

# Часть I

## Конечные поля или поля Галуа.

I

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

Поле  $GF(p)$ 

- $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел евклидово (целостное унитарное + возможно **деление с остатком**  $\Rightarrow$  существование НОД!),
- $p$  — простое число.
- $(p) = \{np \mid n \in \mathbb{Z}\} = p\mathbb{Z} = \{0, \pm p, \pm 2p, \dots\}$  — *идеал*
- $\mathbb{Z}/(p) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$  — **кольцо вычетов по модулю этого идеала** = классы остатков от деления на  $p$ :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{0} = 0 + p\mathbb{Z}, \\ \bar{1} = 1 + p\mathbb{Z}, \\ \dots \dots \dots \\ \overline{p-1} = (p-1) + p\mathbb{Z}. \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{p-1}.$$

Черту над символами классов вычетов часто не ставят.

Поле  $GF(p)$ 

- $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел евклидово (целостное унитарное + возможно **деление с остатком**  $\Rightarrow$  существование НОД!),
- $p$  — простое число.
- $(p) = \{np \mid n \in \mathbb{Z}\} = p\mathbb{Z} = \{0, \pm p, \pm 2p, \dots\}$  — *идеал*
- $\mathbb{Z}/(p) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$  — **кольцо вычетов по модулю этого идеала** = классы остатков от деления на  $p$ :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{0} = 0 + p\mathbb{Z}, \\ \bar{1} = 1 + p\mathbb{Z}, \\ \dots \dots \dots \\ \overline{p-1} = (p-1) + p\mathbb{Z}. \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{p-1}.$$

Черту над символами классов вычетов часто не ставят.

Поскольку  $p$  — простое, то  $\mathbb{Z}/(p)$  — не просто кольцо, а **поле** (возможно деление без остатка на любой ненулевой элемент). Это простейшее *поле Галуа*, обозначение —  $\mathbb{F}_p$  или  $GF(p)$ ; все операции в нём — по  $\text{mod } p$ .

Поле  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$  и факторкольцо  $\mathbb{Z}/(4)$  $\mathbb{F}_3 :$ 

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Поле  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$  и факторкольцо  $\mathbb{Z}/(4)$ 

$$\mathbb{F}_3 :$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$\mathbb{Z}/(4) :$$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Дважды два равно нулю!

Поле  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$  и факторкольцо  $\mathbb{Z}/(4)$ 

$$\mathbb{F}_3 :$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$\mathbb{Z}/(4) :$$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Дважды два равно нулю!

Однако, поле из 4-х элементов существует...

## Характеристика поля

Пусть  $k$  — произвольное поле,  $1$  — единица  $k$ . Складываем их:

$$1 = 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad \dots$$



## Характеристика поля

Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $1$  — единица  $\mathbb{k}$ . Складываем их:

$1 = 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad \dots$  В конечном поле всегда найдётся

**первое**  $k$  такое, что  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ раз}} = \mathbf{0}$ . Тогда

$k =$  порядок аддитивной группы поля  $\mathbb{k} =$

$=$  *характеристика поля*  $\mathbb{k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{char } \mathbb{k}$

## Характеристика поля

Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $1$  — единица  $\mathbb{k}$ . Складываем их:

$1 = 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad \dots$  В конечном поле всегда найдётся

**первое**  $k$  такое, что  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ раз}} = \mathbf{0}$ . Тогда

$k =$  порядок аддитивной группы поля  $\mathbb{k} =$

$=$  *характеристика поля*  $\mathbb{k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{char } \mathbb{k}$

$\{0, 1, 2, \dots, \text{char } \mathbb{k} - 1\}$  — минимальное подполе в поле  $\mathbb{k}$ .

## Характеристика поля

Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $1$  — единица  $\mathbb{k}$ . Складываем их:

$1 = 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad \dots$  В конечном поле всегда найдётся

**первое**  $k$  такое, что  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ раз}} = \mathbf{0}$ . Тогда

$k =$  порядок аддитивной группы поля  $\mathbb{k} =$

$=$  *характеристика поля*  $\mathbb{k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{char } \mathbb{k}$

$\{0, 1, 2, \dots, \text{char } \mathbb{k} - 1\}$  — минимальное подполе в поле  $\mathbb{k}$ .

Если все суммы вида  $1 + \dots + 1$  различны, то  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ .

Примеры:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  — поля нулевой (или бесконечной :) характеристики.

## Бесконечное поле с положительной характеристикой

## Бесконечное поле с положительной характеристикой

$\mathbb{k}$  — произвольное (конечное или бесконечное) поле. Построим:

- 1  $\mathbb{k}[x]$  — кольцо многочленов от **формальной** переменной  $x$ :  
 $\{P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$ ;  $\mathbb{k}[x] \leftrightarrow \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Бесконечное поле с положительной характеристикой

$\mathbb{k}$  — произвольное (конечное или бесконечное) поле. Построим:

- 1  $\mathbb{k}[x]$  — кольцо многочленов от **формальной** переменной  $x$ :  
 $\{P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$ ;  $\mathbb{k}[x] \leftrightarrow \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- 2  $\mathbb{k}(x)$  — поле рациональных функций над  $\mathbb{k}$

## Бесконечное поле с положительной характеристикой

$\mathbb{k}$  — произвольное (конечное или бесконечное) поле. Построим:

- ①  $\mathbb{k}[x]$  — кольцо многочленов от **формальной** переменной  $x$ :  
 $\{P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$ ;  $\mathbb{k}[x] \leftrightarrow \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- ②  $\mathbb{k}(x)$  — поле рациональных функций над  $\mathbb{k}$ ; в нём:

**элементы** — “дроби”  $P/Q$  (если  $Q \neq 0$ ), где  $P, Q \in \mathbb{k}[x]$ ;

**умножение** —  $(P/Q) \cdot (U/V) = (PU)/(QV)$ ;

**эквивалентность** —  $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$ , если  $P_1Q_2 = P_2Q_1$ ;

**сложение** — дроби можно приводить к общему знаменателю и складывать:

$$P/Q + U/V = (PV)/(QV) + (QU)/(QV) = (PV + QU)/(QV);$$

**включение** — Поскольку  $\mathbb{k}[x] \subset \mathbb{k}(x)$ , то каждый многочлен  $P$  отождествляется с  $P/1$ .

## Бесконечное поле с положительной характеристикой

$\mathbb{k}$  — произвольное (конечное или бесконечное) поле. Построим:

- ①  $\mathbb{k}[x]$  — кольцо многочленов от **формальной** переменной  $x$ :  
 $\{P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$ ;  $\mathbb{k}[x] \leftrightarrow \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- ②  $\mathbb{k}(x)$  — поле рациональных функций над  $\mathbb{k}$ ; в нём:

**элементы** — “дроби”  $P/Q$  (если  $Q \neq 0$ ), где  $P, Q \in \mathbb{k}[x]$ ;

**умножение** —  $(P/Q) \cdot (U/V) = (PU)/(QV)$ ;

**эквивалентность** —  $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$ , если  $P_1Q_2 = P_2Q_1$ ;

**сложение** — дроби можно приводить к общему знаменателю и складывать:

$$P/Q + U/V = (PV)/(QV) + (QU)/(QV) = (PV + QU)/(QV);$$

**включение** — Поскольку  $\mathbb{k}[x] \subset \mathbb{k}(x)$ , то каждый многочлен  $P$  отождествляется с  $P/1$ .

Если в качестве  $\mathbb{k}$  взять конечное поле  $\mathbb{F}_p$ , то  $\mathbb{F}_p(x)$  — **бесконечное поле положительной характеристики  $p$** .



## Сильное упрощение вычислений в поле положительной характеристики

### Лемма

*В поле характеристики  $p > 0$  выполнено тождество*

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

## Сильное упрощение вычислений в поле положительной характеристики

### Лемма

В поле характеристики  $p > 0$  выполнено тождество

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

### Доказательство

В любом коммутативном кольце верна формула для бинома

$$(a + b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + \dots + C_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p.$$

Но при  $i = 1, \dots, p - 1$  числитель коэффициента  $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$  делится на  $p$ , а знаменатель — нет,  $\therefore C_p^i \equiv_p 0$ .

## Сильное упрощение вычислений в поле положительной характеристики

### Лемма

В поле характеристики  $p > 0$  выполнено тождество

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

### Доказательство

В любом коммутативном кольце верна формула для бинома

$$(a + b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + \dots + C_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p.$$

Но при  $i = 1, \dots, p - 1$  числитель коэффициента  $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$  делится на  $p$ , а знаменатель — нет,  $\therefore C_p^i \equiv_p 0$ .

### Следствие

В поле характеристики  $p > 0$  справедливо  $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ .

Мультипликативная группа и примитивный элемент поля  $\mathbb{F}_p$ 

$\mathbb{F}_p^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  — мультипликативная группа поля  $\mathbb{F}_p$ .

## Мультипликативная группа и примитивный элемент поля $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_p^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  — мультипликативная группа поля  $\mathbb{F}_p$ .

### Утверждение

$\mathbb{F}_p^*$  — циклическая группа порядка  $p - 1$  по умножению.

## Мультипликативная группа и примитивный элемент поля $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_p^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  — мультипликативная группа поля  $\mathbb{F}_p$ .

### Утверждение

$\mathbb{F}_p^*$  — циклическая группа порядка  $p - 1$  по умножению.

Как любая конечная циклическая группа,  $\mathbb{F}_p^*$  содержит *генератор* = *примитивный элемент*  $\alpha$ :

- любой элемент  $\beta \in \mathbb{F}_p^*$  является некоторой его натуральной степенью:  $\beta = \alpha^i$ ,  $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ ;
- причём  $1 = \alpha^{p-1}$  — т.е.  $\alpha^i \neq 1$  для  $1 \leq i \leq p - 2$ .

## Мультипликативная группа и примитивный элемент поля $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_p^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  — мультипликативная группа поля  $\mathbb{F}_p$ .

### Утверждение

$\mathbb{F}_p^*$  — циклическая группа порядка  $p - 1$  по умножению.

