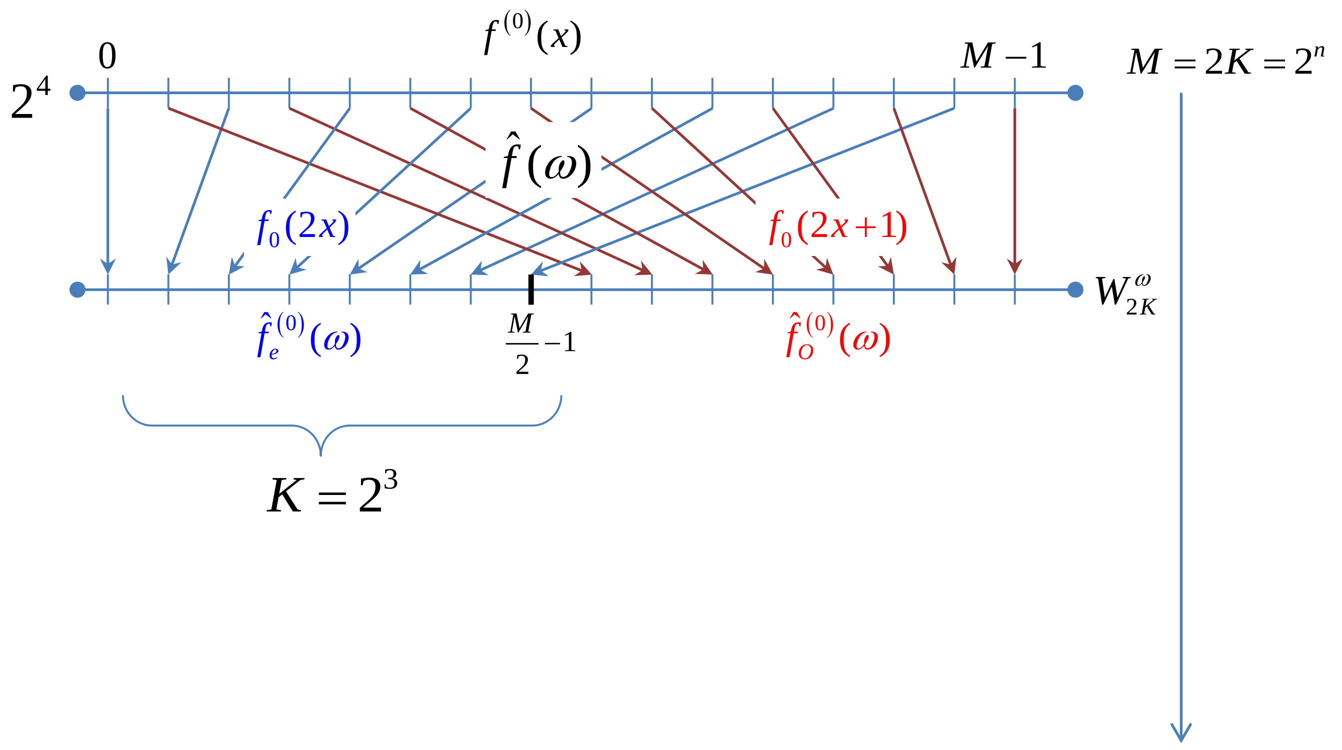
$$\left(W_{2K}\right)^{\omega+K}=e^{-i\frac{2\pi}{2K}(\omega+K)}=e^{-i\frac{2\pi}{2K}\omega}e^{-i\pi}=-\left(W_{2K}\right)^{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega+K)=\frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega)-\hat{f}_o(\omega)W_{2K}^{\omega}\right]},\quad \omega=0,..,\frac{M}{2}-1$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{\omega x},$$

$$\hat{f}_o(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{\omega x}$$



$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) + \boxed{\hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}}\right],$$

$$\hat{f}(\omega + K) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) - \hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\omega = 0,..,\frac{M}{2}-1, \quad W_{2K}^{\omega} = W_M^{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$

1. **Прямой проход**: рекурсивное разделение отсчётов функции на четные и нечетные отсчеты.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

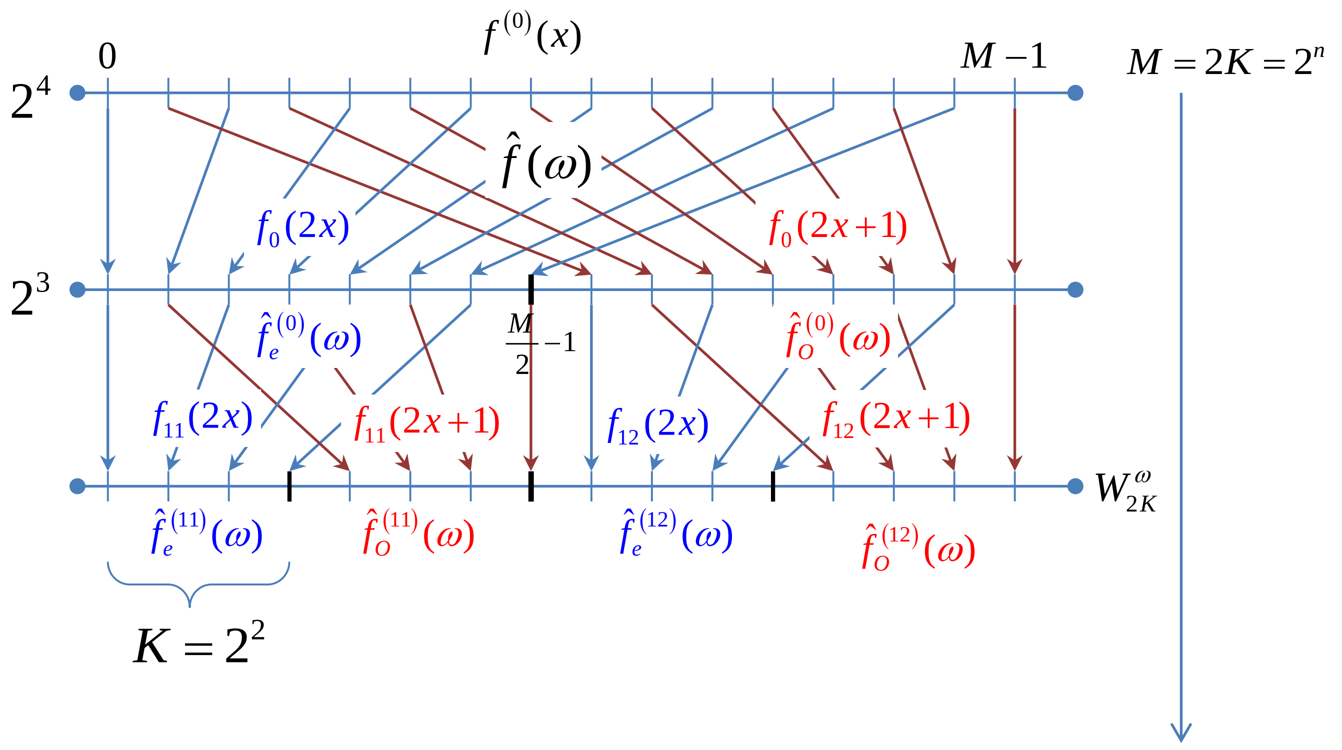
$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{\omega x},$$

$$\hat{f}_o(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{\omega x}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) + \boxed{\hat{f}_o(\omega)W_{2K}^{\omega}}\right],$$

$$\hat{f}(\omega+K) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) - \hat{f}_o(\omega)W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\omega = 0,..,\frac{M}{2}-1,\quad W_{2K}^{\omega} = W_M^{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$



1. **Прямой проход**: рекурсивное разделение отсчётов функции на четные и нечетные отсчеты.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

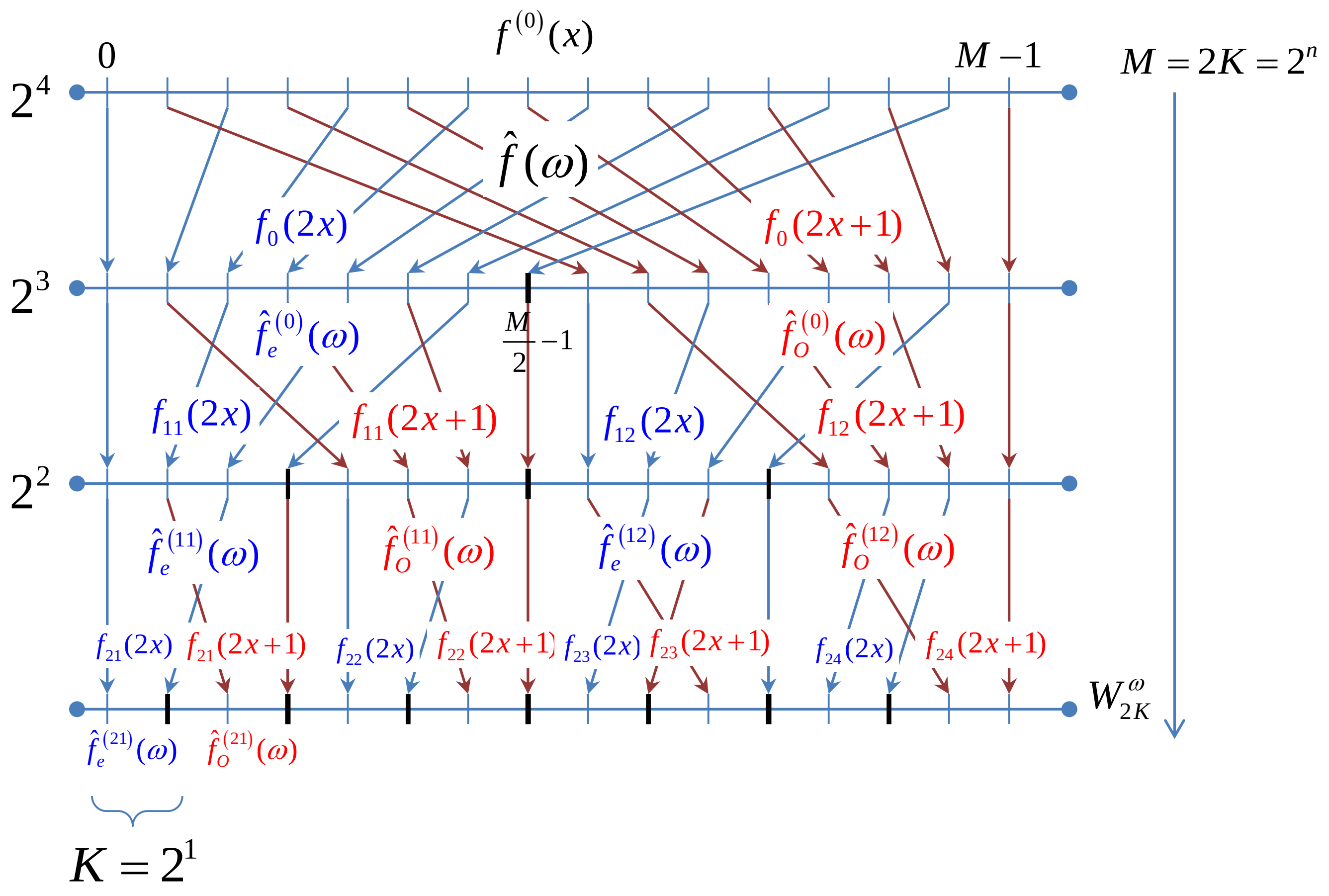
$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{\omega x},$$

$$\hat{f}_o(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{\omega x}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) + \boxed{\hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}}\right],$$

$$\hat{f}(\omega + K) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) - \hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\omega = 0,.., \frac{M}{2} - 1, \quad W_{2K}^{\omega} = W_M^{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$



1. **Прямой проход**: рекурсивное разделение отсчётов функции на четные и нечетные отсчеты.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{\omega x},$$

$$\hat{f}_o(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{\omega x}$$

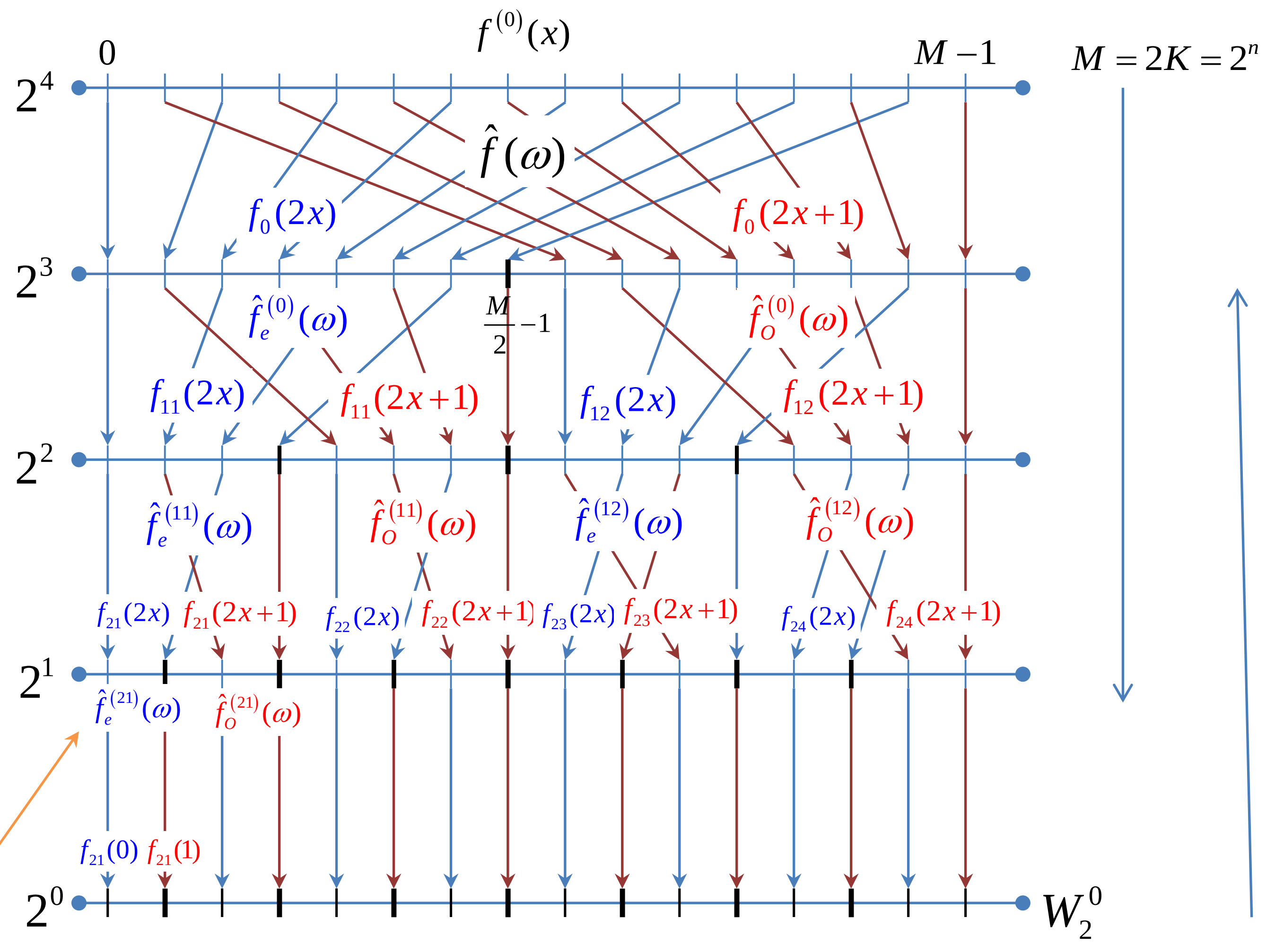
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) + \boxed{\hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}}\right],$$

$$\hat{f}(\omega+K) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) - \hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\omega = 0,..,\frac{M}{2}-1,\quad W_{2K}^{\omega} = W_M^{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$

$$\hat{f}_e^{(21)}(0) = \frac{1}{2}\left[f_{21}(0) + f_{21}(1) W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\hat{f}_e^{(21)}(1) = \frac{1}{2}\left[f_{21}(0) - f_{21}(1) W_{2K}^{\omega}\right]$$



1. Прямой проход: рекурсивное разделение отсчётов функции на четные и нечетные отсчеты.