Как любая конечная циклическая группа,  $\mathbb{F}_p^*$  содержит *генератор* = *примитивный элемент*  $\alpha$ :

- любой элемент  $\beta \in \mathbb{F}_p^*$  является некоторой его натуральной степенью:  $\beta = \alpha^i, i \in \{1, \dots, p - 1\}$ ;
- причём  $1 = \alpha^{p-1}$  — т.е.  $\alpha^i \neq 1$  для  $1 \leq i \leq p - 2$ .

### Утверждение

Группа  $\mathbb{F}_p^*$  имеет  $\varphi(p - 1)$  примитивных элементов.

## Функция Эйлера

$\varphi(n)$  — *функция Эйлера* — количество чисел из интервала  $[1, \dots, n - 1]$ , взаимно простых с  $n$ :

$$\varphi(1) = 1 \text{ (по определению), } \varphi(2) = 1, \varphi(3) = \varphi(4) = 2, \\ \varphi(5) = 4, \varphi(6) = |\{1, 5\}| = 2, \dots$$



## Функция Эйлера

$\varphi(n)$  — *функция Эйлера* — количество чисел из интервала  $[1, \dots, n - 1]$ , взаимно простых с  $n$ :

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 \text{ (по определению), } \varphi(2) = 1, \varphi(3) = \varphi(4) = 2, \\ \varphi(5) &= 4, \varphi(6) = |\{1, 5\}| = 2, \dots\end{aligned}$$

Свойства ( $p$  — простое число):

- $\varphi(n) \leq n - 1$  и  $\varphi(p) = p - 1$ ;
- $\varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n)$ , т.е.  $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p - 1)$ ;
- $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$ , где  $d = \text{НОД}(m, n)$ ,  
откуда: если  $m$  и  $n$  **взаимно просты**, то  
 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$  ( $\varphi(\cdot)$  — *мультипликативная функция*).

Пример:  $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = \varphi(3)\varphi(5) = (3 - 1)(5 - 1) = 8$ ,  
 $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot \varphi(2) = 8$ .

Первые 99 значений  $\varphi(\cdot)$  и степени генератора

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Первые 99 значений  $\varphi(\cdot)$  и степени генератора

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Пусть в  $\mathbb{F}_p^*$   $\alpha$  — генератор;  $\alpha^{-1} = ?$

Первые 99 значений  $\varphi(\cdot)$  и степени генератора

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Пусть в  $\mathbb{F}_p^*$   $\alpha$  — генератор;  $\alpha^{-1} = ?$

$$\alpha^{p-1} = 1 \Rightarrow \alpha^p = \alpha^1 = \alpha \text{ и } \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha^{p-1} = \alpha^{p-2}.$$

Например, в  $\mathbb{F}_5$ :  $\alpha^{-1} =$

Первые 99 значений  $\varphi(\cdot)$  и степени генератора

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Пусть в  $\mathbb{F}_p^*$   $\alpha$  — генератор;  $\alpha^{-1} = ?$

$$\alpha^{p-1} = 1 \Rightarrow \alpha^p = \alpha^1 = \alpha \text{ и } \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha^{p-1} = \alpha^{p-2}.$$

Например, в  $\mathbb{F}_5$ :  $\alpha^{-1} = \alpha^3$ .

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p$ ?

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p$ ?

Если примарное разложение  $(p - 1) =$

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p$ ?

Если примарное разложение  $(p - 1) =$

**известно** — элемент  $\alpha \in \mathbb{F}_p$  будет примитивным iff  $\alpha^k \not\equiv_p 1$  для каждого делителя  $k$  числа  $p - 1$ .



## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p$ ?

Если примарное разложение  $(p - 1) =$

**известно** — элемент  $\alpha \in \mathbb{F}_p$  будет примитивным iff  $\alpha^k \not\equiv_p 1$  для каждого делителя  $k$  числа  $p - 1$ .

**неизвестно** — **эффективного алгоритма не найдено**  
(используют таблицы, вероятностные алгоритмы...).

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p$ ?

Если примарное разложение  $(p - 1) =$

**известно** — элемент  $\alpha \in \mathbb{F}_p$  будет примитивным iff  $\alpha^k \not\equiv_p 1$  для каждого делителя  $k$  числа  $p - 1$ .

**неизвестно** — **эффективного алгоритма не найдено**  
(используют таблицы, вероятностные алгоритмы...).

Если  $\alpha$  — примитивный элемент поля  $\mathbb{F}_p$ , то любой другой его примитивный элемент может быть получен как степень  $\alpha^k$ , где  $k$  — целое число, взаимно простое с  $p - 1$ .

## Неприводимые многочлены

### Утверждение

Кольцо многочленов  $\mathbb{k}[x]$  над полем  $\mathbb{k}$  — евклидово.

### Теорема

Каждый элемент евклидова кольца однозначно с точностью до перестановок разлагается в произведение простых (неразложимых) элементов.

Простые (неразложимые) элементы  $\mathbb{k}[x]$  — *неприводимые многочлены*.

### Вопросы для полей:

- 1 какие многочлены над ними неприводимы?
- 2 как находить неприводимые многочлены?

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ :

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ :

в поле  $\mathbb{C}$  — только многочлены 1-й степени;

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ :

в поле  $\mathbb{C}$  — только многочлены 1-й степени;

в поле  $\mathbb{R}$  —

- 1 многочлены 1-й степени,
- 2 многочлены 2-й степени с отрицательным дискриминантом;

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ , $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ :

в поле  $\mathbb{C}$  — только многочлены 1-й степени;

в поле  $\mathbb{R}$  —

- 1 многочлены 1-й степени,
- 2 многочлены 2-й степени с отрицательным дискриминантом;

в поле  $\mathbb{Q}$  — существуют неприводимые многочлены произвольной степени.

Далее нас будут интересовать неприводимые многочлены в **конечных полях**.

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ **Пример**

Дано: поле  $\mathbb{F}_2 = \langle \{0, 1\}, +_2, \cdot_2 \rangle$ .

Требуется: найти все неприводимые многочлены степеней 2, 3, 4 над ним.



Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ **Пример**

Дано: поле  $\mathbb{F}_2 = \langle \{0, 1\}, +_2, \cdot_2 \rangle$ .

Требуется: найти все неприводимые многочлены степеней 2, 3, 4 над ним.

Вторая степень:  $x^2 + ax + b$

Ясно, что  $b = 1$ , иначе  $x^2 + ax = x(x + a) \Rightarrow$  ищем неприводимый многочлен в виде  $x^2 + ax + 1$ .

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ **Пример**

Дано: поле  $\mathbb{F}_2 = \langle \{0, 1\}, +_2, \cdot_2 \rangle$ .

Требуется: найти все неприводимые многочлены степеней 2, 3, 4 над ним.

Вторая степень:  $x^2 + ax + b$

Ясно, что  $b = 1$ , иначе  $x^2 + ax = x(x + a) \Rightarrow$  ищем неприводимый многочлен в виде  $x^2 + ax + 1$ .

Если

$a = 0$ , то  $x^2 + 1 = (x + 1)^2$ ;

$a = 1$ , то получаем неприводимый многочлен.

$\therefore$  над  $\mathbb{F}_2$  существует **единственный неприводимый многочлен степени 2:**  $x^2 + x + 1$ .

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ 

Третья степень:  $x^3 + ax^2 + bx + 1$

(почему свободный член не равен нулю?)

Исключая, как сделано ранее, делимость на  $x + 1$ , получаем условие  $a + b \neq 0$ , т.е.

$$\begin{cases} a = 0, b = 1, \\ a = 1, b = 0. \end{cases}$$

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ 

Третья степень:  $x^3 + ax^2 + bx + 1$

(почему свободный член не равен нулю?)

Исключая, как сделано ранее, делимость на  $x + 1$ , получаем условие  $a + b \neq 0$ , т.е.

$$\begin{cases} a = 0, b = 1, \\ a = 1, b = 0. \end{cases}$$

$\therefore$  над  $\mathbb{F}_2$  существует **два неприводимых многочлена степени 3:**

$$x^3 + x^2 + 1 \text{ и } x^3 + x + 1.$$

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_2$

**Четвёртая степень:**  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$

Исключение делимости на  $x + 1$  приводит к условию  $a + b + c = 1$ , т.е. имеется 4 варианта, которые дают 3 решения:

$a$	$b$	$c$	многочлен
0	0	1	$x^4 + x + 1$
0	1	0	$x^4 + x^2 + 1$
1	0	0	$x^4 + x^3 + 1$
1	1	1	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

— **приводимый**

Откуда взялся ещё один приводимый многочлен?

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_2$ 

**Четвёртая степень:**  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$

Исключение делимости на  $x + 1$  приводит к условию  $a + b + c = 1$ , т.е. имеется 4 варианта, которые дают 3 решения:

$a$	$b$	$c$	многочлен	
0	0	1	$x^4 + x + 1$	
0	1	0	$x^4 + x^2 + 1$	— приводимый
1	0	0	$x^4 + x^3 + 1$	
1	1	1	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	

Откуда взялся ещё один приводимый многочлен?

Найдены многочлены, у которых нет **линейных** делителей (степени 1). Но многочлен 4-й степени может разлагаться в произведение двух неприводимых многочленов 2-й степени:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2.$$

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_3$

Поле  $\mathbb{F}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, +_3, \cdot_3 \rangle \Rightarrow$  кольцо многочленов  $\mathbb{F}_3[x]$ .

Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_3$ 

Поле  $\mathbb{F}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, +_3, \cdot_3 \rangle \Rightarrow$  кольцо многочленов  $\mathbb{F}_3[x]$ .

Многочлены порядка 1:

$$x$$

$$2x$$

$$x + 1$$

$$2x + 1$$

$$x + 2$$

$$2x + 2$$

Какие из них неприводимы?



Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_3$ 

Поле  $\mathbb{F}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, +_3, \cdot_3 \rangle \Rightarrow$  кольцо многочленов  $\mathbb{F}_3[x]$ .