2. **Обратный проход**: рекурсивный подсчет Фурье-кооэфициентров.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{\omega x},$$

$$\hat{f}_o(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{\omega x}$$

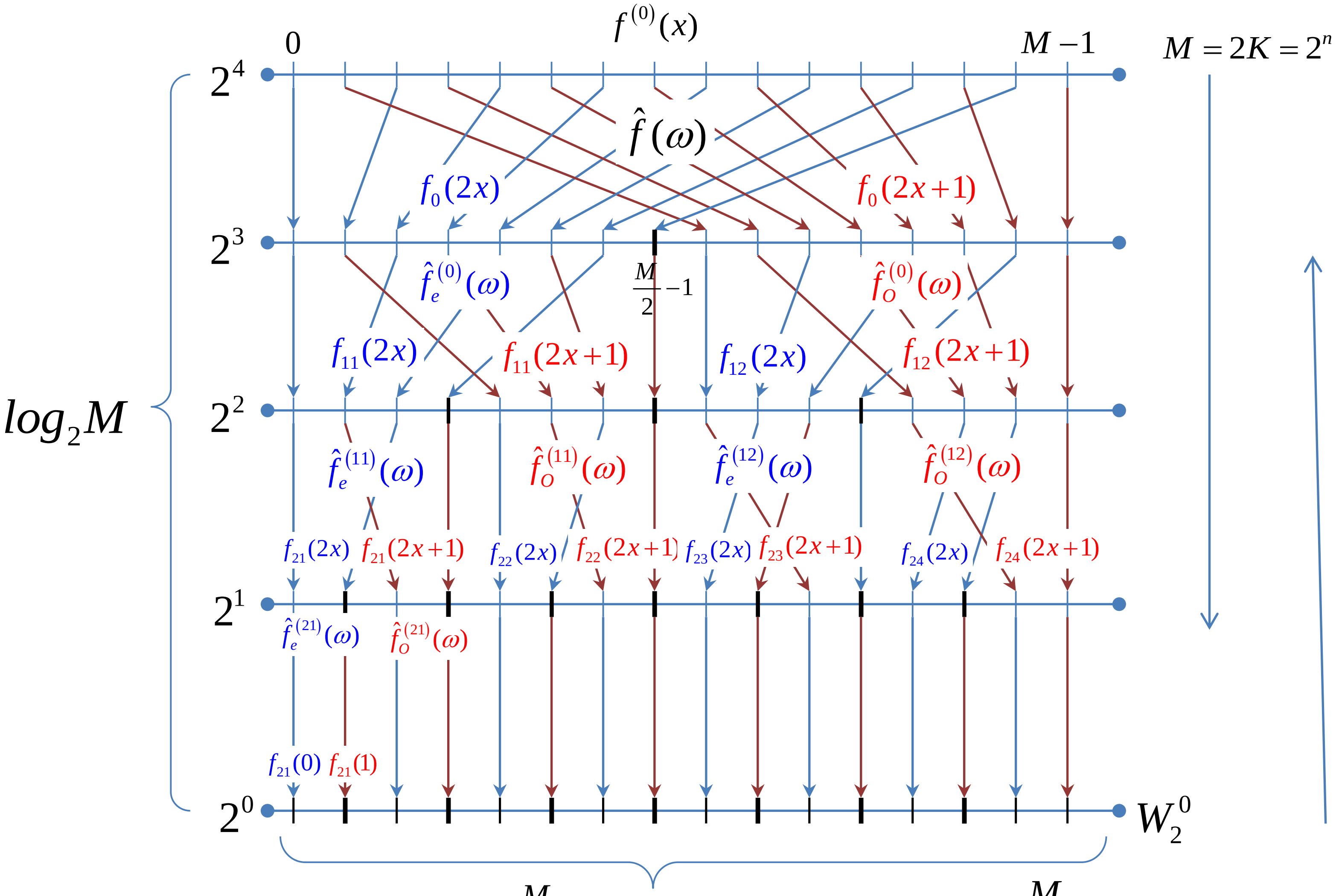
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) + \boxed{\hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}}\right],$$

$$\hat{f}(\omega+K) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_e(\omega) - \hat{f}_o(\omega) W_{2K}^{\omega}\right],$$

$$\omega = 0,..,\frac{M}{2}-1, \quad W_{2K}^{\omega} = W_M^{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{M}}$$

1. Прямой проход: рекурсивное разделение отсчётов функции на четные и нечетные отсчеты.

2. **Обратный проход**: рекурсивный подсчет Фурье-кооэфициентров.

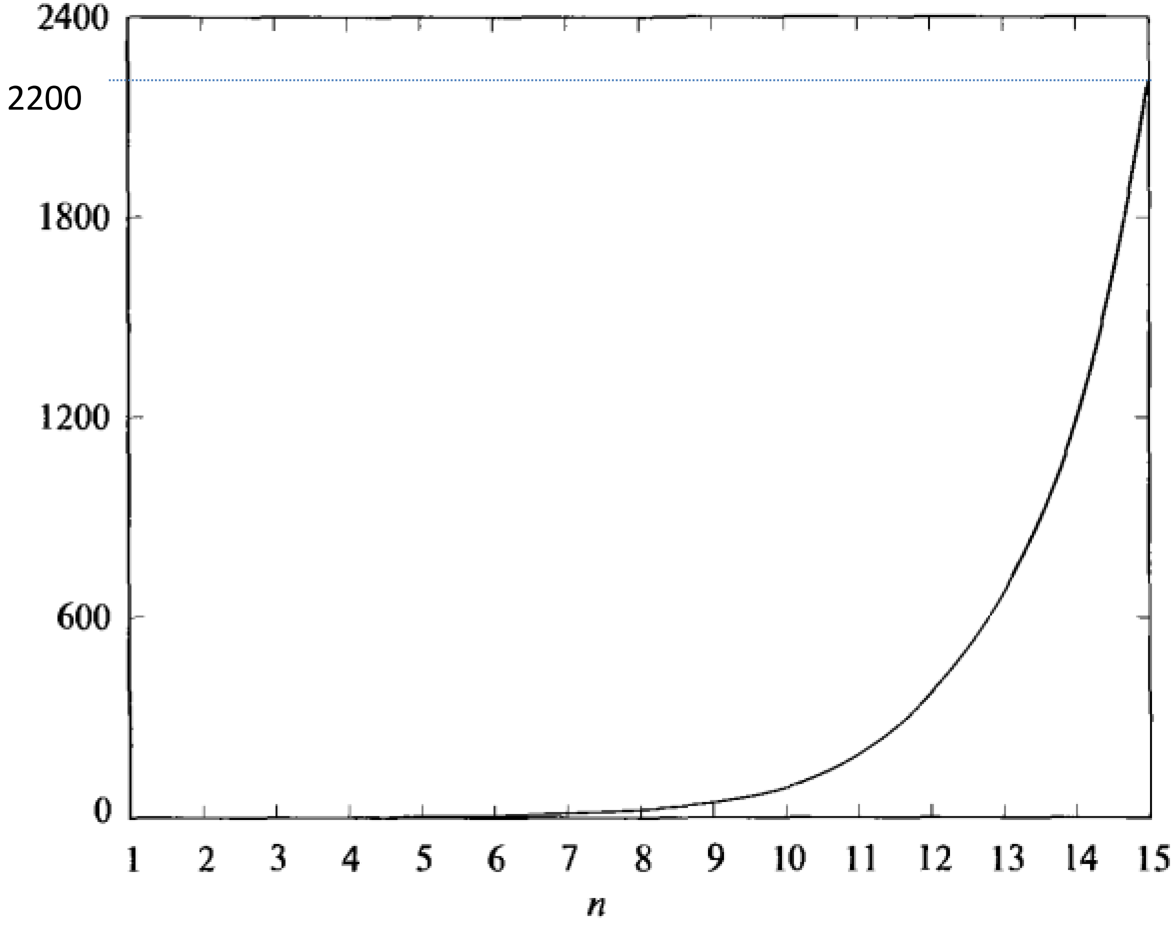


$\frac{M}{2}$ умножений на W_{2K}^{ω}, $\omega = 0,..,\frac{M}{2}-1$

Общее количество умножений на W_{2K}^{ω} - $\frac{M}{2} log_2 M$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

$$k = \frac{M^2}{M\ log_2 M} = \frac{M}{log_2 M} = \frac{2^n}{n}$$



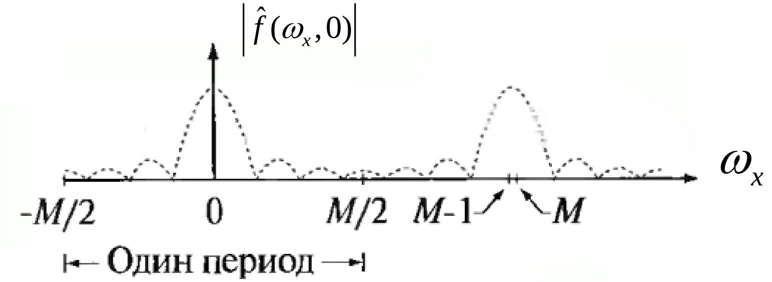
Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)
Смещение системы координат

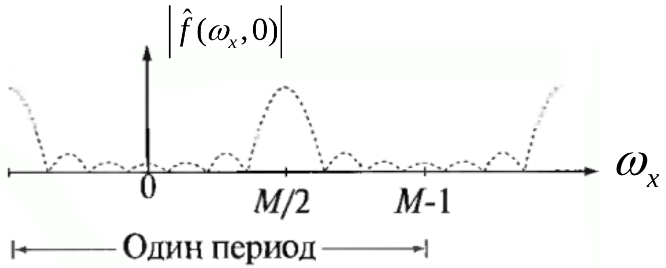
$$\hat f(\omega_x,\omega_y)=\mathscr{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

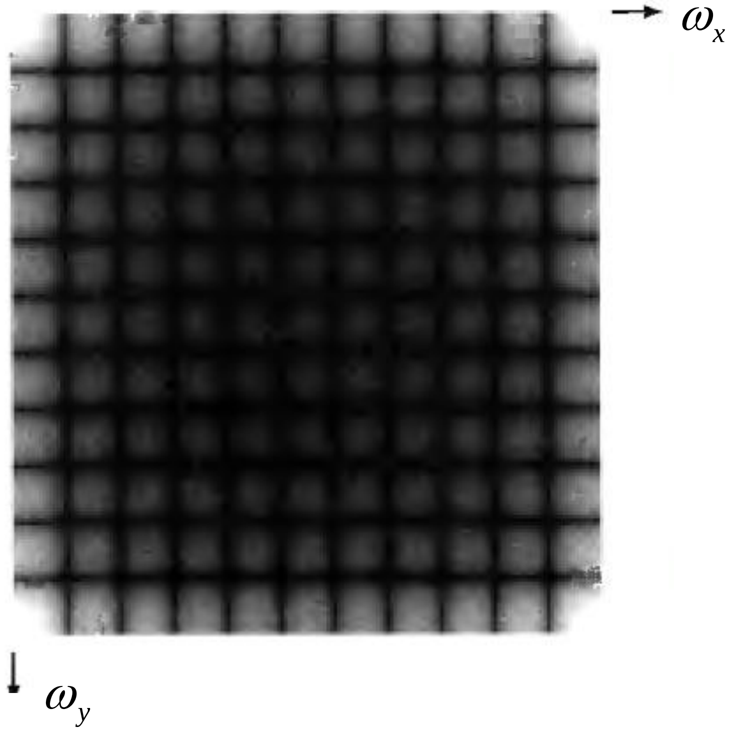
Свойства комплексного сопряжения:

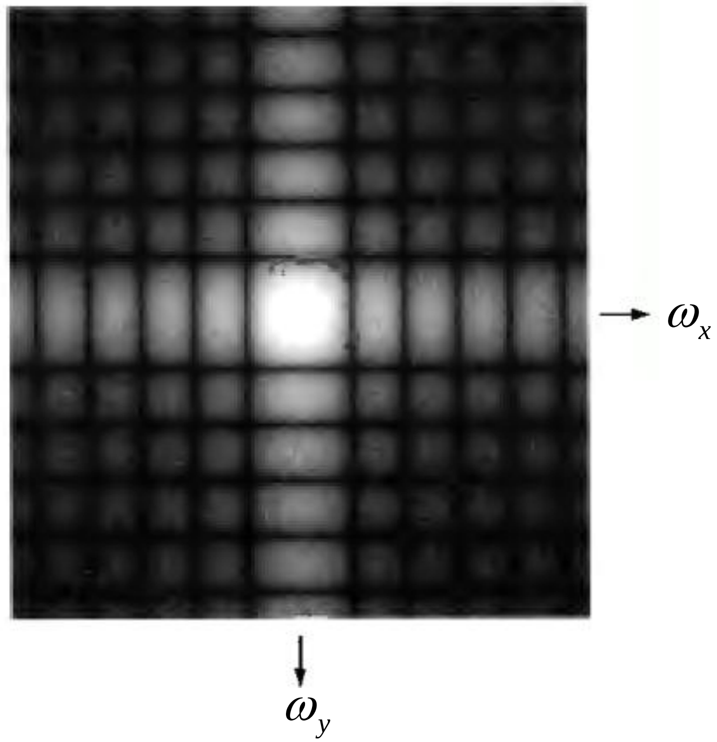
$$\hat f(\omega_x,\omega_y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{i2\pi\left(\frac{(-\omega_x)x}{M}+\frac{(-\omega_y)y}{N}\right)}=\hat f^*(-\omega_x,-\omega_y)\Rightarrow\left|\hat f(\omega_x,\omega_y)\right|=\left|\hat f(-\omega_x,-\omega_y)\right|$$

Спектр центрально-симметричен относительно начала координат.









Смещение максимума спектра в центр изображения - удобно.