Многочлены порядка 1:

$x$	$2x$
$x + 1$	$2x + 1$
$x + 2$	$2x + 2$

Какие из них неприводимы? **Все!**

## Неприводимые многочлены над $\mathbb{F}_3$

Поле  $\mathbb{F}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, +_3, \cdot_3 \rangle \Rightarrow$  кольцо многочленов  $\mathbb{F}_3[x]$ .

Многочлены порядка 1:

$x$	$2x$
$x + 1$	$2x + 1$
$x + 2$	$2x + 2$

Какие из них неприводимы? **Все!**

Неприводимые многочлены порядка 2 в  $\mathbb{F}_3[x]$  (они не имеют корней 0, 1, 2):

$x^2 + 1$	$2x^2 + 2$
$x^2 + x + 2$	$2x^2 + x + 1$
$x^2 + 2x + 2$	$2x^2 + 2x + 1$

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

— докажем позже.

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

— докажем позже.

### Вопрос

*Как в кольце  $\mathbb{F}_p[x]$  найти неприводимый многочлен?*

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

— докажем позже.

### Вопрос

Как в кольце  $\mathbb{F}_p[x]$  найти неприводимый многочлен?

Ответ: нет эффективных алгоритмов 🙄

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

— докажем позже.

### Вопрос

Как в кольце  $\mathbb{F}_p[x]$  найти неприводимый многочлен?

Ответ: нет эффективных алгоритмов 🙄

(из таблиц, алгоритм из 5-й главы «Алгебры» Ван дер Вардена, алгоритм Берлекэмпса...)

## Существование и нахождение неприводимых многочленов

### Теорема (о существовании неприводимых многочленов)

*Для любых натурального  $n$  и простого  $p$  над  $\mathbb{F}_p$  существует неприводимый многочлен степени  $n$ .*

— докажем позже.

### Вопрос

Как в кольце  $\mathbb{F}_p[x]$  найти неприводимый многочлен?

Ответ: нет эффективных алгоритмов 🙄

(из таблиц, алгоритм из 5-й главы «Алгебры» Ван дер Вардена, алгоритм Берлекэмпса...)

Если многочлен не имеет корней, это ещё не значит, что он неприводим. Почему?



## Зачем нужны неприводимые многочлены?

## Зачем нужны неприводимые многочлены?

Используя неприводимые многочлены, можно строить **новые конечные поля** — *расширения* простых полей  $\mathbb{F}_p$

## Зачем нужны неприводимые многочлены?

Используя неприводимые многочлены, можно строить **новые конечные поля** — *расширения* простых полей  $\mathbb{F}_p$ :

- 1 Выбираем простое  $p$  и фиксируем поле

$$\mathbb{F}_p = \langle \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}, +_p, \cdot_p \rangle.$$

- 2 Рассматриваем кольцо  $\mathbb{F}_p[x]$  многочленов над ним.

- 3 Выбираем натуральное  $n$  и **неприводимый многочлен**

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}_p[x].$$

- 4 Идеал  $(P(x))$  порождает фактормножество  $\mathbb{F}_p[x]/(P(x))$ , элементы которого суть совокупность  $\{R(x)\}$  остатков от деления многочленов  $f \in \mathbb{F}_p[x]$  на  $P(x)$ :

$$f(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x).$$

### Утверждение

Множество  $\{R(x)\}$  является полем Галуа  $GF(p^n)$ .

## Построение конечных полей...

## Доказательство

- 1 Кольцо многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  евклидово, идеал  $(P(x))$  — максимальный  $\Rightarrow \{R(x)\}$  — поле.
- 2 Его мощность  $|\{R(x)\}| =$  число многочленов над  $\mathbb{F}_p$  степени не выше  $n - 1$ , т.е.  $|\{R(x)\}| = p^n$ .

## Построение конечных полей...

### Доказательство

- 1 Кольцо многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  евклидово, идеал  $(P(x))$  — максимальный  $\Rightarrow \{R(x)\}$  — поле.
- 2 Его мощность  $|\{R(x)\}| =$  число многочленов над  $\mathbb{F}_p$  степени не выше  $n - 1$ , т.е.  $|\{R(x)\}| = p^n$ .

Поле  $\{R(x)\} = GF(p^n)$  называется *расширением  $n$ -й степени поля  $\mathbb{F}_p$* ; альтернативное обозначение —  $\mathbb{F}_p^n$ .

### Вопрос

Почему в обозначении  $\mathbb{F}_p^n$  не используется многочлен  $P(x)$ , с помощью которого построено поле?

## Построение конечных полей...

### Доказательство

- 1 Кольцо многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  евклидово, идеал  $(P(x))$  — максимальный  $\Rightarrow \{R(x)\}$  — поле.
- 2 Его мощность  $|\{R(x)\}| =$  число многочленов над  $\mathbb{F}_p$  степени не выше  $n - 1$ , т.е.  $|\{R(x)\}| = p^n$ .

Поле  $\{R(x)\} = GF(p^n)$  называется *расширением  $n$ -й степени поля  $\mathbb{F}_p$* ; альтернативное обозначение —  $\mathbb{F}_p^n$ .

### Вопрос

Почему в обозначении  $\mathbb{F}_p^n$  не используется многочлен  $P(x)$ , с помощью которого построено поле?

### Теорема

Любое конечное поле изоморфно какому-нибудь полю Галуа  $\mathbb{F}_p^n$ .

## Пример: построение поля $\mathbb{F}_3^2$

Выберем неприводимый многочлен в  $\mathbb{F}_3[x]$ :  $x^2 + 1$ .

Искомое поле есть

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_3^2 &\cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1) = \\ &= \{0, 1, 2, x, x + 1, x + 2, 2x, 2x + 1, 2x + 2\}\end{aligned}$$

Можно составить таблицы сложения и умножения в этом поле с учётом  $x^2 = -1 \equiv_3 2$ .

Например:

$$(x + 1) + (x + 2) = 2x,$$

$$(2x + 1) + x = 1,$$

$$x \cdot (2x) = 1,$$

$$(2x + 1) \cdot x = x + 1,$$

и т.д.

Построение поля  $\mathbb{F}_3^2 \dots$ 

Заметим, что, например,

$$(x + 1)^1 = x + 1,$$

$$(x + 1)^2 = 2x,$$

$$(x + 1)^3 = 2x + 1,$$

$$(x + 1)^4 = 2,$$

$$(x + 1)^5 = 2x + 2,$$

$$(x + 1)^6 = x,$$

$$(x + 1)^7 = x + 2,$$

$$(x + 1)^8 = 1.$$



Построение поля  $\mathbb{F}_3^2$ ...

Заметим, что, например,

$$(x + 1)^1 = x + 1,$$

$$(x + 1)^5 = 2x + 2,$$

$$(x + 1)^2 = 2x,$$

$$(x + 1)^6 = x,$$

$$(x + 1)^3 = 2x + 1,$$

$$(x + 1)^7 = x + 2,$$

$$(x + 1)^4 = 2,$$

$$(x + 1)^8 = 1.$$

Это значит, что  $x + 1$  — примитивный элемент (мультипликативной группы) поля  $\mathbb{F}_3^2$ .

Построение поля  $\mathbb{F}_3^2$ ...

Заметим, что, например,

$$(x+1)^1 = x+1,$$

$$(x+1)^5 = 2x+2,$$

$$(x+1)^2 = 2x,$$

$$(x+1)^6 = x,$$

$$(x+1)^3 = 2x+1,$$

$$(x+1)^7 = x+2,$$

$$(x+1)^4 = 2,$$

$$(x+1)^8 = 1.$$

Это значит, что  $x+1$  — примитивный элемент (мультипликативной группы) поля  $\mathbb{F}_3^2$ .

**Вопрос**

*Что будет, если при построении поля вместо  $x^2 + 1$  взять другой неприводимый в  $\mathbb{F}_3[x]$  многочлен?*

*Например,  $2x^2 + x + 1$ ?*

Построение поля  $\mathbb{F}_3^2$ ...

Заметим, что, например,

$$(x+1)^1 = x+1,$$

$$(x+1)^5 = 2x+2,$$

$$(x+1)^2 = 2x,$$

$$(x+1)^6 = x,$$

$$(x+1)^3 = 2x+1,$$

$$(x+1)^7 = x+2,$$

$$(x+1)^4 = 2,$$

$$(x+1)^8 = 1.$$

Это значит, что  $x+1$  — примитивный элемент (мультипликативной группы) поля  $\mathbb{F}_3^2$ .

**Вопрос**

*Что будет, если при построении поля вместо  $x^2 + 1$  взять другой неприводимый в  $\mathbb{F}_3[x]$  многочлен?*

*Например,  $2x^2 + x + 1$ ?*

Ответ: получится поле, **изоморфное построенному.**

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p^n$ ?

$f(x)$  — примитивный элемент (генератор) группы  $\mathbb{F}_p^{n*}$ , если

- 1  $(f(x))^{p^n-1} = 1$  и  $(f(x))^i \neq 1$  для  $0 < i < p^n - 1$ ,
- 2 для любого многочлена  $g(x) \in \mathbb{F}_p^{n*}$  найдётся степень  $i$  такая, что  $g(x) = (f(x))^i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ .

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p^n$ ?

$f(x)$  — примитивный элемент (генератор) группы  $\mathbb{F}_p^{n*}$ , если

- 1  $(f(x))^{p^n-1} = 1$  и  $(f(x))^i \neq 1$  для  $0 < i < p^n - 1$ ,
- 2 для любого многочлена  $g(x) \in \mathbb{F}_p^{n*}$  найдётся степень  $i$  такая, что  $g(x) = (f(x))^i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ .

Если  $\alpha$  — примитивный элемент поля  $GF(q)$ , то любой другой примитивный элемент может быть получен как степень  $\alpha^k$ , где  $k$  — целое взаимно простое с  $q - 1 \Rightarrow$  количество примитивных элементов поля  $\mathbb{F}_p^n$  равно  $\varphi(p^n - 1)$ .