Дискретные Фурье-преобразование (ДПФ)
Смещение системы координат

Прямое преобразование: $$\hat{f}(\omega_x,\omega_y)=\mathcal{F}\{f(x,y)\}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Обратное преобразование: $$f(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega_x,\omega_y)\right\}=\sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Свойства:

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0,y-y_0)\}=\hat{f}\left(\omega_x,\omega_y\right)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x_0}{M}+\frac{\omega_y y_0}{N}\right)}$$

$$\mathcal{F}\left\{f(x,y)e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\right\}=\hat{f}\left(\omega_x-u,\omega_y-v\right)$$

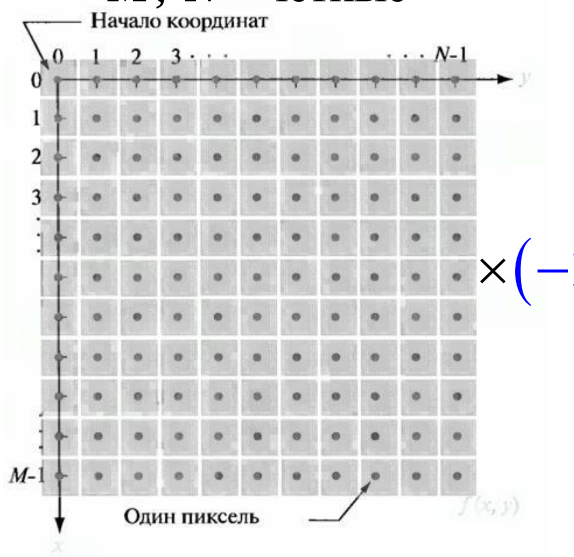
$$\text{при } u=\frac{M}{2},\ v=\frac{N}{2}\ \Rightarrow\ e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}=e^{i\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

$$\Rightarrow\mathcal{F}\left\{f(x,y)(-1)^{x+y}\right\}=\hat{f}\left(\omega_x-\frac{M}{2},\omega_y-\frac{N}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{f\left(x-\frac{M}{2},y-\frac{N}{2}\right)\right\}=\hat{f}\left(\omega_x,\omega_y\right)(-1)^{\omega_x+\omega_y}$$

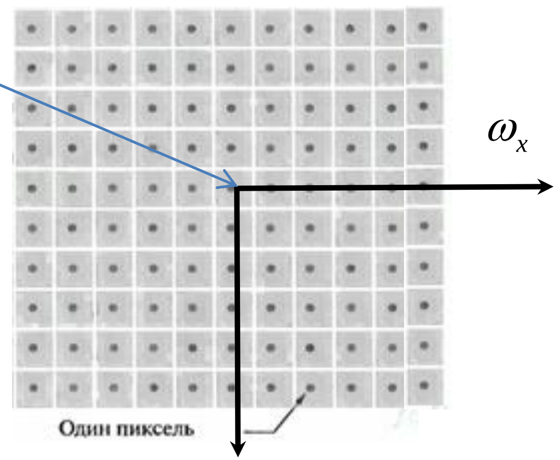
Сдвиг спектра в центр изображения:

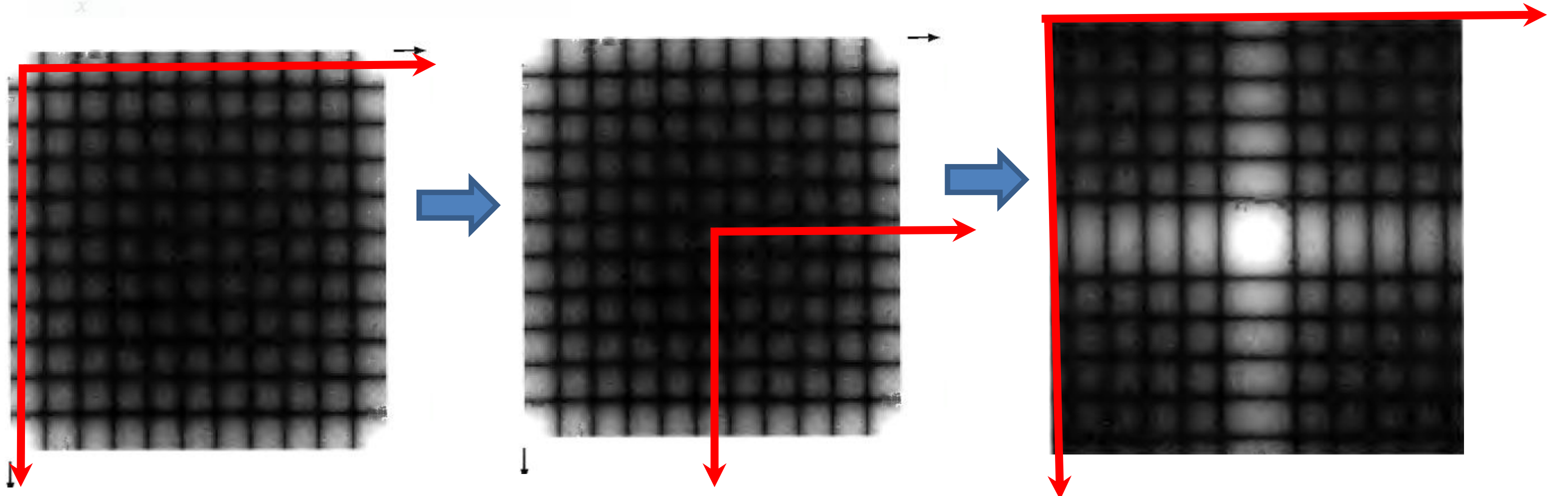
$M,\ N$ – четные



$\times(-1)^{x+y}$ $\xrightarrow{\mathcal{F}}$

$\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)$

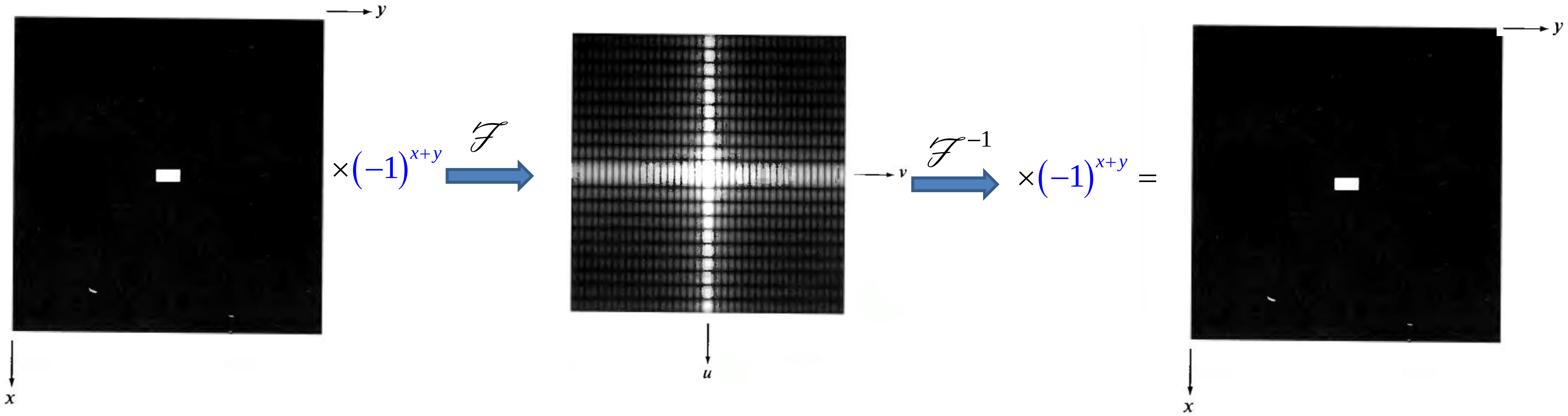




Дискретное Фурье-преобразование

Предобработка со сдвигом спектра в центр изображения для удобства визуализации:

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \mathscr{F}\{f(x,y)\} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

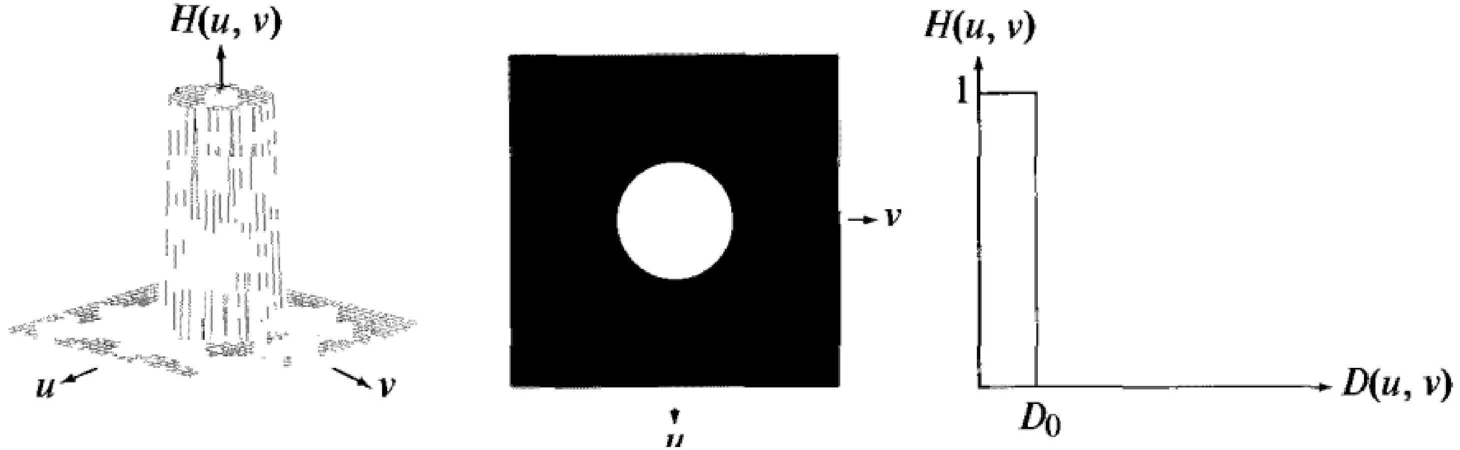


Дискретное Фурье-преобразование

Идеальный фильтр нижних частот

$$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]^{1/2}$$

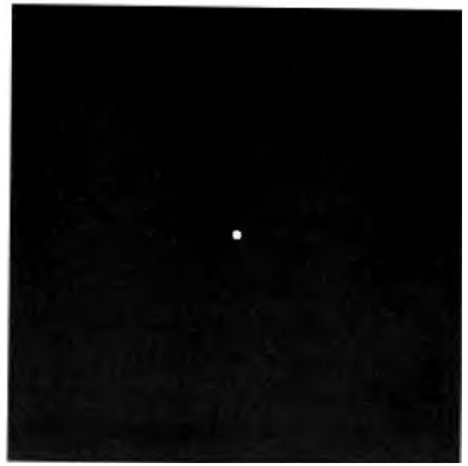
$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{при } D(u,v)\le D_0\,;\\ 0 & \text{при } D(u,v)>D_0\,,\end{cases}$$



Дискретное Фурье-преобразование

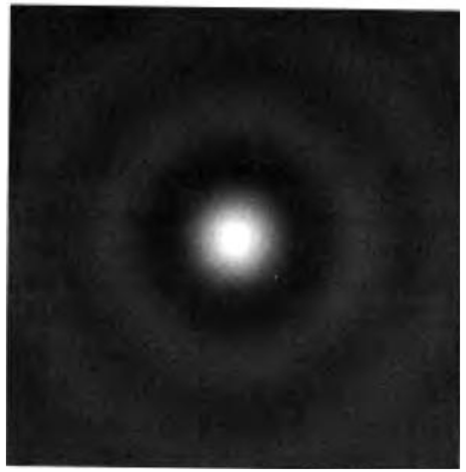
Пространственные искажения “звон” идеального фильтра . Эффект Гиббса.

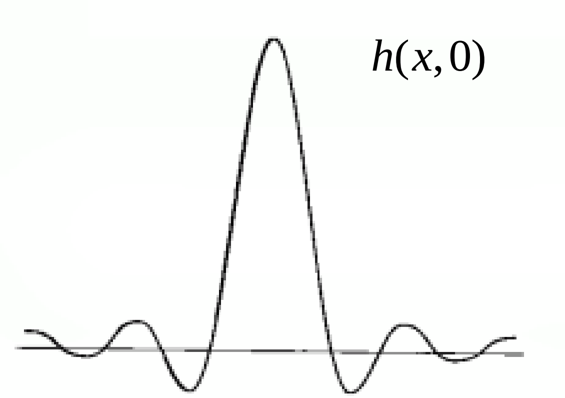
$\hat{h}(\omega_x, \omega_y)$



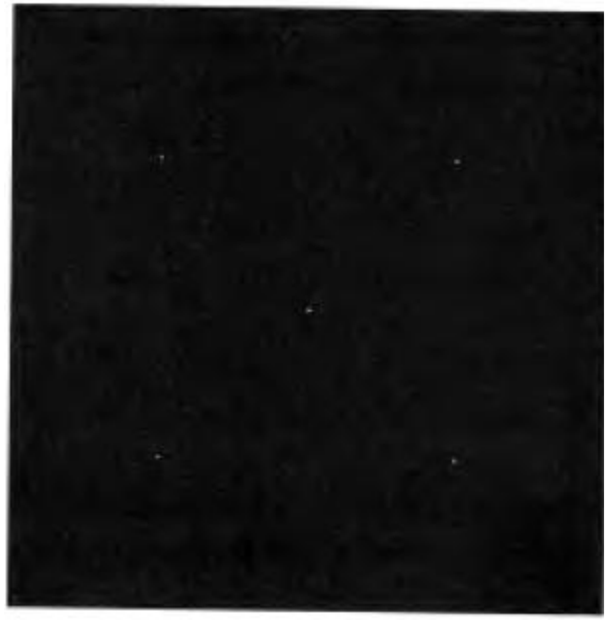
$\Leftrightarrow$

$h(x, y)$



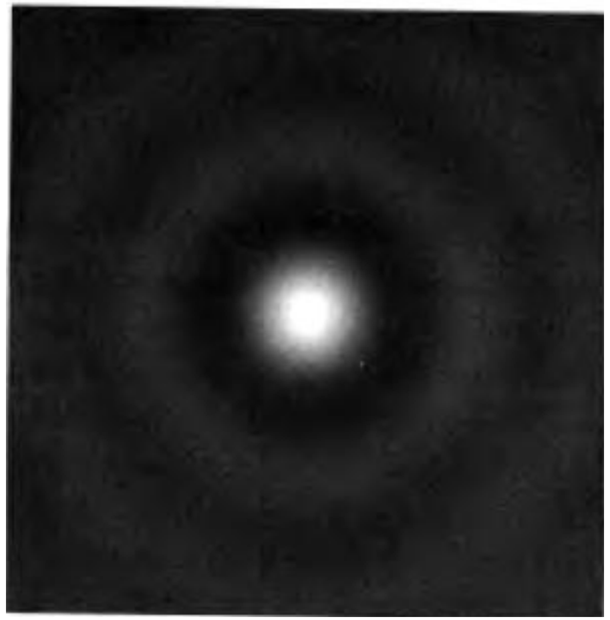


$f(x, y)$



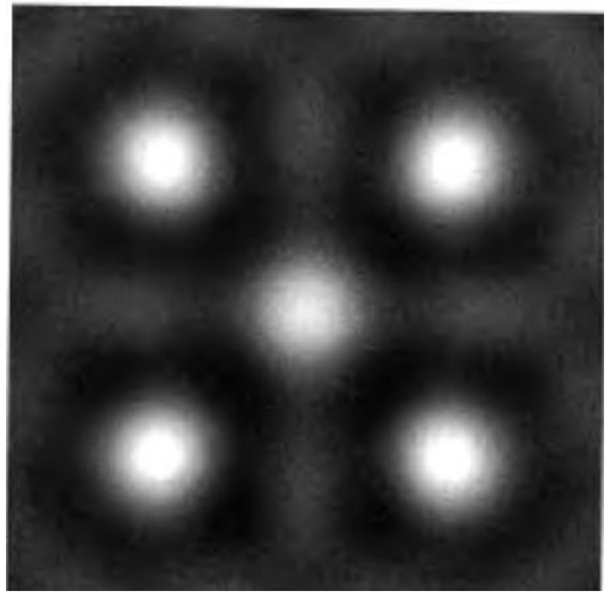
$*$

$h(x, y)$



$=$

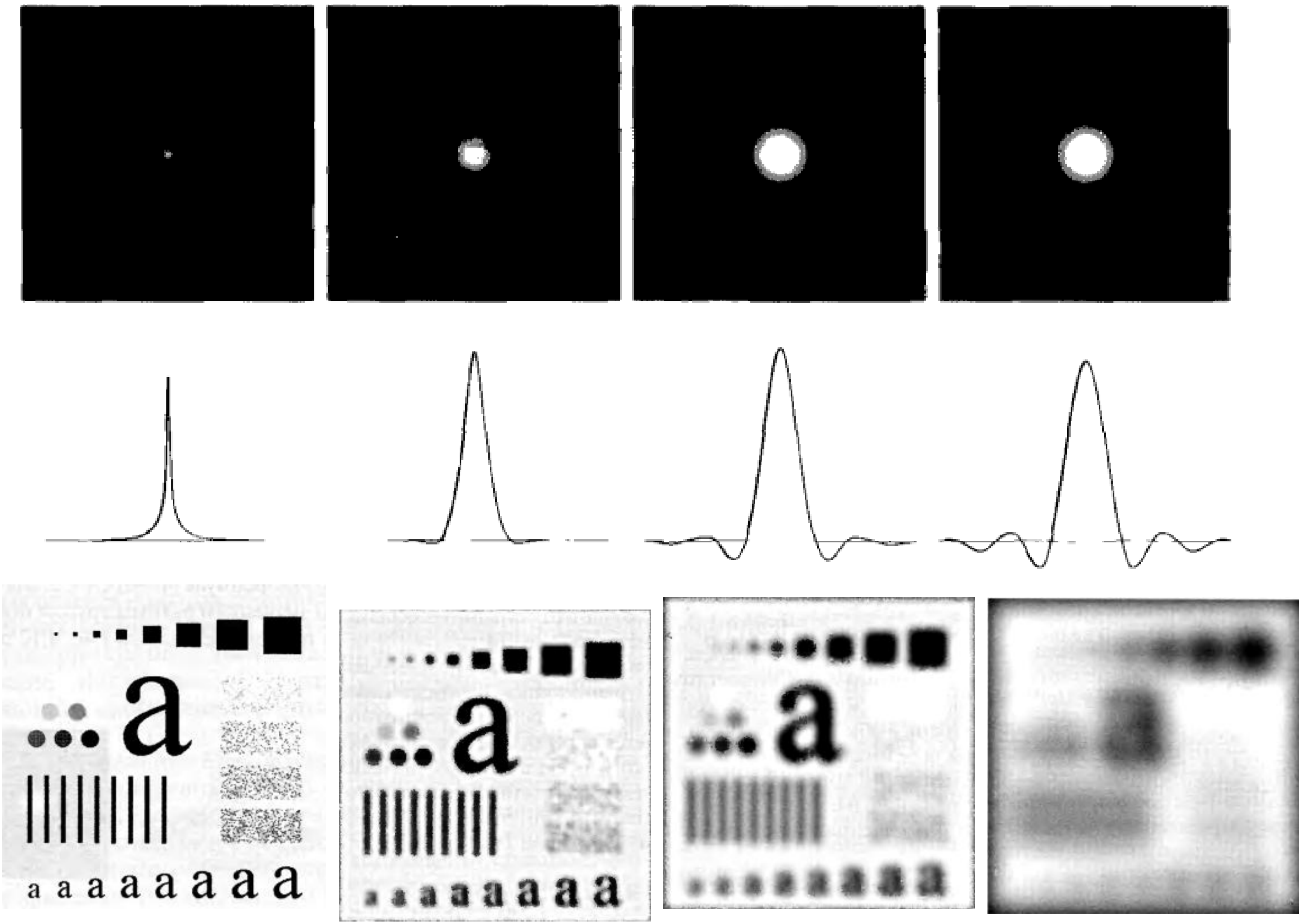
$g(x, y)$

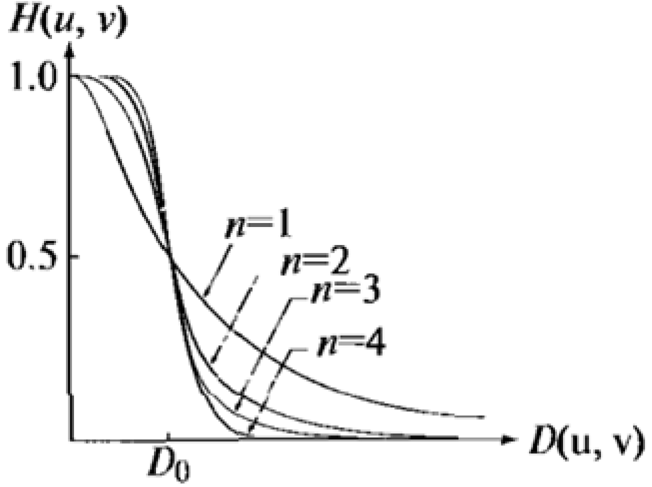


Фильтр низких частот Баттерворта

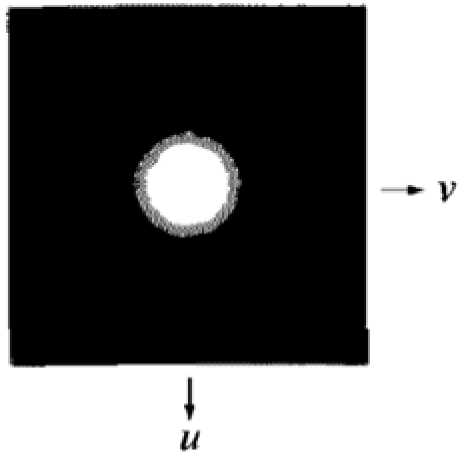
$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

$h(x,y)$



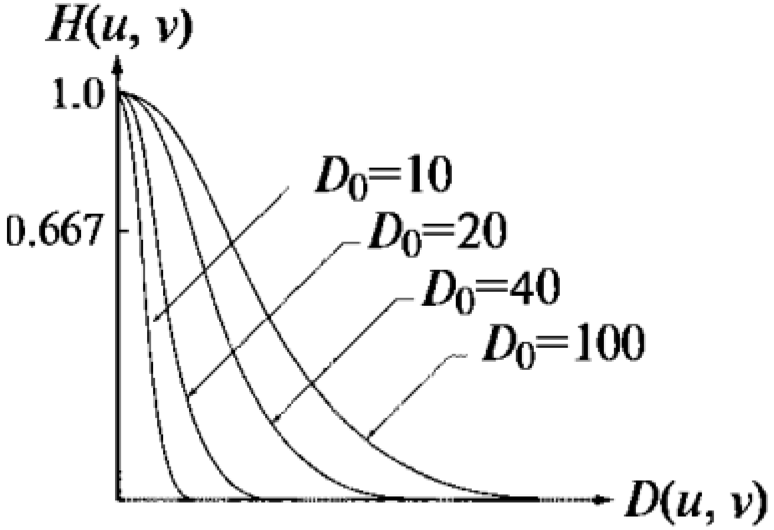


$H(u,v)$

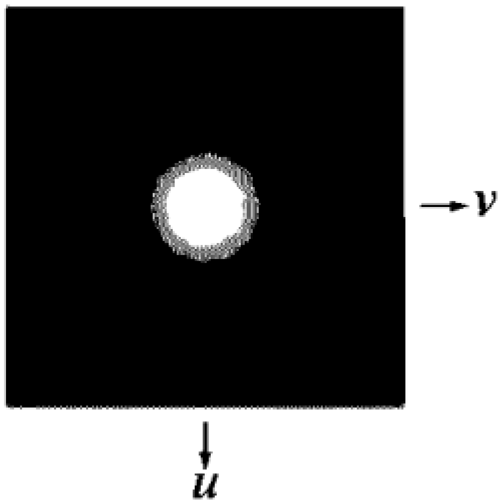


Гауссов фильтр низких частот

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$



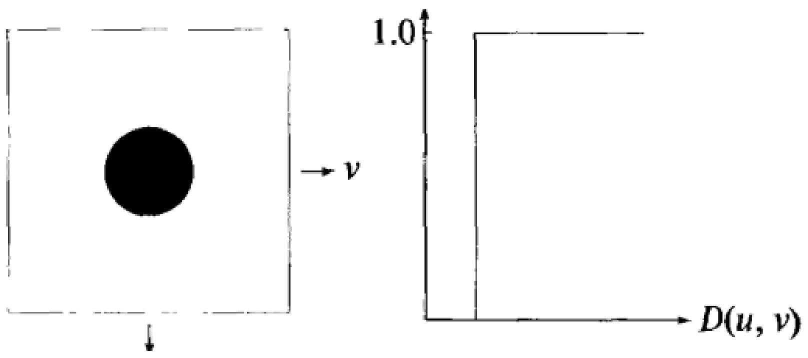
$H(u,v)$

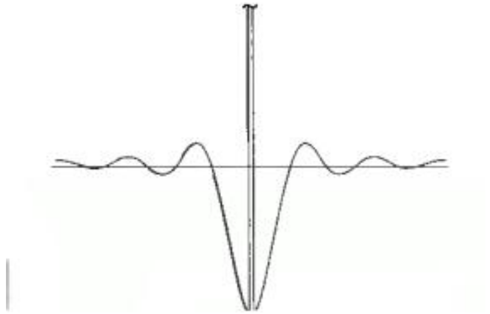


Фильтры высоких частот $H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$

Идеальный фильтр

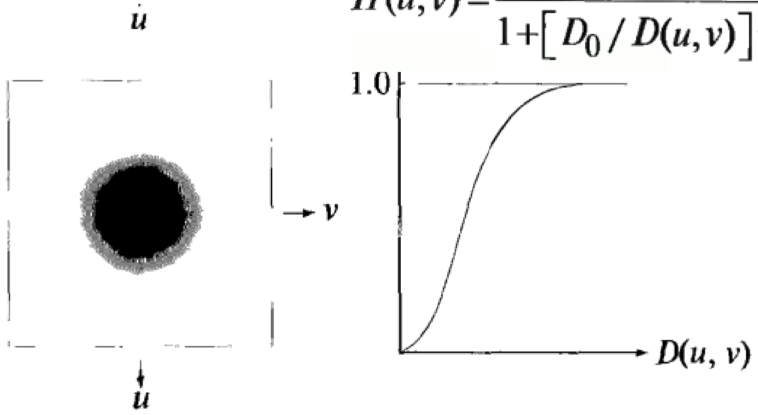
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{при } D(u,v) \le D_0 \\ 1 & \text{при } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

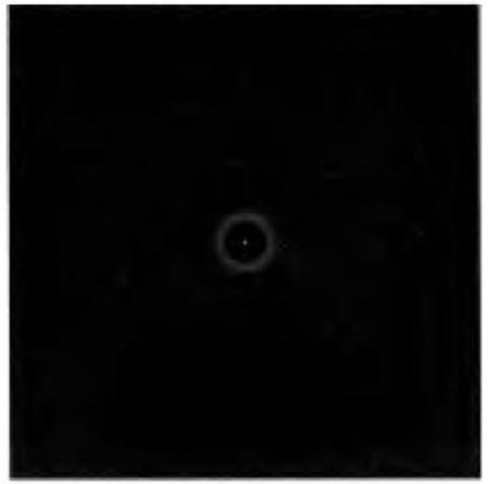


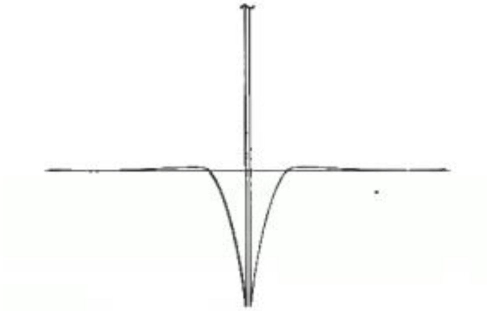


Фильтр Баттерворта

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D_0 / D(u,v) \right]^{2n}}$$