## Как найти примитивные элементы поля $\mathbb{F}_p^n$ ?

$f(x)$  — примитивный элемент (генератор) группы  $\mathbb{F}_p^{n*}$ , если

- ❶  $(f(x))^{p^n-1} = 1$  и  $(f(x))^i \neq 1$  для  $0 < i < p^n - 1$ ,
- ❷ для любого многочлена  $g(x) \in \mathbb{F}_p^{n*}$  найдётся степень  $i$  такая, что  $g(x) = (f(x))^i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ .

Если  $\alpha$  — примитивный элемент поля  $GF(q)$ , то любой другой примитивный элемент может быть получен как степень  $\alpha^k$ , где  $k$  — целое взаимно простое с  $q - 1 \Rightarrow$  количество примитивных элементов поля  $\mathbb{F}_p^n$  равно  $\varphi(p^n - 1)$ .

Например, в 9-элементном поле  $\mathbb{F}_3^2$  имеется  $\varphi(8) = 4$  примитивных элемента, образованных степенями 1, 3, 5, 7 (числа, взаимно простые с 8) уже найденного генератора:

$$x + 1, (x + 1)^3 = 2x + 1, (x + 1)^5 = 2x + 2, (x + 1)^7 = x + 2.$$

Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?

Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?

Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...



## Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?

Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...

- **Неприводимые многочлены** ищут в **кольце** многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  над простым полем  $\mathbb{F}_p$  — например, чтобы построить его расширение.

## Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?

Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...

- **Неприводимые многочлены** ищут в **кольце** многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  над простым полем  $\mathbb{F}_p$  — например, чтобы построить его расширение.
- **Примитивные элементы** ищут в мультипликативной **группе**  $\mathbb{F}_p^{n*}$  расширения  $\mathbb{F}_p^n$  — например, чтобы иметь удобное представление её элементов через степени генераторов.

## Я что-то не понимаю: неприводимые многочлены — это примитивные элементы?

Ведь было: для поиска и тех, и других нет эффективных алгоритмов...

- **Неприводимые многочлены** ищут в **кольце** многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$  над простым полем  $\mathbb{F}_p$  — например, чтобы построить его расширение.
- **Примитивные элементы** ищут в мультипликативной **группе**  $\mathbb{F}_p^{n*}$  расширения  $\mathbb{F}_p^n$  — например, чтобы иметь удобное представление её элементов через степени генераторов.

Замечание: в поле  $GF(q)$  понятие «неприводимый многочлен» не имеет смысла: там любой многочлен делится на любой ненулевой...

Например, в  $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ :  $\frac{x + 1}{2x + 1} = x$ .

Может ли приводимый многочлен быть примитивным элементом?

## Может ли приводимый многочлен быть примитивным элементом?

- 1 Возьмём поле  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ .
- 2 Возьмём неприводимый над  $\mathbb{F}_2$  многочлен  $x^3 + x + 1$ .
- 3 Построим поле  $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1) \cong \mathbb{F}_2^3$ ; оно содержит все полиномы из  $\mathbb{F}_2[x]$  степени не выше 2.
- 4 Многочлен  $P(x) = x^2 + x - \text{приводим}$  в любом кольце, в т.ч. в  $\mathbb{F}_2[x]$ , и он принадлежит  $F$ .
- 5 Является ли  $P(x)$  — примитивным элементом поля  $F$ ?

## Может ли приводимый многочлен быть примитивным элементом?

- 1 Возьмём поле  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ .
- 2 Возьмём неприводимый над  $\mathbb{F}_2$  многочлен  $x^3 + x + 1$ .
- 3 Построим поле  $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1) \cong \mathbb{F}_2^3$ ; оно содержит все полиномы из  $\mathbb{F}_2[x]$  степени не выше 2.
- 4 Многочлен  $P(x) = x^2 + x - \text{приводим}$  в любом кольце, в т.ч. в  $\mathbb{F}_2[x]$ , и он принадлежит  $F$ .
- 5 Является ли  $P(x)$  — примитивным элементом поля  $F$ ?

Мультипликативная группа поля  $F$  содержит  $2^3 - 1 = 7$  элементов, это простое число  $\Rightarrow$  в мультипликативная группе все  $\varphi(7) = 6$  неединичных элементов — генераторы  $\Rightarrow$  ответ на оба вопроса — **ДА!**

Всегда ли неприводимый многочлен есть примитивный элемент?

## Всегда ли неприводимый многочлен есть примитивный элемент?

- 1 Возьмём поле  $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 2 Возьмём неприводимый над  $\mathbb{F}_5$  многочлен  $x^2 + x + 1$ .
- 3 Построим поле  $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 1) \cong \mathbb{F}_5^2$ ; оно содержит только полиномы 0-й и 1-й степеней из  $\mathbb{F}_5[x]$ .
- 4 Все многочлены 1-й степени неприводимы, имеют вид  $ax + b$  и их — 20 шт.  
Все ли они — примитивные элементы поля  $F$ ?



## Всегда ли неприводимый многочлен есть примитивный элемент?

- 1 Возьмём поле  $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 2 Возьмём неприводимый над  $\mathbb{F}_5$  многочлен  $x^2 + x + 1$ .
- 3 Построим поле  $F = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 1) \cong \mathbb{F}_5^2$ ; оно содержит только полиномы 0-й и 1-й степеней из  $\mathbb{F}_5[x]$ .
- 4 Все многочлены 1-й степени неприводимы, имеют вид  $ax + b$  и их — 20 шт.  
Все ли они — примитивные элементы поля  $F$ ?

Мультипликативная группа поля  $F$  содержит  $5^2 - 1 = 24$  элемента из которых  $\varphi(24) = 8$  примитивных  $\Rightarrow$  не все многочлены 1-й степени — генераторы  $\Rightarrow$  ответ на оба вопроса — **НЕТ!**

## Когда $x$ есть примитивный элемент?

**Вопрос:** когда корень  $x$  (сам неприводимый многочлен!) неприводимого над  $\mathbb{F}_p$  многочлена  $a(x)$  будет примитивным элементом мультипликативной группы поля  $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ ?

## Когда $x$ есть примитивный элемент?

**Вопрос:** когда корень  $x$  (сам неприводимый многочлен!) неприводимого над  $\mathbb{F}_p$  многочлена  $a(x)$  будет примитивным элементом мультипликативной группы поля  $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ ?

**Ответ:** корень нормированного неприводимого многочлена  $a(x)$  будет примитивным элементом мультипликативной группы поля  $\mathbb{F}_p[x]/(a(x))$  iff  $a(x)$  *примитивен*, т.е.

$t = p^n - 1$  — *наименьший показатель*, при котором  $a(x) \mid x^t - 1$  (или, эквивалентно,  $a(x)$  — м.м. для  $x$ ).

Пример: неприводимый над  $\mathbb{F}_2$  многочлен  $x^3 + x + 1$  примитивен:  $(x^{2^3-1} + 1)/(x^3 + x + 1) = x^4 + x^2 + x + 1$ , но  $x^m + 1 \not\mid x^3 + x + 1$  ни при каком  $m = 4, 5, 6$ . Поэтому

$$\mathbb{F}_2^*[x]/(x^3 + x + 1) = \{x^0 = 1, x, x^2, x^3 = x + 1, x^4 = x^2 + x, x^5 = x^2 + x + 1, x^6 = x^2 + 1\}.$$

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях**
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

## Алгоритм Евклида —

— применяют для нахождения  $\text{НОД}(a, b)$  натуральных  $a$  и  $b$ .

Наблюдение: общий делитель пары чисел  $(a, b)$ , то остаётся им и для пары  $(a - b, b)$  (считаем, что  $a \geq b$ ).

## Алгоритм Евклида —

— применяют для нахождения  $\text{НОД}(a, b)$  натуральных  $a$  и  $b$ .

Наблюдение: общий делитель пары чисел  $(a, b)$ , то остаётся им и для пары  $(a - b, b)$  (считаем, что  $a \geq b$ ).

Отсюда:

- пары чисел  $(a, b)$  и  $(a - kb, b)$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) имеет одинаковые общие делители;

## Алгоритм Евклида —

— применяют для нахождения  $\text{НОД}(a, b)$  натуральных  $a$  и  $b$ .

Наблюдение: общий делитель пары чисел  $(a, b)$ , то остаётся им и для пары  $(a - b, b)$  (считаем, что  $a \geq b$ ).

Отсюда:

- пары чисел  $(a, b)$  и  $(a - kb, b)$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) имеет одинаковые общие делители;
- вместо  $a - kb$  можно взять остаток  $r_0$  от деления нацело  $a$  на  $b$ :  $a = bq + r_0$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r_0 < b$ ;

## Алгоритм Евклида —

— применяют для нахождения НОД( $a, b$ ) натуральных  $a$  и  $b$ .

Наблюдение: общий делитель пары чисел  $(a, b)$ , то остаётся им и для пары  $(a - b, b)$  (считаем, что  $a \geq b$ ).

Отсюда:

- пары чисел  $(a, b)$  и  $(a - kb, b)$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) имеет одинаковые общие делители;
- вместо  $a - kb$  можно взять остаток  $r_0$  от деления нацело  $a$  на  $b$ :  $a = bq + r_0$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r_0 < b$ ;
- затем, переставив числа в паре, можно повторить процедуру; она закончится, т.к. числа в паре уменьшаются, но остаются неотрицательными.



## Алгоритм Евклида —

— применяют для нахождения  $\text{НОД}(a, b)$  натуральных  $a$  и  $b$ .

Наблюдение: общий делитель пары чисел  $(a, b)$ , то остаётся им и для пары  $(a - b, b)$  (считаем, что  $a \geq b$ ).

Отсюда:

- пары чисел  $(a, b)$  и  $(a - kb, b)$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) имеет одинаковые общие делители;
- вместо  $a - kb$  можно взять остаток  $r_0$  от деления нацело  $a$  на  $b$ :  $a = bq + r_0$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r_0 < b$ ;
- затем, переставив числа в паре, можно повторить процедуру; она закончится, т.к. числа в паре уменьшаются, но остаются неотрицательными.

В результате: за конечное число шагов образуется пара  $(r_n, 0)$ .

Ясно, что  $\text{НОД}(a, b) = r_n$ .