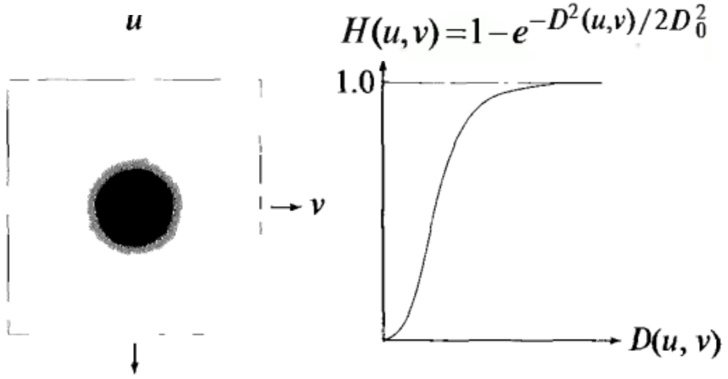


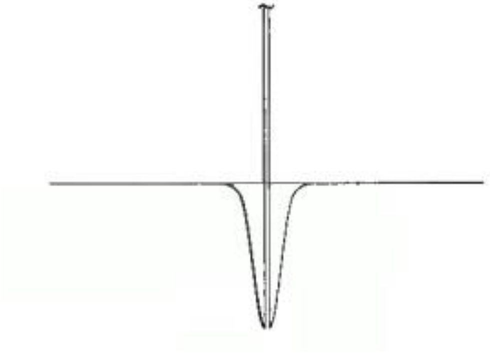




Гауссовский фильтр

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

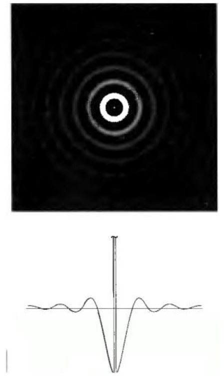


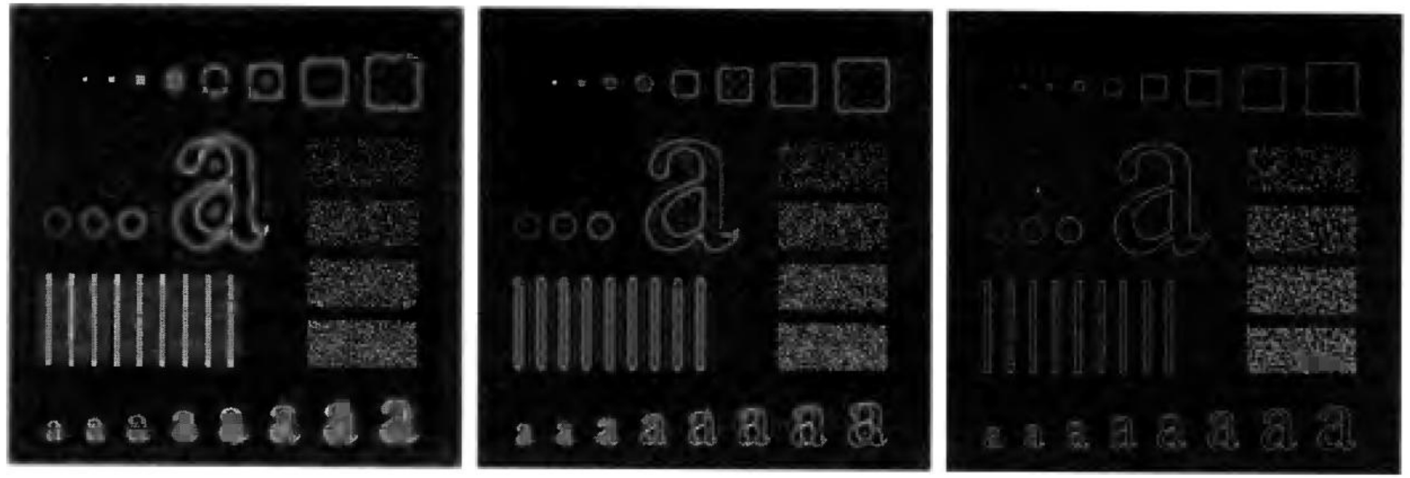


Фильтры высоких частот

Идеальный фильтр

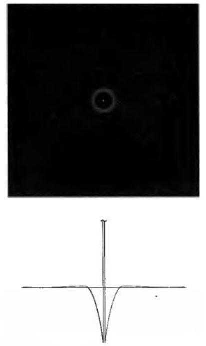
$$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{при } D(u,v)\le D_0\\ 1 & \text{при } D(u,v)>D_0\end{cases}$$

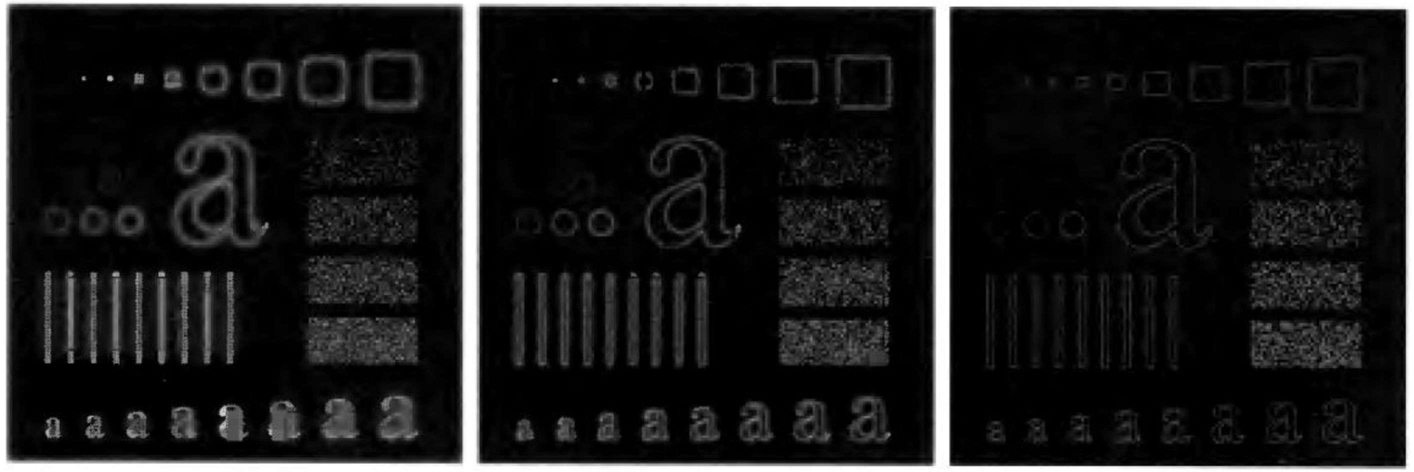




Фильтр Баттерворта

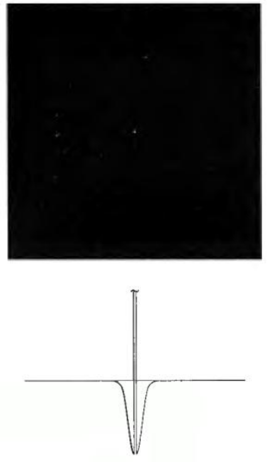
$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D_0/D(u,v)\right]^{2n}}$$

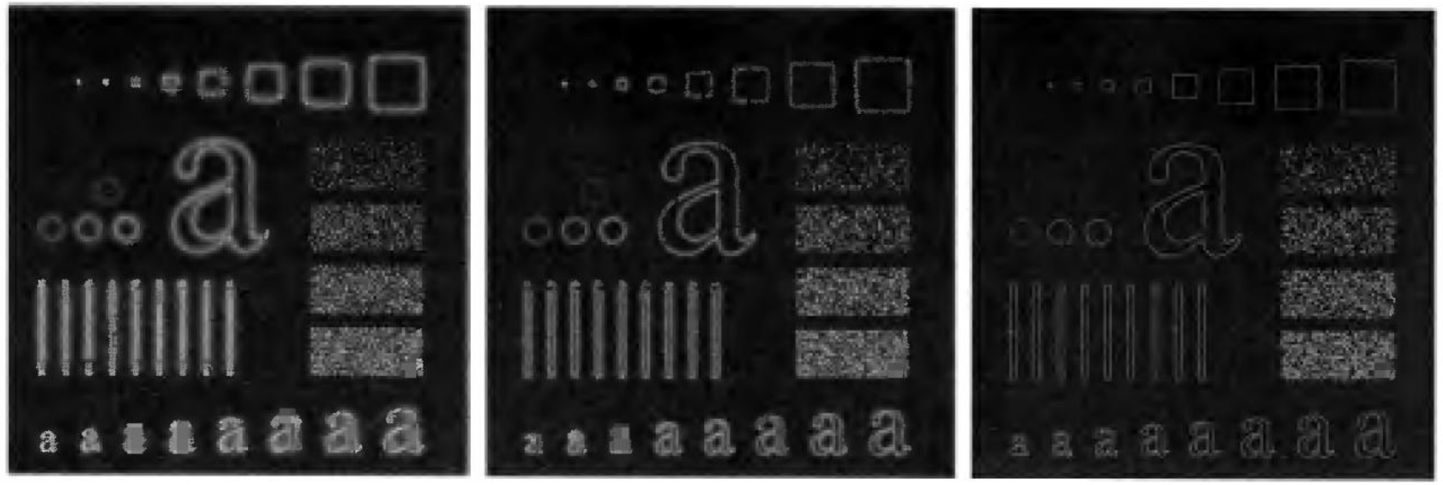




Гауссовский фильтр

$$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

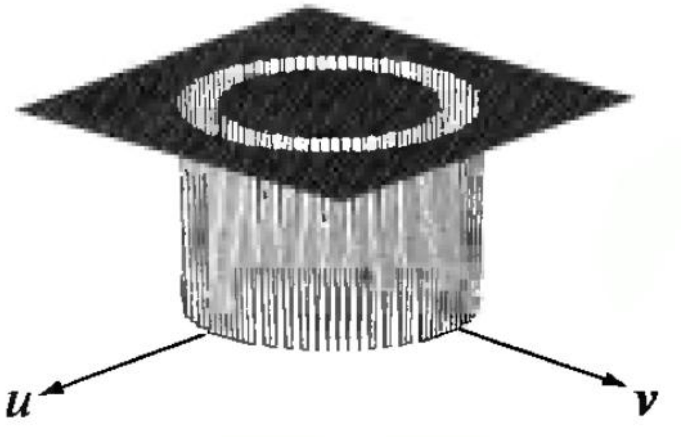




Режекторные фильтры

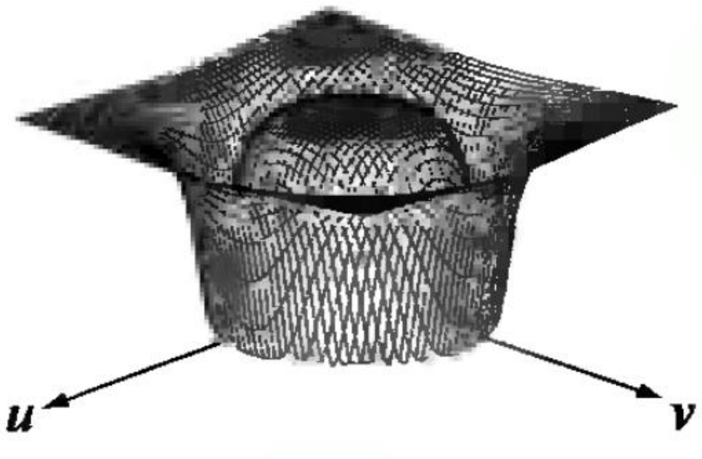
Идеальный фильтр

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{при } D(u,v)<D_0-\dfrac{W}{2};\\ 0 & \text{при } D_0-\dfrac{W}{2}\le D(u,v)\le D_0+\dfrac{W}{2};\\ 1 & \text{при } D(u,v)>D_0+\dfrac{W}{2},\end{cases}$$



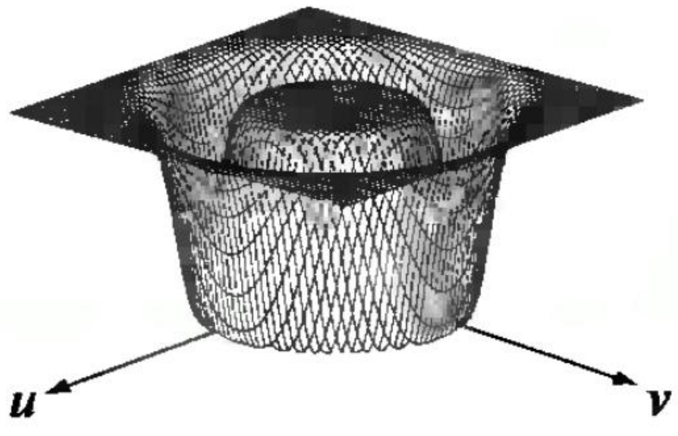
Фильтр Баттерворта

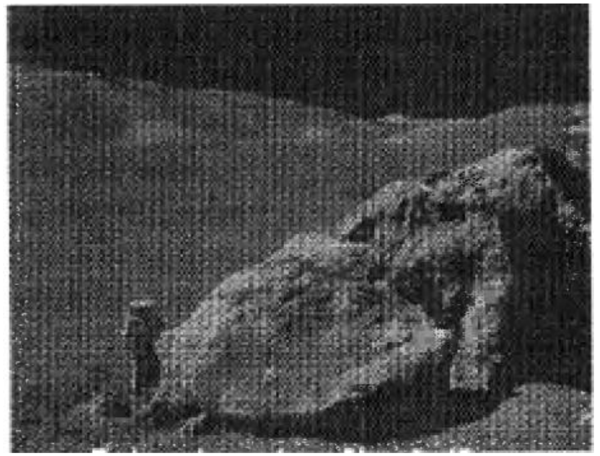
$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\dfrac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-D_0^2}\right]^{2n}}$$



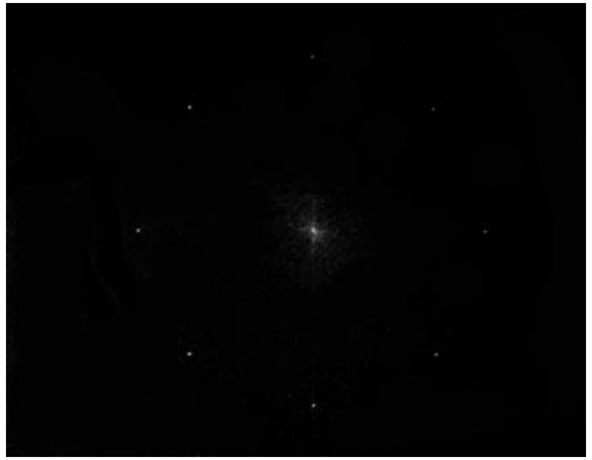
Гауссовский фильтр

$$H(u,v)=1-e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{D^2(u,v)-D_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$$

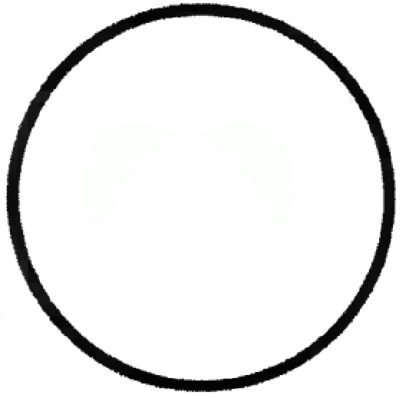




$\mathscr{F}$



$\times$



$\mathscr{F}^{-1}$

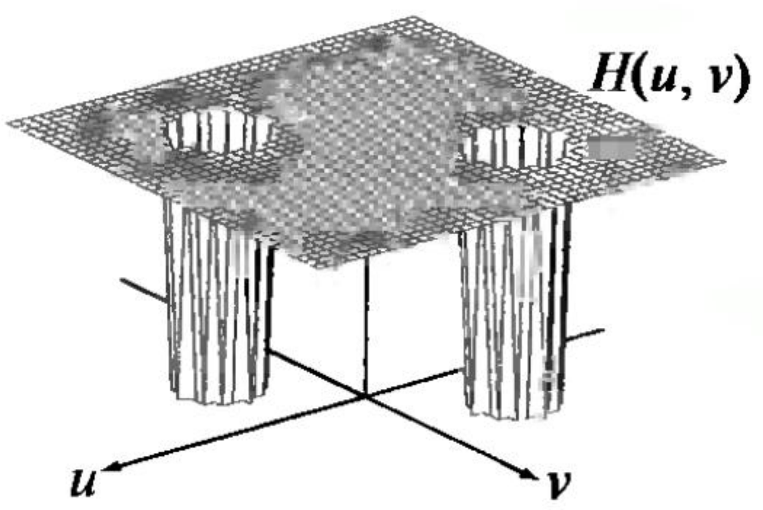
Узкополосные режекторные фильтры

Идеальный фильтр

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{при, } D_1(u,v)\le D_0 \text{ или } D_2(u,v)\le D_0\,;\\ 1 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

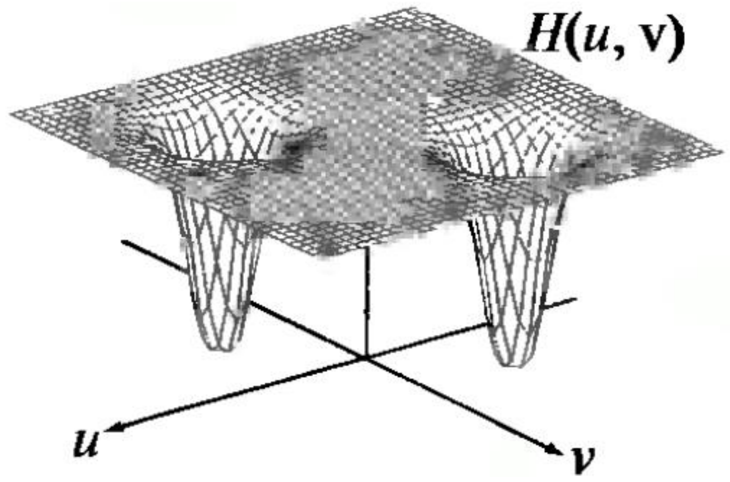
$$D_1(u,v)=\left[(u-M/2-u_0)^2+(v-N/2-v_0)^2\right]^{1/2},$$

$$D_2(u,v)=\left[(u-M/2+u_0)^2+(v-N/2+v_0)^2\right]^{1/2}$$



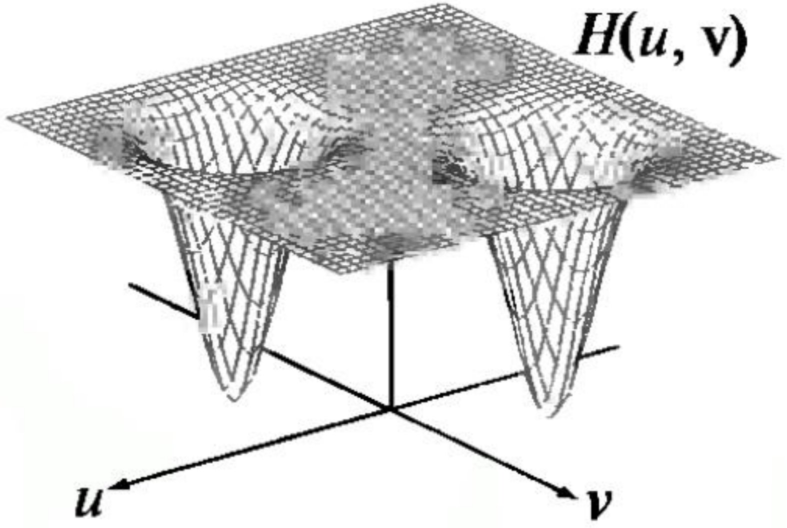
Фильтр Баттерворта

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\dfrac{D_0^2}{D_1(u,v)D_2(u,v)}\right]^n},$$



Гауссовский фильтр

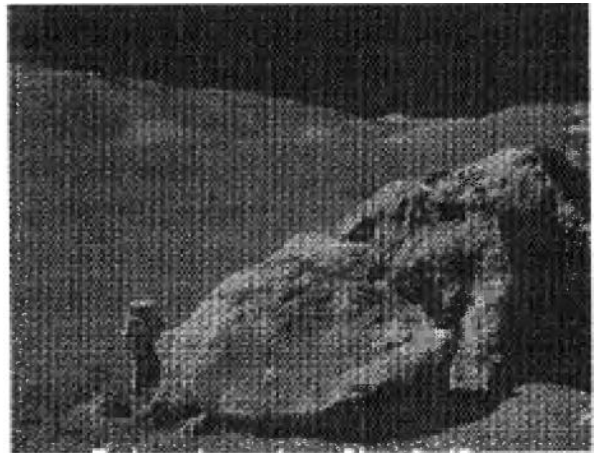
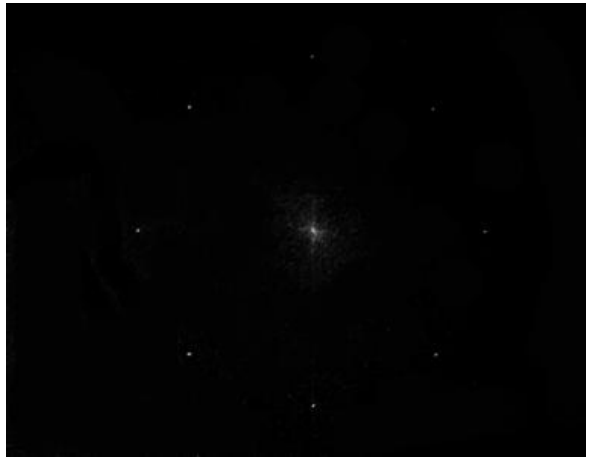
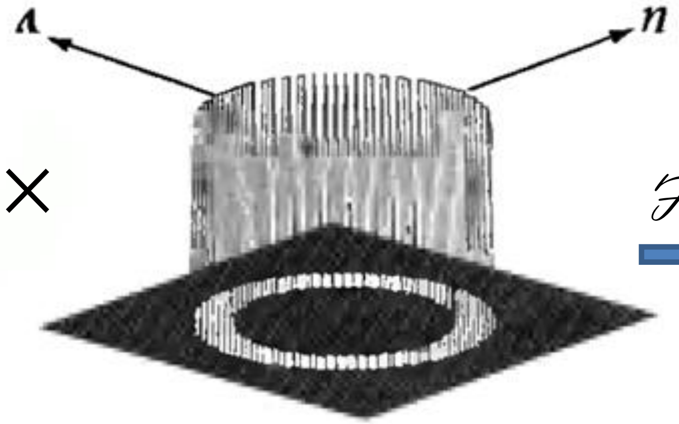
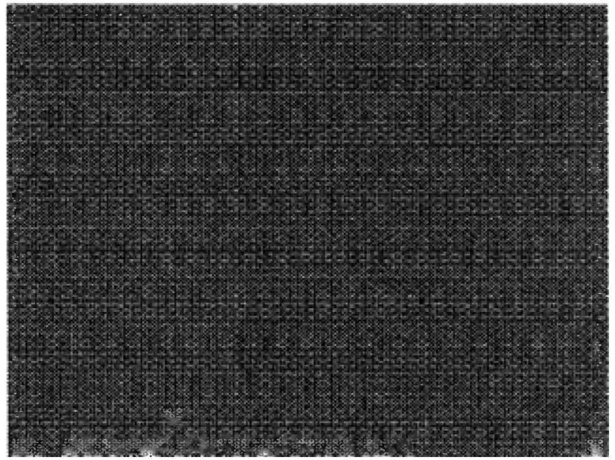
$$H(u,v)=1-e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{D_1(u,v)D_2(u,v)}{D_0^2}\right]}$$



Полосовые фильтры

(пропускают, а не подавляют заданную полосу частот)

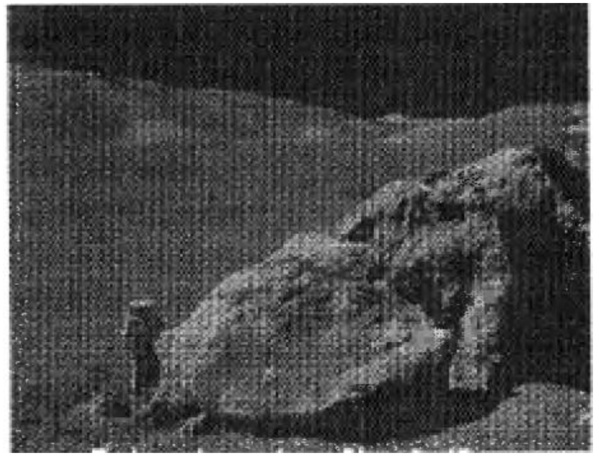
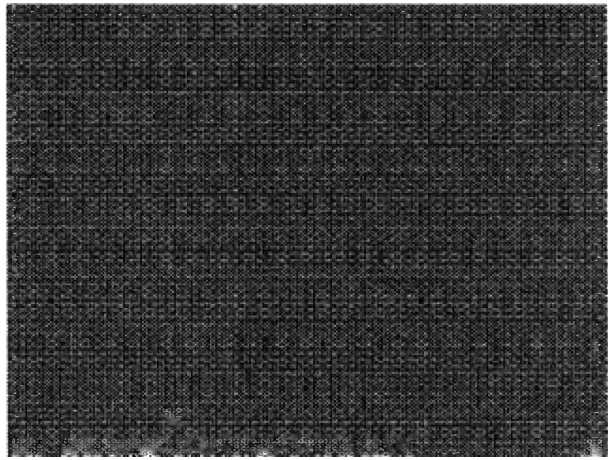
$$H_{bp}(u,v)=1-H_{br}(u,v)$$

 $\xrightarrow{\mathscr{F}}$  $\times$  $\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}}$ 

Пусть модель наблюдения: $g(x,y)=f(x,y)+n(x,y)$

$$f(x,y)=g(x,y)-\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left\{g(x,y)\right\}H_{bp}(\omega_x,\omega_y)\right\}=g(x,y)-\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left\{f(x,y)+h(x,y)\right\}H_{bp}(\omega_x,\omega_y)\right\}=g(x,y)-\mathscr{F}^{-1}\left\{\left(F(\omega_x,\omega_y)+N(\omega_x,\omega_y)\right)\left(1-H_{br}(\omega_x,\omega_y)\right)\right\}=$$

$$=g(x,y)-\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega_x,\omega_y)+N(\omega_x,\omega_y)-F(\omega_x,\omega_y)H_{br}(\omega_x,\omega_y)+N(\omega_x,\omega_y)H_{br}(\omega_x,\omega_y)\right\}=g(x,y)-\mathscr{F}^{-1}\left\{N(\omega_x,\omega_y)\right\}$$

 $-$  $=$ 

Конструирование фильтра на основе оценивания параметров шума (полосовым фильтром)

Пусть модель наблюдения:

$$g(x,y) = f(x,y) + n(x,y)$$

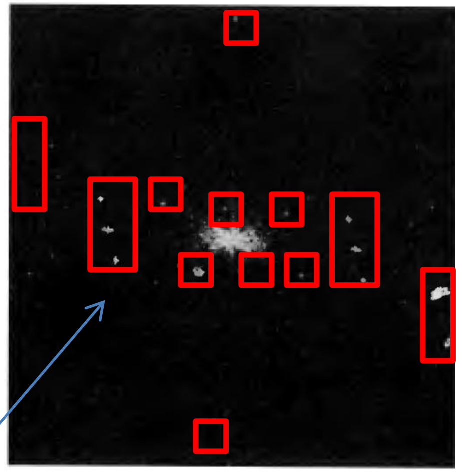
Пусть $\eta(x,y) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{g}(\omega_x,\omega_y)\hat{n}(\omega_x,\omega_y)\right\}$ - оценка шумовой составляющей по спектру $\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$

где $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ - полосовой фильтр (маска) пропускающий частоты в окрестности шумовых компонент.

Модель реконструкции: $\tilde{f}(x,y) = g(x,y) - w(x,y)\eta(x,y)$

Весовая функция

$\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$



Шум со сложной структурой спектра $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ содержит несколько периодических компонент, интерференция

Дискретные фильтры

Конструирование фильтра на основе оценивания его параметров шума

Пусть модель наблюдения:

$$g(x,y) = f(x,y) + n(x,y)$$

Пусть $\eta(x,y) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{g}(\omega_x,\omega_y)\hat{n}(\omega_x,\omega_y)\right\}$ - оценка шумовой составляющей по спектру $\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$

где $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ - полосовой фильтр (маска) пропускающий частоты в окрестности шумовых компонент.

Модель реконструкции: $\tilde{f}(x,y) = g(x,y) - w(x,y)\eta(x,y)$

Весовая функция

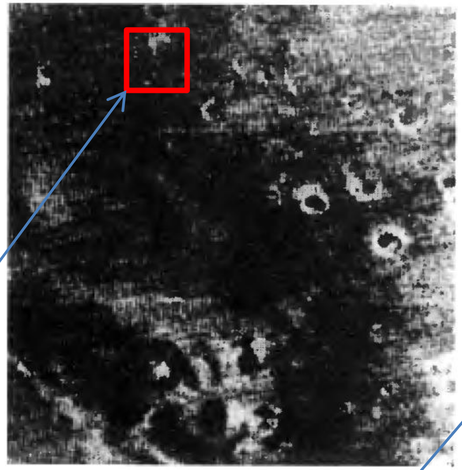
Постановка задачи (условие гладкости):

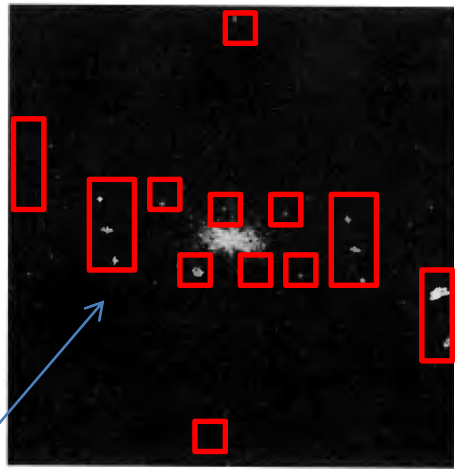
$$\sigma^2(x,y) = M\left[\left(\tilde{f}(x,y) - \bar{\tilde{f}}(x,y)\right)\right]^2_{\Omega_{x,y}} \to \min_{\substack{w(x,y)\\ x,y\in\Omega_{x,y}}}$$

$\Omega_{x,y} = (2a+1)\times(2b+1)$

окрестность точки (x,y)

$\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$





Шум со сложной структурой спектра $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ содержит несколько периодических компонент, интерференция

Конструирование фильтра на основе оценивания его параметров шума

Пусть модель наблюдения:

$$g(x,y)=f(x,y)+n(x,y)$$

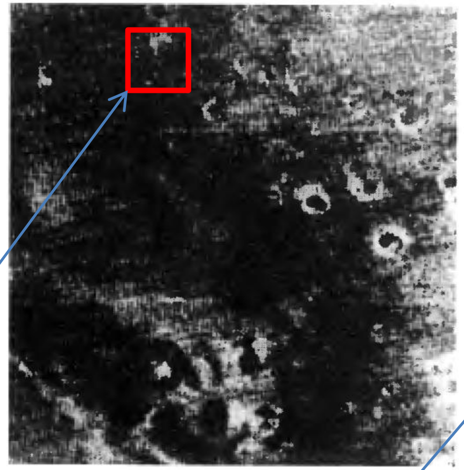
Пусть $\eta(x,y)=\mathscr{F}^{-1}\{\hat{g}(\omega_x,\omega_y)\hat{n}(\omega_x,\omega_y)\}$ - оценка шумовой составляющей по спектру $\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$

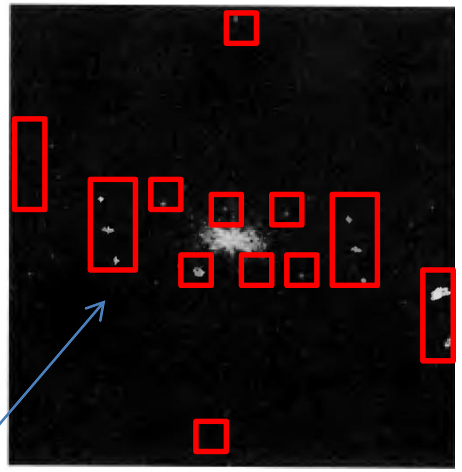
где $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ - полосовой фильтр (маска) пропускающий частоты в окрестности шумовых компонент.