Алгоритм Евклида: общая схема ( $a \geq b$ )НОД ( $a, b$ )  $\equiv$ Шаг (-2):  $r_{-2} = a$  — полагаем для удобства;Шаг (-1):  $r_{-1} = b$  — полагаем для удобства;Шаг 0:  $r_{-2} = r_{-1}q_0 + r_0$  — делим  $r_{-2}$  на  $r_{-1}$ , остаток  $r_0$ ;Шаг 1:  $r_{-1} = r_0q_1 + r_1$  — делим  $r_{-1}$  на  $r_0$ , остаток  $r_1$ ;

... всегда делим с остатком бóльшее число на меньшее, оставляем меньшее (оно становится бóльшим) и остаток (он становится меньшим);

Шаг  $n$ :  $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$  — делим  $r_{n-2}$  на  $r_{n-1}$ , остаток  $r_n$ ;Шаг  $n + 1$ :  $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0$  — деление **нацело**  $\Rightarrow$  **останов.**Всегда  $r_{-2} \geq r_{-1} > r_0 > r_1 > \dots > r_n \geq 1$ .  $\equiv r_n$ .

## Алгоритм Евклида: пример

$$\underline{\text{НОД}(252, 105) \equiv}$$

## Алгоритм Евклида: пример

$$\underline{\text{НОД}(252, 105) \equiv}$$

$$\text{Шаг } (-2): r_{-2} = 252;$$

$$\text{Шаг } (-1): r_{-1} = 105 \Rightarrow (252, 105);$$

$$\text{Шаг } 0: 252 = 105 \cdot 2 + 42 \Rightarrow (105, 42);$$

$$\text{Шаг } 1: 105 = 42 \cdot 2 + 21 \Rightarrow (42, 21);$$

$$\text{Шаг } 2: 42 = 21 \cdot 2 + 0 \Rightarrow (21, 0).$$

$$\equiv 21.$$

## Алгоритм Евклида: пример

$$\underline{\text{НОД}(252, 105) \equiv}$$

$$\text{Шаг } (-2): r_{-2} = 252;$$

$$\text{Шаг } (-1): r_{-1} = 105 \Rightarrow (252, 105);$$

$$\text{Шаг } 0: 252 = 105 \cdot 2 + 42 \Rightarrow (105, 42);$$

$$\text{Шаг } 1: 105 = 42 \cdot 2 + 21 \Rightarrow (42, 21);$$

$$\text{Шаг } 2: 42 = 21 \cdot 2 + 0 \Rightarrow (21, 0).$$

$$\equiv 21.$$

$$\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(a, (\text{НОД}(b, c)))$$

## Соотношение Безу

### Утверждение (соотношение Безу)

Для любых *натуральных*  $a, b$  и  $d = \text{НОД}(a, b)$  найдутся *целые коэффициенты Безу*  $x, y$  такие, что  $d = ax + by$ .

## Соотношение Безу

### Утверждение (соотношение Безу)

Для любых *натуральных*  $a, b$  и  $d = \text{НОД}(a, b)$  найдутся *целые коэффициенты Безу*  $x, y$  такие, что  $d = ax + by$ .

### Доказательство

Рассматриваем алгоритм Евклида с конца к началу:

$d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$ , затем, подставляя сюда значение  $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$ , получаем

$$d = -q_n r_{n-3} + (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} = \alpha r_{n-3} + \beta r_{n-2}$$

для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  и т.д.

## Соотношение Безу

### Утверждение (соотношение Безу)

Для любых *натуральных*  $a, b$  и  $d = \text{НОД}(a, b)$  найдутся *целые коэффициенты Безу*  $x, y$  такие, что  $d = ax + by$ .

### Доказательство

Рассматриваем алгоритм Евклида с конца к началу:

$d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$ , затем, подставляя сюда значение  $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$ , получаем

$$d = -q_n r_{n-3} + (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} = \alpha r_{n-3} + \beta r_{n-2}$$

для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  и т.д.

Для нахождения по паре чисел  $(a, b)$  их НОД и *коэффициентов Безу* применяют *расширенный алгоритм Евклида*.



## Расширенный алгоритм Евклида —

— повторяет схему (простого) алгоритма Евклида, в котором на каждом шаге:

- ① дополнительно вычисляются  $x_i$  и  $y_i$  по формулам

$$x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}, \quad y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}, \quad i = 0, 1, \dots;$$
$$x_{-2} = y_{-1} = 1, \quad x_{-1} = y_{-2} = 0;$$

- ② справедливо соотношение

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-2} - q_i r_{i-1} = (ax_{i-2} + by_{i-2}) - q_i(ax_{i-1} + by_{i-1}) = \\ &= a(x_{i-2} - q_i x_{i-1}) + b(y_{i-2} - q_i y_{i-1}) = ax_i + by_i. \end{aligned}$$

## Расширенный алгоритм Евклида: пример

**Задача.** Найти натуральное  $d$  и целые  $x$  и  $y$  такие, что

$$d = \text{НОД}(252, 105) = 252x + 105y.$$

**Решение.** Имеем  $x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}$ ,  $y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}$ .  
Сведём все вычисления в таблицу:

шаг $i$	$r_{i-2}$	$r_{i-1}$	$q_i$	$r_i$	$x_i$	$y_i$
-2				252	1	0
-1				105	0	1
0	252	105	2	42	1	-2
1	105	42	2	21	-2	5
2	42	21	2	0		

**Ответ:**  $d = 21$ ,  $x = -2$ ,  $y = 5$ ,

т.е. найдено разложение  $21 = (-2) \cdot 252 + 5 \cdot 105$ .

## Задача

В поле  $\mathbb{Z}/(101)$  решить уравнение  $4x = 1$ . (\*)

## Задача

В поле  $\mathbb{Z}/(101)$  решить уравнение  $4x = 1$ . (\*)

### Решение

- ①  $4x = 1 + k \cdot 101 = 102, 203, 304, \dots$ ;  $x = 304/4 = 76$ .  
Это решение перебором.

## Задача

В поле  $\mathbb{Z}/(101)$  решить уравнение  $4x = 1$ . (\*)

### Решение

①  $4x = 1 + k \cdot 101 = 102, 203, 304, \dots$ ;  $x = 304/4 = 76$ .  
Это решение перебором.

② Поскольку  $101y \equiv_{101} 0$ , вместо (\*) можно расширенным алгоритмом Евклида решать уравнение

$$4x + 101y = 1.$$

## Задача

В поле  $\mathbb{Z}/(101)$  решить уравнение  $4x = 1$ . (\*)

### Решение

①  $4x = 1 + k \cdot 101 = 102, 203, 304, \dots$ ;  $x = 304/4 = 76$ .  
Это решение перебором.

② Поскольку  $101y \equiv_{101} 0$ , вместо (\*) можно расширенным алгоритмом Евклида решать уравнение

$$4x + 101y = 1.$$

В результате работы алгоритма:  $4 \cdot 76 + 101 \cdot (-3) = 1$ .

Аналогично решаются уравнения

$$ax = c, \quad ax + by = c$$

(перед решением  $a$ ,  $b$  и  $c$  надо поделить на их общий НОД).

## Нахождение обратных элементов в расширениях полей $\mathbb{F}_p$

Алгоритм Евклида и его расширенная версия остаётся справедливым в любом **евклидовом кольце**, следовательно, и в любом **поле Галуа**.

Нахождение обратных элементов в расширениях полей  $\mathbb{F}_p$ 

Алгоритм Евклида и его расширенная версия остаётся справедливым в любом **евклидовом кольце**, следовательно, и в любом **поле Галуа**.

**Поэтому:** обратный элемент  $y(x)$  для некоторого многочлена  $b(x)$  в поле  $F = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$  определяется соотношением

$$b(x) \cdot y(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a(x) \cdot \chi(x) + b(x) \cdot y(x) = 1,$$

которое может быть решено **расширенным алгоритмом Евклида для пары многочленов**  $(a(x), b(x))$  в поле  $F$ .

Решение данных уравнений существует **всегда**: т.к.  $a(x)$  — неприводимый многочлен и  $\deg b(x) < \deg a(x)$ , то  $\text{НОД}(a(x), b(x)) = 1$ .



**Пример:** найти  $(x^2 + x + 3)^{-1}$  в поле  $\mathbb{F}_7[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + 3)$

**Пример:** найти  $(x^2 + x + 3)^{-1}$  в поле  $\mathbb{F}_7[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + 3)$

Применяя **расширенный алгоритм Евклида**, решим уравнение

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 3)\chi(x) + (x^2 + x + 3)y(x) = 1 \quad (*)$$

**Пример:** найти  $(x^2 + x + 3)^{-1}$  в поле  $\mathbb{F}_7[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + 3)$

Применяя **расширенный алгоритм Евклида**, решим уравнение

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 3)\chi(x) + (x^2 + x + 3)y(x) = 1 \quad (*)$$

**Шаг 0:**  $r_{-2}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3,$

$$r_{-1}(x) = x^2 + x + 3,$$

$$y_{-2}(x) = 0,$$

$$y_{-1}(x) = 1 \quad \text{— задание начальных значений.}$$

**Шаг 1:**  $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x),$

$$q_0(x) = x^2 + 5,$$

$$r_0(x) = 2x + 2,$$

$$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = -q_0(x) = -x^2 - 5.$$

**Шаг 2:**  $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x),$

$$q_1(x) = 4x,$$

$$r_1(x) = 3, \quad \deg r_1(x) = 0$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) = 1 + 4x(x^2 + 5) = \\ &= 4x^3 + 6x + 1. \end{aligned}$$

Пример...  $\mathbb{F}_7^4 : (x^4 + x^3 + x^2 + 3)\chi(x) + b(x)(x^2 + x + 3) = 1 \quad (*)$

Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т.к.  $r_1(x) = 3$  и  $\deg r_1(x) = \deg 1 = 0$  (1 — **многочлен** в правой части (\*)).

Пример...  $\mathbb{F}_7^4 : (x^4 + x^3 + x^2 + 3)\chi(x) + b(x)(x^2 + x + 3) = 1 \quad (*)$

Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т.к.  $r_1(x) = 3$  и  $\deg r_1(x) = \deg 1 = 0$  (1 — **многочлен** в правой части (\*)).