Модель реконструкции: $\tilde{f}(x,y)=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)$

Весовая функция

$\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$





Шум со сложной структурой спектра $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ содержит несколько периодических компонент, интерференция

Постановка задачи (условие гладкости):

$$\sigma^2(x,y)=M\left[\left(\tilde{f}(x,y)-\bar{\tilde{f}}(x,y)\right)\right]^2_{\Omega_{x,y}} \to \min_{\substack{w(x,y)\\ x,y\in\Omega_{x,y}}}$$

$\Omega_{x,y}=(2a+1)\times(2b+1)$

окрестность точки (x,y)

Локальная дисперсия:

$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\left(\tilde{f}(x+s,y+t)-\bar{\tilde{f}}(x,y)\right)^2,$$

$$\bar{\tilde{f}}(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\tilde{f}(x+s,y+t)$$

- среднее в окрестности точки

$$\Rightarrow \sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\left(\left[g(x+s,y+t)-w(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t)\right]-\left[\bar{g}(x,y)-\overline{w(x,y)\eta(x,y)}\right]\right)^2$$

Дискретные фильтры

Конструирование фильтра на основе оценивания его параметров шума

Пусть $w(x,y)\sim const$ в $\Omega_{x,y}$: $w(x+s,y+t)=w(x,y),\ \ -a\le s\le a,\ \ -b\le t\le b$

$$\Omega_{x,y}=(2a+1)\times(2b+1)$$

$$\Rightarrow \overline{w(x,y)\eta(x,y)}=w(x,y)\bar{\eta}(x,y)$$

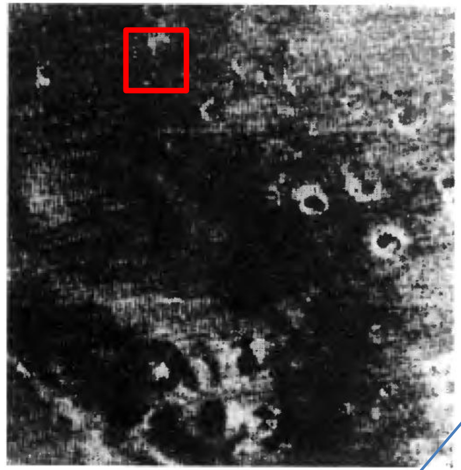
$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\big(\big[g(x+s,y+t)-w(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t)\big]-$$
$$-\big[\bar{g}(x,y)-w(x,y)\bar{\eta}(x,y)\big]\big)^2\to\min_{\substack{w(x,y)\\ x,y\in\Omega_{x,y}}}$$

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)}=0$$

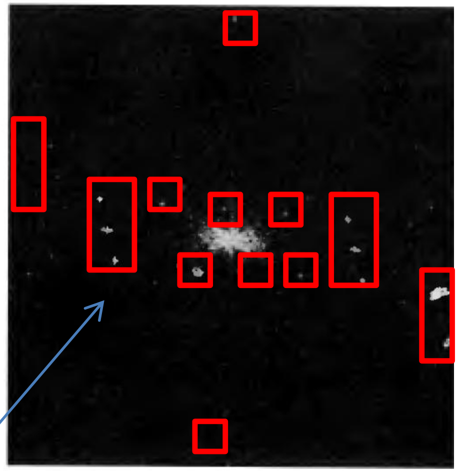
$$\Rightarrow w(x,y)=\frac{\overline{g(x,y)\eta(x,y)}-\bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\bar{\eta}^2(x,y)}$$

$$\tilde{f}(x,y)=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)=g(x,y)-\frac{\overline{g(x,y)\eta(x,y)}-\bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\bar{\eta}^2(x,y)}\eta(x,y)$$

$g(x,y)$

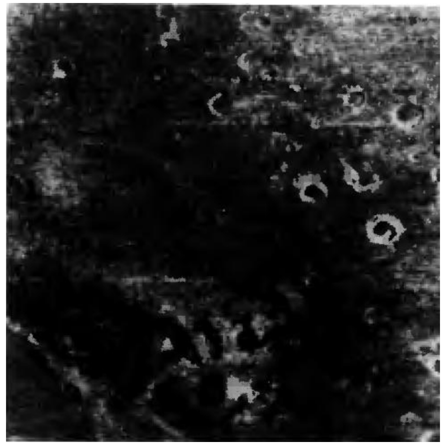


$\hat{g}(\omega_x,\omega_y)$

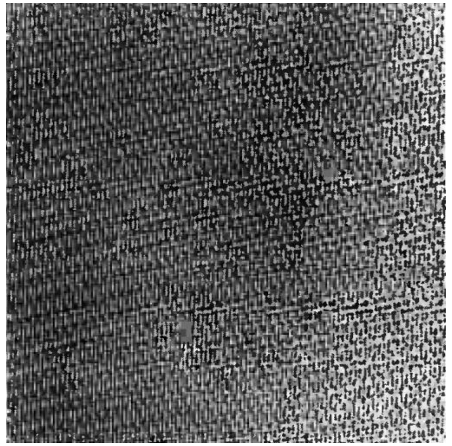


Шум со сложной структурой спектра $\hat{n}(\omega_x,\omega_y)$ содержит несколько периодических компонент, интерференция

$\tilde{f}(x,y)$



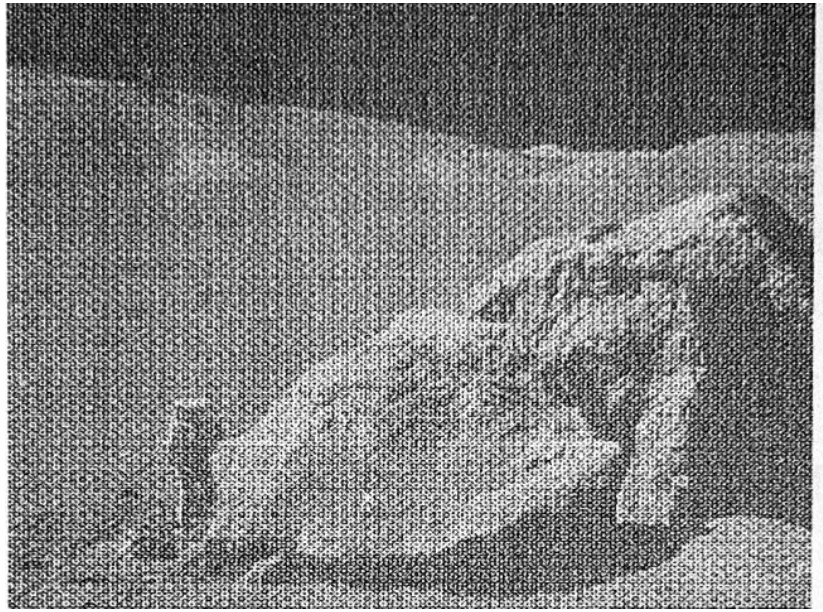
$\eta(x,y)$



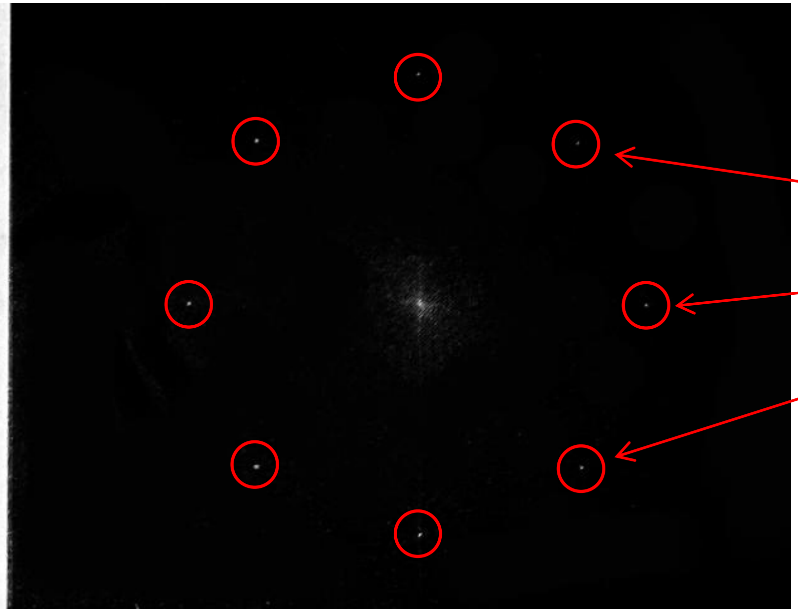
Прямое конструирование фильтра для применения в частотной области

Примеры реконструкции

$g(x,y)$



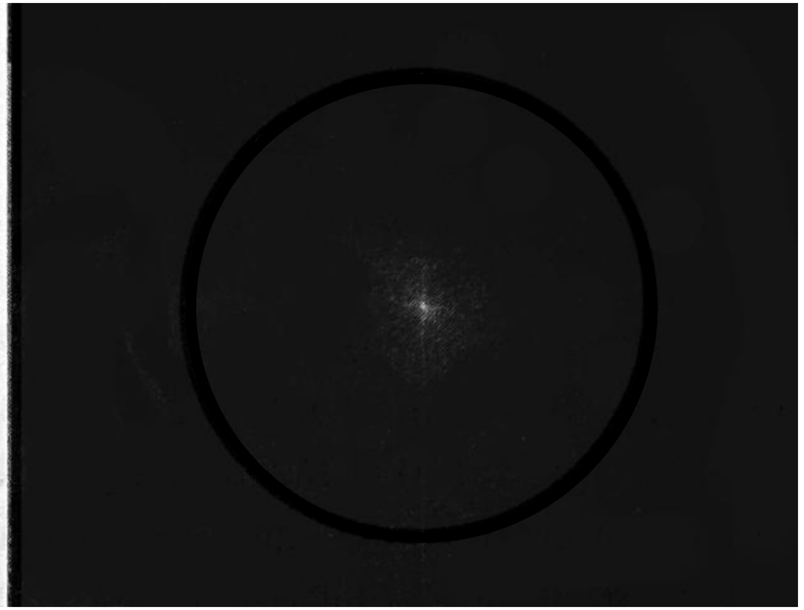
$G(\omega_x,\omega_y)$



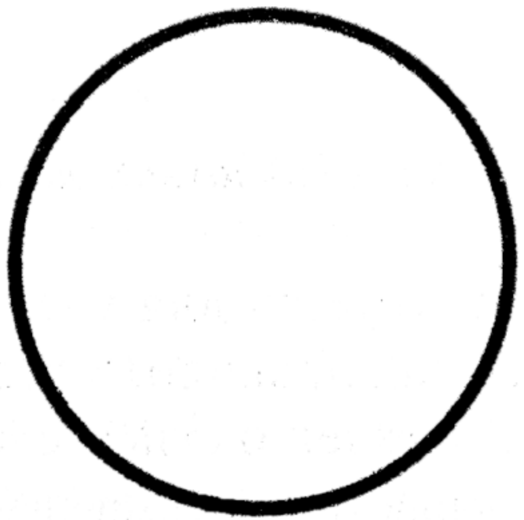
Пики в спектре от периодического шума (части частотной характеристики искажений)

$f(x,y)$

$F(\omega_x,\omega_y)=G(\omega_x,\omega_y)\cdot H_R(\omega_x,\omega_y)$



$H_R(\omega_x,\omega_y).$



Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Перев. с англ.— М.: Техносфера, 2006.

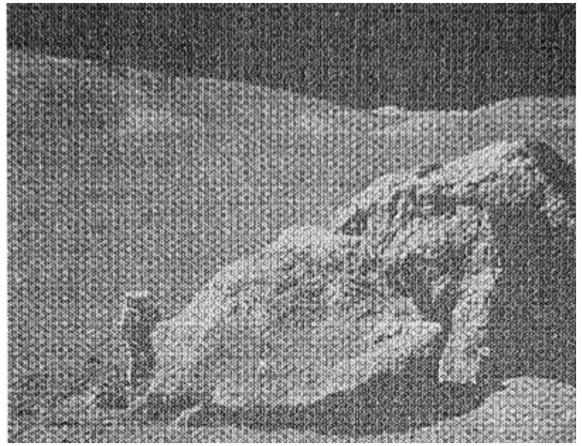
Спектральная модель канального механизма внимания

$$f(x,y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega_x,\omega_y) \to \boxed{H \cdot F} \to G(\omega_x,\omega_y) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g(x,y)$$

$H_R(\omega_x,\omega_y)$ - функция внимания, фильтрующая шум

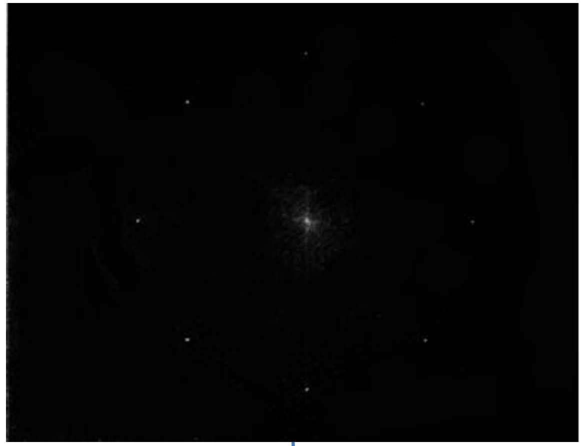
Реконструкция изображения и фильтрация шума как реализация канального **механизма внимания:**

$f(x,y)$



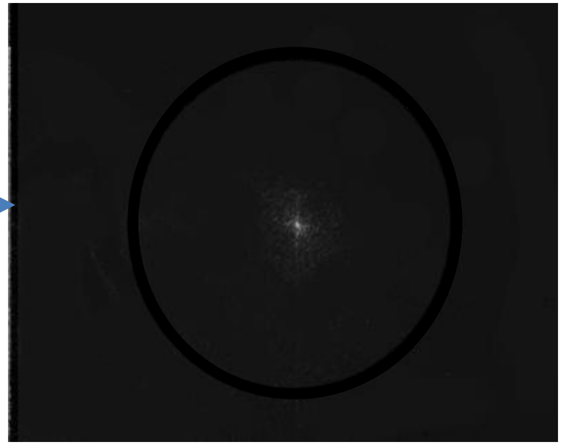
$\mathcal{F}$

$F(\omega_x,\omega_y)$



x

$G(\omega_x,\omega_y)$

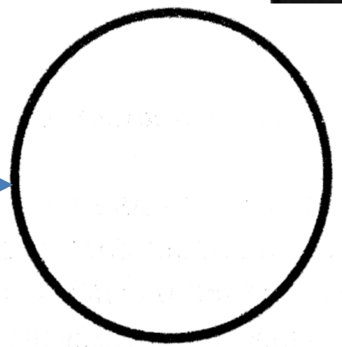


$\mathcal{F}^{-1}$

$g(x,y)$

$$F(\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Внимательный эксперт



$H(\omega_x,\omega_y)$

$$g(x,y) = \sum_{\omega_x=0}^{M-1}\sum_{\omega_y=0}^{N-1} G(\omega_x,\omega_y)e^{i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