**Замечание:** при итерациях алгоритма нет необходимости вычислять  $\chi_i(x)$  — коэффициент при  $x^4 + x^3 + x^2 + 3$ , — т.к. нас интересует только  $y_i(x)$  — коэффициент при  $x^2 + x + 3$ .

Остаток  $r_1(x) = 3$ , **отличается от 1 на множитель-константу.**

**Пример...**  $\mathbb{F}_7^4 : (x^4 + x^3 + x^2 + 3)\chi(x) + b(x)(x^2 + x + 3) = 1 \quad (*)$

Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т.к.  $r_1(x) = 3$  и  $\deg r_1(x) = \deg 1 = 0$  ( $1$  — **многочлен** в правой части  $(*)$ ).

**Замечание:** при итерациях алгоритма нет необходимости вычислять  $\chi_i(x)$  — коэффициент при  $x^4 + x^3 + x^2 + 3$ , — т.к. нас интересует только  $y_i(x)$  — коэффициент при  $x^2 + x + 3$ .

Остаток  $r_1(x) = 3$ , **отличается от 1 на множитель-константу**.

Чтобы получить решение уравнения  $(*)$  вычисляем элемент  $3^{-1} \equiv_7 5$  и домножаем на него  $y_1$ :

$$5y_1(x) = 5(4x^3 + 6x + 1) \equiv_7 6x^3 + 2x + 5.$$

**Ответ:** в поле  $\mathbb{F}_7[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + 3)$  —

$$(x^2 + x + 3)^{-1} = 6x^3 + 2x + 5.$$

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем**
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

## Векторное пространство: определение

### Определение

*Абстрактным векторным пространством* над полем  $\mathbb{k} = \{1, \alpha, \beta, \dots\}$  называется алгебраическая система  $\mathcal{V} = \langle V, \mathbb{k}; +, \cdot \rangle$ , где

- $V = \{0, v, \dots\}$  — произвольное множество,
- $+$  — бинарная операция сложения над  $V$ :  $V \times V \xrightarrow{+} V$ ,
- $\cdot$  — бинарная операция умножения элемента («числа») из  $\mathbb{k}$  на элемент («вектор») из  $V$ :  $\mathbb{k} \times V \xrightarrow{\cdot} V$ ,



## Векторное пространство: определение

### Определение

*Абстрактным векторным пространством* над полем  $\mathbb{k} = \{1, \alpha, \beta, \dots\}$  называется алгебраическая система  $\mathcal{V} = \langle V, \mathbb{k}; +, \cdot \rangle$ , где

- $V = \{0, v, \dots\}$  — произвольное множество,
- $+$  — бинарная операция сложения над  $V$ :  $V \times V \xrightarrow{+} V$ ,
- $\cdot$  — бинарная операция умножения элемента («числа») из  $\mathbb{k}$  на элемент («вектор») из  $V$ :  $\mathbb{k} \times V \xrightarrow{\cdot} V$ ,

причём операции  $+$  и  $\cdot$  удовлетворяют следующим аксиомам:

L1:  $V$  — коммутативная группа по сложению,  $0$  — её нейтральный элемент.

L2:  $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ ,  $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v$ ,  
(дистрибутивность  $\cdot$  относительно  $+$ ),

L3:  $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$  (композиция умножений на два элемента поля совпадает с умножением их произведение,  
«ассоциативность» операций умножения поля и  $\cdot$ ),

L4:  $1 \cdot v = v$  (унитальность).

## Координатное пространство

### Пример

Пусть  $V = \mathbb{k}^n$  — множество конечных последовательностей длины  $n$  элементов поля  $\mathbb{k}$ .

'Сложение' и 'умножение на число (из  $\mathbb{k}$ )' элементов из  $V$  определяются покомпонентно.

Получившаяся структура — векторное пространство.

Его называют  *$n$ -мерным координатным пространством* над полем  $\mathbb{k}$ .

Дистрибутивность относительно вычитания:  $(\alpha - \beta) \cdot v = \alpha \cdot v - \beta \cdot v$ :

$$(\alpha - \beta) \cdot v + \beta \cdot v = (\alpha - \beta + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v$$

Отсюда получаем, что

- $0 \cdot v = 0$ , так как  $0 \cdot v = (1 - 1) \cdot v = v - v = 0$

- и  $-v = (-1) \cdot v$ , так как

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0.$$

## Применение линейной алгебры к изучению конечных полей

### Лемма

*Поле  $\mathbb{k}$  характеристики  $p > 0$  есть векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$ .*

## Применение линейной алгебры к изучению конечных полей

## Лемма

Поле  $\mathbb{k}$  характеристики  $p > 0$  есть векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$ .

## Доказательство

**сложение** — наследуется операция сложения в поле  $\mathbb{k}$ ;

**умножение** — поскольку

$$\mathbb{F}_p \cong F = \{0, 1, 1+1, \dots, \overbrace{1+\dots+1}^{p-1}\} \subseteq \mathbb{k},$$

то при умножении «числа» из поля  $\mathbb{F}_p$  можно заменять на соответствующие элементы из поля  $F$ ;

**аксиомы векторного пространства** — выполняются в силу свойств арифметических операций в поле  $\mathbb{k}$ .

## Применение линейной алгебры к изучению конечных полей

### Лемма

Поле  $\mathbb{k}$  характеристики  $p > 0$  есть векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$ .

### Доказательство

**сложение** — наследуется операция сложения в поле  $\mathbb{k}$ ;

**умножение** — поскольку

$$\mathbb{F}_p \cong F = \{0, 1, 1+1, \dots, \overbrace{1+\dots+1}^{p-1}\} \subseteq \mathbb{k},$$

то при умножении «числа» из поля  $\mathbb{F}_p$  можно заменять на соответствующие элементы из поля  $F$ ;

**аксиомы векторного пространства** — выполняются в силу свойств арифметических операций в поле  $\mathbb{k}$ .

### Следствие

Поле Галуа как векторное пространство состоит из  $p^n$  элементов.

## Поля Галуа как кольца вычетов или векторные пространства

Поле  $\mathbb{F}_p^n$  есть конечная АС с элементами-многочленами

$$M_n(x) = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \} \subset \mathbb{F}_p[x],$$

которую можно рассматривать как

- **факторкольцо** вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена  $f(x)$  степени  $n$  над полем  $\mathbb{F}_p$ :

$$\mathbb{F}_p^n \cong \langle \mathbb{F}_p[x]/(f(x)); +_p, \cdot_p \rangle$$

или как

- $n$ -мерное **координатное пространство** над полем  $\mathbb{F}_p$ :

$$\mathbb{F}_p^n \cong \langle M_n(x), \mathbb{F}_p; +_p, \cdot_p \rangle.$$

Базис в  $\mathbb{F}_p^n$ 

## Теорема

*Элементы  $\{1\}, \{x\}, \dots, \{x^{n-1}\}$  образуют базис  $\mathbb{F}_p^n$ .*

Базис в  $\mathbb{F}_p^n$ 

## Теорема

Элементы  $\{1\}, \{x\}, \dots, \{x^{n-1}\}$  образуют базис  $\mathbb{F}_p^n$ .

## Доказательство

1. Любой элемент  $\mathbb{F}_p^n$  представим в виде линейной комбинации указанных векторов:

$$\begin{aligned}\{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}\} &= \\ &= a_0\{1\} + a_1\{x\} + \dots + a_{n-1}\{x^{n-1}\}.\end{aligned}$$

2. Обратно, пусть  $g(x) = b_0\{1\} + b_1\{x\} + \dots + b_{n-1}\{x^{n-1}\} = 0$ .

Это означает, что многочлен  $g(x)$  степени  $n - 1$  делится на некоторый многочлен  $n$ -й степени, что возможно лишь при  $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ , т.е. система  $\{1\}, \{x\}, \dots, \{x^{n-1}\}$  линейно независима.



## $\mathbb{C}$ — расширение поля $\mathbb{R}$

**Замечание.** Построение поля с помощью вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена и аналоги доказанных теорем справедливы **не только в случае конечных полей**.

## $\mathbb{C}$ — расширение поля $\mathbb{R}$

**Замечание.** Построение поля с помощью вычетов по модулю некоторого неприводимого многочлена и аналоги доказанных теорем справедливы **не только в случае конечных полей**.

Например:

- 1 рассмотрим поле действительных чисел  $\mathbb{R}$  и кольцо многочленов  $\mathbb{R}[x]$  над ним;
- 2 в  $\mathbb{R}[x]$  возьмём неприводимый многочлен  $x^2 + 1$ ;
- 3 построим поле  $F$  как факторкольцо:  $F = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ ;
- 4  $F$  также и векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ; его базис —  $\{\{1\}, \{x\}\}$  и каждый его элемент  $z \in F$  можно представить в виде  $z = a\{1\} + b\{x\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- 5 поле  $F$  изоморфно полю **комплексных чисел**  
$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$
изоморфизм задаётся соответствием  $\{1\} \mapsto 1, \{x\} \mapsto i$ .

Подполя  $\mathbb{F}_p^n$ 

## Лемма

Если поле  $\mathbb{F}_p^n$  содержит подполе  $\mathbb{F}_p^k$ , то  $k \mid n$ .

Подполя  $\mathbb{F}_p^n$ 

## Лемма

Если поле  $\mathbb{F}_p^n$  содержит подполе  $\mathbb{F}_p^k$ , то  $k \mid n$ .

## Доказательство

Если поле  $\mathbb{k}_1$  содержится в поле  $(\mathbb{k}_1 \subset \mathbb{k}_2)$ , то элементы  $\mathbb{k}_2$  можно умножать на элементы из  $\mathbb{k}_1$ , а результаты складывать.

Поэтому поле  $\mathbb{k}_2$  является векторным пространством над полем  $\mathbb{k}_1$  некоторой размерности  $d$  — значит, в нём  $|\mathbb{k}_1|^d$  элементов.