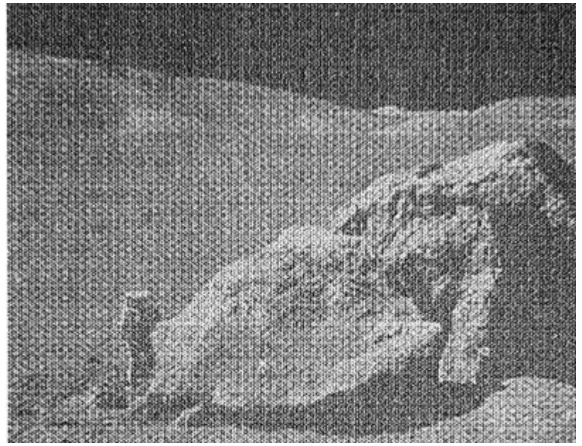
Спектральная модель канального механизма внимания

$$f(x,y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega_x,\omega_y) \longrightarrow \boxed{H \cdot F} \longrightarrow G(\omega_x,\omega_y) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g(x,y)$$

$H_R(\omega_x,\omega_y)$ - функция внимания, фильтрующая шум

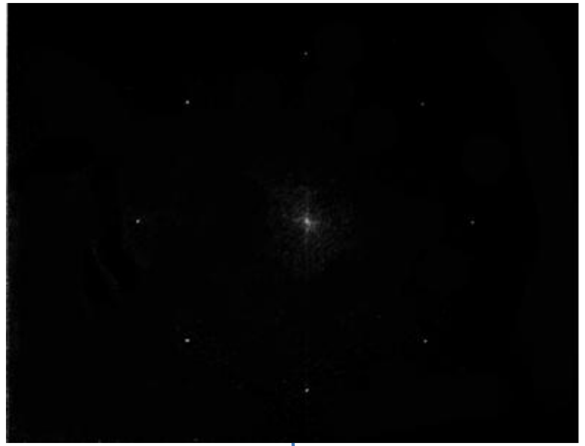
Реконструкция изображения и фильтрация шума как реализация канального **механизма внимания:**

$f(x,y)$



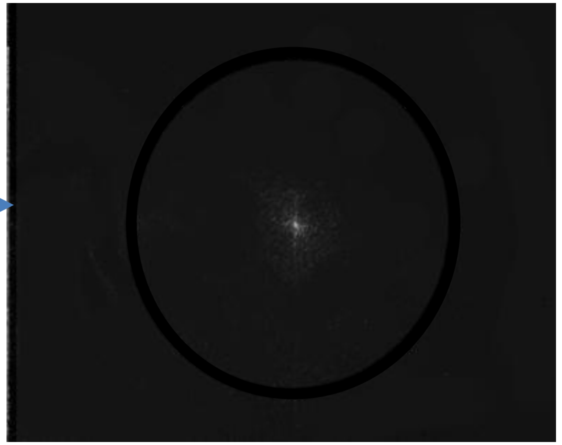
$\mathcal{F}$

$F(\omega_x,\omega_y)$



x

$G(\omega_x,\omega_y)$

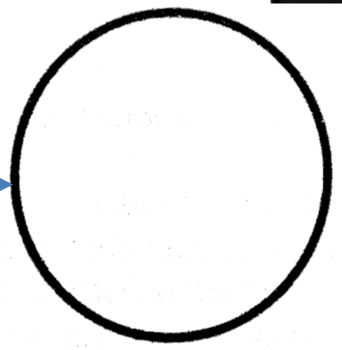


$\mathcal{F}^{-1}$

$g(x,y)$

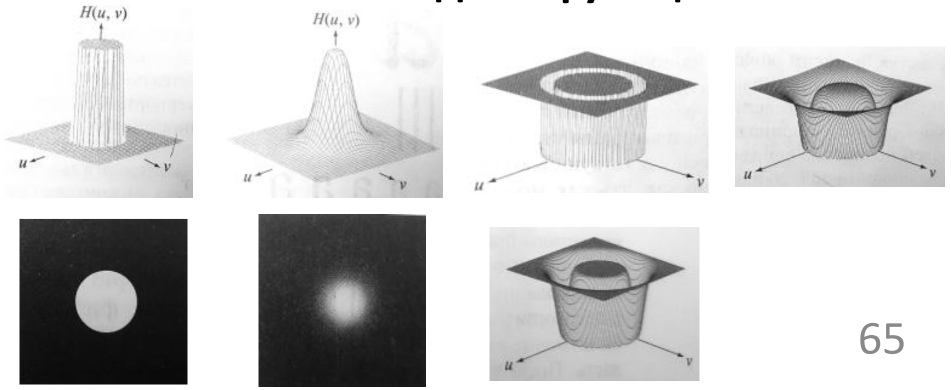
$$F(\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi\left(\frac{\omega_x x}{M}+\frac{\omega_y y}{N}\right)}$$

Внимательный эксперт

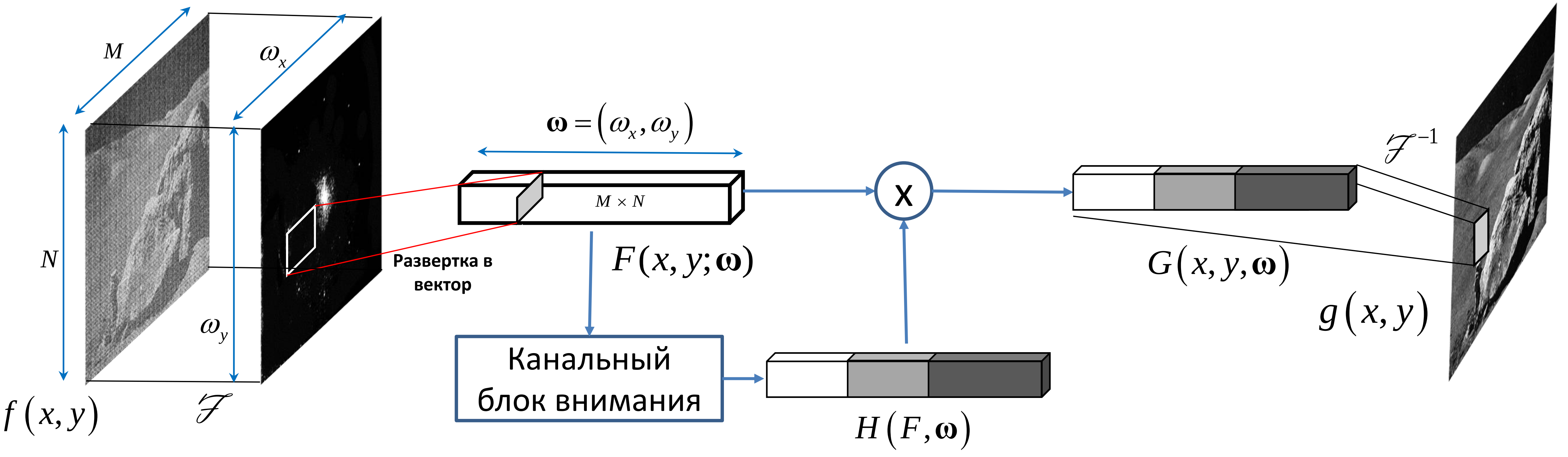


$H(\omega_x,\omega_y)$

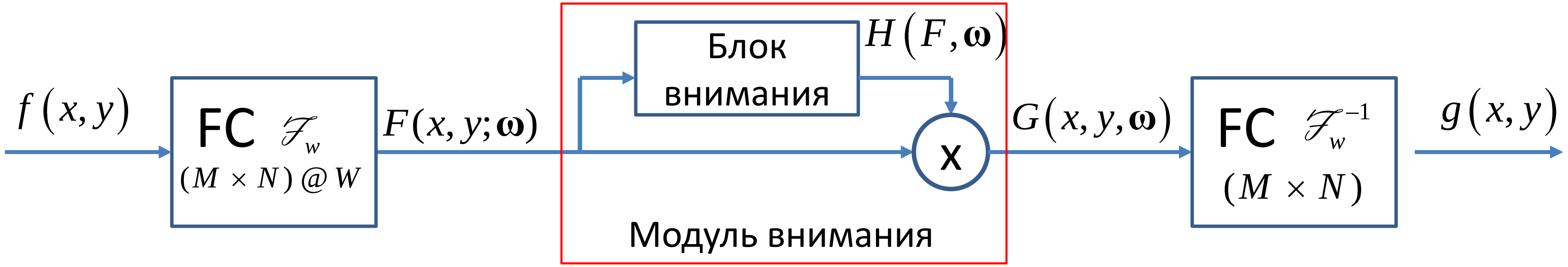
Аналитические модели функции внимания:



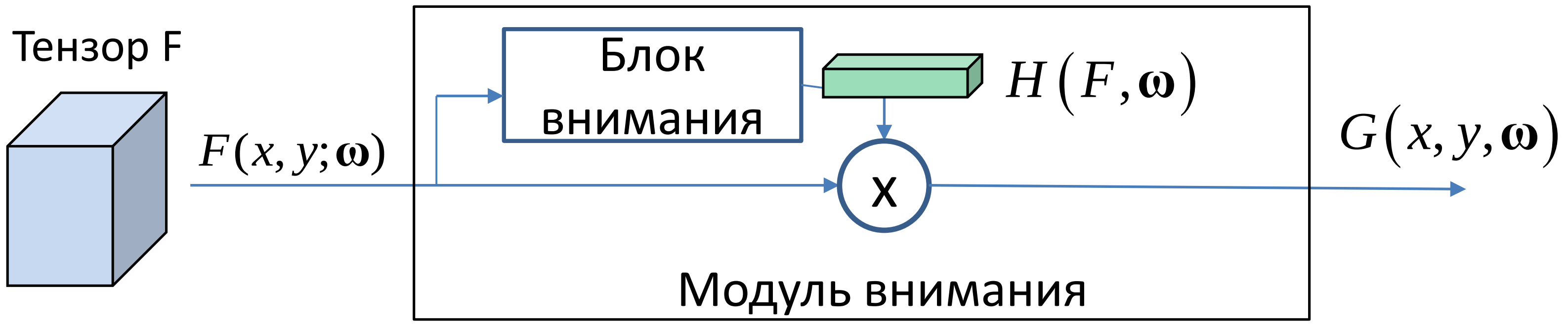
Тензорная реализация фильтрации Фурье с канальным механизмом внимания



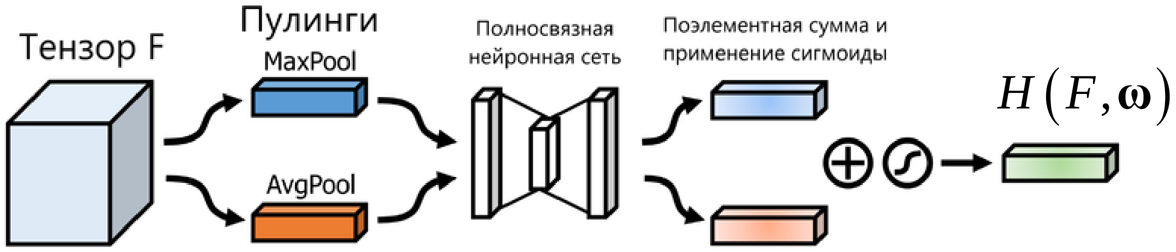
$$Loss\big(g(x,y)\big) = SNR\big(g(x,y)\big) \to \max_{H(\omega)}$$

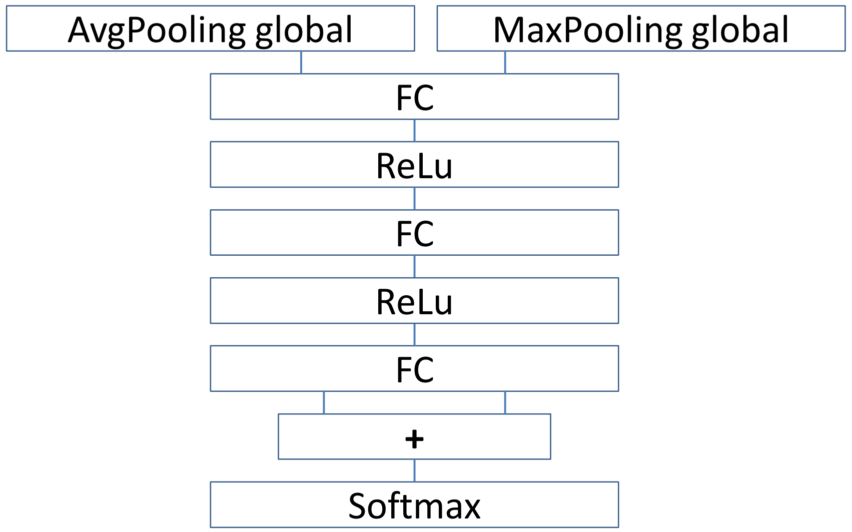


Нейросетевые реализации канального механизма внимания

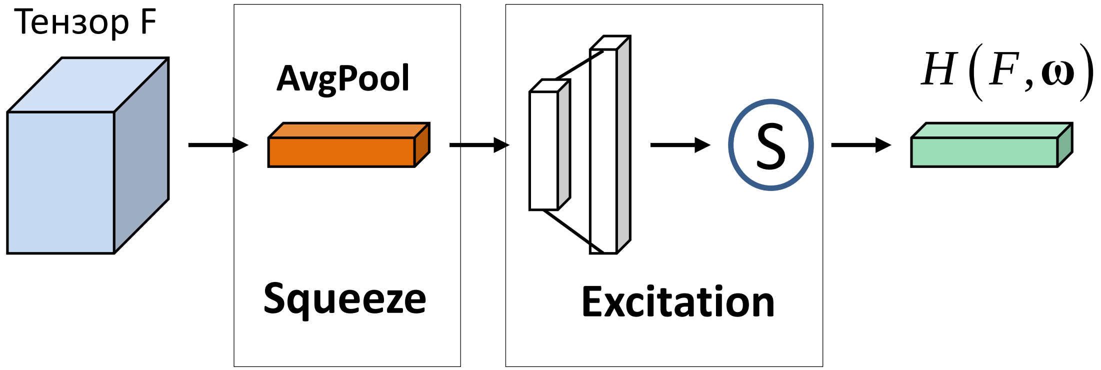


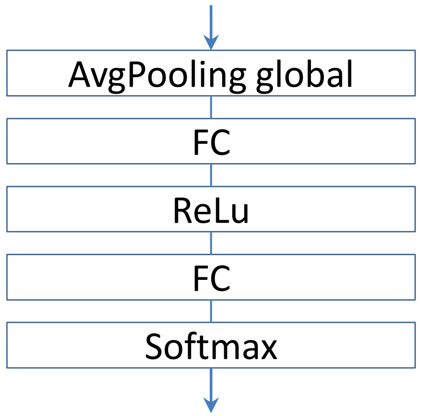
Пример реализации канального модуля внимания





Squeeze-and-Excitation модуль (SE)





S Woo, J Park, JY Lee CBAM: Convolutional Block Attention Module. https://arxiv.org/pdf/1807.06521.pdf