Для нашего случая:  $p^n = (p^k)^d$ , что и означает  $k \mid n$ .

Ясно, что  $\mathbb{F}_p$  — всегда подполе  $\mathbb{F}_p^n$  (случай  $k = 1$ ).

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем**
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

## Минимальный многочлен

Рассмотрим поле  $\mathbb{F}_p^n$ , а в нём — какой-нибудь элемент  $\beta$  и будем интересоваться многочленами, для которых **ЭТОТ ЭЛЕМЕНТ является корнем**.

### Определение

Многочлен  $m_\beta(x)$  называется **минимальным (м.м.)** или **минимальной функцией для  $\beta$** , если это нормированный многочлен минимальной степени, из  $\mathbb{F}_p[x]$  для которого  $\beta$  является корнем.

Другими словами, должны выполняться три свойства:

- 1  $m_\beta(\beta) = 0$ ;
- 2  $\forall f(x) \in \mathbb{F}_p[x] : (\deg f(x) < \deg m_\beta(x) \Rightarrow f(\beta) \neq 0)$ ;
- 3 коэффициент при старшей степени в  $m_\beta(x)$  равен 1.

## Минимальный многочлен из неприводимого

Рассмотрим поле  $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ , порождаемое неприводимым многочленом  $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и убедимся, что многочлен  $a_n^{-1}a(x)$  — минимальный для элемента  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}_p^n$ .

## Минимальный многочлен из неприводимого

Рассмотрим поле  $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ , порождаемое неприводимым многочленом  $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и убедимся, что многочлен  $a_n^{-1}a(x)$  — минимальный для элемента  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}_p^n$ .

Действительно, с одной стороны —

$$a_0\bar{1} + a_1\bar{x} + \dots + a_n\bar{x}^n = \overline{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n} = 0,$$

т.е.  $\bar{x}$  — корень  $a(x)$ , а значит и  $a_n^{-1}a(x)$ .

С другой, пусть  $b(x) = b_0\bar{1} + b_1\bar{x} + \dots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} = 0$ .

Но тогда  $b_0\bar{1} + b_1\bar{x} + \dots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} = 0$ , т.е. имеем линейную зависимость между элементами  $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}\}$  — базиса поля  $\mathbb{F}_p^n$  как векторного пространства над  $\mathbb{F}_p$ , откуда  $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ .



## Минимальный многочлен из неприводимого

Рассмотрим поле  $\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(a(x))$ , порождаемое неприводимым многочленом  $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и убедимся, что многочлен  $a_n^{-1}a(x)$  — минимальный для элемента  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}_p^n$ .

Действительно, с одной стороны —

$$a_0\bar{1} + a_1\bar{x} + \dots + a_n\bar{x}^n = \overline{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n} = 0,$$

т.е.  $\bar{x}$  — корень  $a(x)$ , а значит и  $a_n^{-1}a(x)$ .

С другой, пусть  $b(x) = b_0\bar{1} + b_1\bar{x} + \dots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} = 0$ .

Но тогда  $b_0\bar{1} + b_1\bar{x} + \dots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} = 0$ , т.е. имеем линейную зависимость между элементами  $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}\}$  — базиса поля  $\mathbb{F}_p^n$  как векторного пространства над  $\mathbb{F}_p$ , откуда  $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ .

$$\overline{x^2} = \bar{x}^2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \overline{x^{n-1}} = (0, \dots, 0, 1)$$

## Свойства минимальных многочленов

### Утверждение

Минимальные многочлены *неприводимы*.

## Свойства минимальных многочленов

### Утверждение

Минимальные многочлены *неприводимы*.

### Доказательство

Пусть  $m_\beta(x)$  — м.м. для  $\beta$  и  $m_\beta(x) = m_1(x)m_2(x)$ .

Тогда

$$m_\beta(\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1(\beta) = 0 \\ m_2(\beta) = 0 \end{cases},$$

но  $\deg m_1 < \deg m$  и  $\deg m_2 < \deg m \Rightarrow \beta$  не может быть корнем ни  $m_1(x)$ , ни  $m_2(x)$ .

## Свойства минимальных многочленов...

## Утверждение

Пусть в некотором поле Галуа  $m_\beta(x)$  — м.м. для элемента  $\beta$ , а  $f(x)$  — многочлен такой, что  $f(\beta) = 0$ .

Тогда  $f(x)$  делится на  $m_\beta(x)$ .

## Свойства минимальных многочленов...

## Утверждение

Пусть в некотором поле Галуа  $m_\beta(x)$  — м.м. для элемента  $\beta$ , а  $f(x)$  — многочлен такой, что  $f(\beta) = 0$ .

Тогда  $f(x)$  делится на  $m_\beta(x)$ .

## Доказательство

Разделим  $f(x)$  на  $m_\beta(x)$  с остатком:

$$f(x) = u(x)m_\beta(x) + v(x), \quad \deg v < \deg m.$$

Подставляя в это равенство  $\beta$ , получаем

$$0 = f(\beta) = u(\beta) \underbrace{m_\beta(\beta)}_{=0} + v(\beta) = v(\beta),$$

т.е.  $\beta$  — корень  $v(x)$ , что противоречит минимальности  $m_\beta(x)$ .

## Свойства минимальных многочленов...

## Следствие

Для каждого элемента поля существует *не более одного м.м.*

## Свойства минимальных многочленов...

### Следствие

Для каждого элемента поля существует *не более одного м.м.*

### Доказательство

Пусть минимальных многочленов два.

Они взаимно делят друг друга, а значит, различаются на обратимый множитель-константу.

Поскольку минимальный многочлен нормирован, эта константа равна 1, т.е. данные многочлены совпадают.

## Свойства минимальных многочленов...

## Утверждение

*Для каждого элемента  $\beta$  поля  $\mathbb{F}_p^n$  существует (единственный) м.м. и его степень не превосходит  $n$ .*



## Свойства минимальных многочленов...

## Утверждение

Для каждого элемента  $\beta$  поля  $\mathbb{F}_p^n$  существует (единственный) м.м. и его степень не превосходит  $n$ .

## Доказательство

Рассмотрим следующие элементы поля  $\mathbb{F}_p^n$ :  $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$  — их  $n+1$  штука, а размерность  $\mathbb{F}_p^n$  как векторного пространства равна  $n \Rightarrow$  эти элементы **линейно зависимы**, т.е. существуют такие не все равные 0 коэффициенты  $c_0, \dots, c_n$ , что

$$c_0 + c_1\beta + \dots + c_n\beta^n = 0,$$

$\Rightarrow \beta$  — корень многочлена  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ .

Минимальным многочленом для  $\beta$  будет некоторый **нормированный неприводимый делитель**  $f(x)$  (т.е.  $f(x) \in \mathbb{F}_p^n$ ).

## Многочлены над конечным полем: свойства

### Теорема

Любой ненулевой элемент поля  $\mathbb{F}_p^n$  является корнем многочлена  $x^{p^n-1} - 1$ , т.е.

$$x^{p^n-1} - 1 = (x - \beta_1) \cdot \dots \cdot (x - \beta_{p^n-1}),$$

где  $\{\beta_1, \dots, \beta_{p^n-1}\} = \mathbb{F}_p^{n*} = \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ .

## Многочлены над конечным полем: свойства

### Теорема

Любой ненулевой элемент поля  $\mathbb{F}_p^n$  является корнем многочлена  $x^{p^n-1} - 1$ , т.е.

$$x^{p^n-1} - 1 = (x - \beta_1) \cdot \dots \cdot (x - \beta_{p^n-1}),$$

где  $\{\beta_1, \dots, \beta_{p^n-1}\} = \mathbb{F}_p^{n*} = \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ .

### Доказательство

$\mathbb{F}_p^{n*}$  — циклическая группа по умножению порядка  $p^n - 1$ .

Порядок  $\deg \alpha$  **любого** элемента  $\alpha \in \mathbb{F}_p^{n*}$  (т.е. порядок циклической подгруппы  $\langle \alpha \rangle$ ) по теореме Лагранжа делит порядок группы.

Поэтому  $p^n - 1 = q \cdot \deg \alpha$ ,  $\alpha^{\deg \alpha} = 1$  и

$$\alpha^{p^n-1} - 1 = \alpha^{q \deg \alpha} - 1 = (\alpha^{\deg \alpha})^q - 1 = 1^q - 1 = 0.$$

## Многочлены над конечным полем: свойства...

## Следствие (теорема Ферма)

*Все элементы поля  $\mathbb{F}_p^n$ , не исключая нуля, являются корнями многочлена  $x^{p^n} - x$ .*

## Многочлены над конечным полем: свойства...

### Следствие (теорема Ферма)

Все элементы поля  $\mathbb{F}_p^n$ , не исключая нуля, являются корнями многочлена  $x^{p^n} - x$ .

### Доказательство

Вынесем  $x$  за скобку:

$$x^{p^n} - x = x(x^{p^n-1} - 1).$$

У второго сомножителя корнями будут все ненулевые элементы, а у первого — 0.

## Многочлены над конечным полем: свойства...

## Теорема

*В кольце многочленов над конечным полем*

$$(x^n - 1) \dot{=} (x^m - 1) \Leftrightarrow n \dot{=} m.$$

## Многочлены над конечным полем: свойства...

### Теорема

*В кольце многочленов над конечным полем*

$$(x^n - 1) \dot{:} (x^m - 1) \Leftrightarrow n \dot{:} m.$$

### Доказательство

- Пусть  $n = mk$ . Сделаем замену  $x^m = y$ , тогда  $x^n - 1 = y^k - 1$  и  $x^m - 1 = y - 1$ . Делимость очевидна.

## Многочлены над конечным полем: свойства...

### Теорема

В кольце многочленов над конечным полем

$$(x^n - 1) \dot{:} (x^m - 1) \Leftrightarrow n \dot{:} m.$$

### Доказательство

- Пусть  $n = mk$ . Сделаем замену  $x^m = y$ , тогда  $x^n - 1 = y^k - 1$  и  $x^m - 1 = y - 1$ . Делимость очевидна.
- Предположим, что  $n \not\dot{:} m$ , т.е.  $n = km + r$ ,  $0 < r < m$ , тогда

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= \frac{x^r (x^{mk} - 1)(x^m - 1)}{x^m - 1} + x^r - 1 = \\ &= \frac{x^r (x^{mk} - 1)}{x^m - 1} (x^m - 1) + x^r - 1. \end{aligned}$$



## Многочлены над конечным полем: свойства...

Последнее выражение задает результат деления  $x^n - 1$  на  $x^m - 1$  *с остатком*, поскольку  $x^{mk} - 1$  делится на  $x^m - 1$  по доказанному выше.

Остаток  $x^r - 1 \neq 0$  в силу сделанных предположений.

$\therefore x^n - 1$  *не делится* на  $x^m - 1$ .

## Многочлены над конечным полем: свойства...

Последнее выражение задает результат деления  $x^n - 1$  на  $x^m - 1$  **с остатком**, поскольку  $x^{mk} - 1$  делится на  $x^m - 1$  по доказанному выше.

Остаток  $x^r - 1 \neq 0$  в силу сделанных предположений.

$\therefore x^n - 1$  **не делится** на  $x^m - 1$ .

Теорема даёт возможность раскладывать многочлены  $x^n - 1$  при **составных**  $n$ .

Например, разложим  $x^{15} + 1$  в  $\mathbb{F}_2[x]$  (где  $-1 = +1$ ):

$$x^{15} + 1 = (x^3 + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1),$$

$$x^{15} + 1 = (x^5 + 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Возможность раскладывать многочлены **специального вида** на **неприводимые** даёт следующая теорема.

## Разложение многочленов на неприводимые

## Теорема

Все *неприводимые* многочлены  $n$ -й степени из  $\mathbb{F}_p[x]$  делят многочлен  $x^{p^n} - x$ .

## Разложение многочленов на неприводимые

### Теорема

Все **неприводимые** многочлены  $n$ -й степени из  $\mathbb{F}_p[x]$  делят многочлен  $x^{p^n} - x$ .

### Доказательство

$n = 1$ . Убеждаемся, что  $(x - a) \mid (x^p - x)$ , где  $a \in \mathbb{F}_p$ : при  $a = 0$  это очевидно, а в остальных случаях доказано, что  $a$  — корень многочлена  $x^{p-1} - 1 = (x^p - x)/x$ .

## Разложение многочленов на неприводимые

### Теорема

Все **неприводимые** многочлены  $n$ -й степени из  $\mathbb{F}_p[x]$  делят многочлен  $x^{p^n} - x$ .

### Доказательство

- $n = 1$ . Убеждаемся, что  $(x - a) \mid (x^p - x)$ , где  $a \in \mathbb{F}_p$ : при  $a = 0$  это очевидно, а в остальных случаях доказано, что  $a$  — корень многочлена  $x^{p-1} - 1 = (x^p - x)/x$ .
- $n > 1$ . Строим по неприводимому и (без ограничения общности — нормированному) многочлену  $f(x)$  степени  $n$  поле  $\mathbb{F}_p^n$ . В этом поле  $\bar{x}$  — корень **и**  $f(x)$ , **и**  $x^{p^n-1} - 1$ , причём  $f(x)$  — м.м. для него. По свойствам м.м.  $x^{p^n-1} - 1$  делится на  $f(x)$ .

## Пример: разложение $x^{15} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$

Проверяем степени 2:

$$2^4 - 1 = 15 | 15, \quad 2^3 - 1 = 7 \nmid 15, \quad 2^2 - 1 = 3 | 15, \quad 2^1 - 1 = 1 | 15,$$

- ①  $x(x^{15} + 1) = x^{2^4} + x$ , откуда все неприводимые многочлены 4-й степени будут делителями  $x^{16} + x$  и, следовательно,  $x^{15} + 1$ . Таких многочленов 3:

$$x^4 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

- ②  $x(x^3 + 1) = x^{2^2} + x$ , откуда все неприводимые многочлены 2-й степени будут делителями  $x^4 + x$  и, следовательно,  $x^3 + 1$ . Такой многочлен только один:  $x^2 + x + 1$ .

- ③  $x(x^1 + 1) = x^{2^1} + x$ , откуда (тривиально) единственный неприводимый многочлен 1-й степени  $x + 1$  делит  $x^2 + x$ .

Итого: разложение  $x^{15} - 1$  на неразложимые над  $\mathbb{F}_2$  многочлены —  
 $x^{15} + 1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ .

## Многочлены над конечным полем...

### Теорема

*Любой неприводимый многочлен-делитель  $x^{p^n-1} - 1$  имеет степень, не превосходящую  $n$ .*

Если делящий  $x^{p^n-1} - 1$  неприводимый многочлен имеет степень равную  $n$ , то он называется **примитивным многочленом**.

## Многочлены над конечным полем...

### Теорема

Любой неприводимый многочлен-делитель  $x^{p^n-1} - 1$  имеет степень, не превосходящую  $n$ .

Если делящий  $x^{p^n-1} - 1$  неприводимый многочлен имеет степень равную  $n$ , то он называется **примитивным многочленом**.

### Доказательство

Пусть  $\varphi$  — неприводимый делитель  $x^{p^n} - x$  степени  $k$ .

Тогда  $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_p/(\varphi)$  — поле, которое рассмотрим как векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$  с базисом  $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \overline{x^{k-1}}\}$ .



## Многочлены над конечным полем...

Обозначим  $\bar{x} = \alpha$ . Поскольку  $(x^{p^n} - x) \vdots \varphi$ , то в  $F$  имеем  $\alpha^{p^n} - \alpha = 0$ .

Любой элемент  $F$  выражается через базис:  $\beta = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i$ .

Возведя обе части этого равенства в степень  $p^n$ , получим

$$\beta^{p^n} = \left( \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i \right)^{p^n} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \alpha^i = \beta,$$

т.е.  $\beta$  — корень уравнения

$$x^{p^n} - x = 0. \quad (*)$$

Итак, каждый элемент поля  $F$  является корнем (\*), но у (\*) не более  $p^n$  различных корней, а  $|F| = p^k \therefore n \geq k$ .

## Многочлены над конечным полем...

## Утверждение

Пусть  $\beta \in \mathbb{F}_p^n$  имеет порядок  $l$ , а его м.м.  $m(x)$  имеет степень  $k$ .

Тогда ❶  $(p^k - 1) \vdots l$ , а если  $r < k$ , то ❷  $(p^r - 1) \nmid l$ .

## Многочлены над конечным полем...

### Утверждение

Пусть  $\beta \in \mathbb{F}_p^n$  имеет порядок  $l$ , а его м.м.  $m(x)$  имеет степень  $k$ .

Тогда ①  $(p^k - 1) \vdots l$ , а если  $r < k$ , то ②  $(p^r - 1) \nmid l$ .

### Доказательство

① По неприводимому многочлену  $k$ -й степени  $m(x)$  строим поле из  $p^k$  элементов. Все его ненулевые элементы, в том числе и  $\beta$ , являются корнями уравнения  $x^{p^k-1} - 1 = 0$ , т.е.  $\beta^{p^k-1} - 1 = 0$  и  $\beta^{p^k-1} = 1$ , но  $\deg \beta = l \Rightarrow l \mid (p^k - 1)$ .

② Пусть  $(p^r - 1) \vdots l$  и  $r < k$ . Тогда  $\beta$  — корень уравнения  $x^{p^r} - 1 = 0$ , а т.к.  $m(x)$  — м.м. для  $\beta$ , то  $(x^{p^r} - 1) \vdots m(x)$  (было доказано)  $\Rightarrow$  найден неприводимый делитель  $x^{p^r} - 1$  степени  $k$ , но  $k > r \Rightarrow$  противоречие доказанному ранее.

## Многочлены над конечным полем...

Следующая теорема позволяет раскладывать многочлены на множители.

### Теорема (свойство корней неприводимого многочлена)

Пусть  $\beta$  — корень неприводимого многочлена  $f(x)$  степени  $n$  с коэффициентами из  $\mathbb{F}_p$ . Тогда элементы  $\beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \dots, \beta^{p^{n-1}}$ :

① все различны; ② исчерпывают список всех  $n$  корней  $f(x)$  (их называют *смежными*).

Т.е. чтобы получить все корни **неприводимого** многочлена, достаточно **найти один из них и возводить его последовательно в степень  $p$** .

## Многочлены над конечным полем...

Следующая теорема позволяет раскладывать многочлены на множители.

### Теорема (свойство корней неприводимого многочлена)

Пусть  $\beta$  — корень неприводимого многочлена  $f(x)$  степени  $n$  с коэффициентами из  $\mathbb{F}_p$ . Тогда элементы  $\beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \dots, \beta^{p^{n-1}}$ :

① все различны; ② исчерпывают список всех  $n$  корней  $f(x)$  (их называют *смежными*).

Т.е. чтобы получить все корни **неприводимого** многочлена, достаточно **найти один из них и возводить его последовательно в степень  $p$** .

### Доказательство

① Покажем, что если  $\beta$  — корень  $f(x)$ , то  $\beta^p$  — тоже корень.

## Многочлены над конечным полем...

Поскольку  $a^p = a$  для всех  $a \in \mathbb{F}_p$ , то справедливо

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k)^p &= a_0^p + a_1^p x^p + a_2^p x^{2p} + \dots + a_k^p x^{kp} = \\ &= a_0 + a_1(x^p) + a_2(x^p)^2 + \dots + a_k(x^p)^k,\end{aligned}$$

т.е. для любого многочлена  $\varphi(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  выполняется равенство

$$(\varphi(x))^p = \varphi(x^p). \quad (*)$$

Отсюда:

$$f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta)^p = 0 \Leftrightarrow f(\beta^p) = 0$$

и  $\beta, \beta^p, \dots, \beta^{p^{n-1}}$  — корни многочлена  $f(x)$ .

## Многочлены над конечным полем...

② Осталось доказать, что все  $\beta, \beta^p, \dots, \beta^{p^{n-1}}$  различны, и тогда (многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  корней) можно утверждать, что найдены **все** корни многочлена  $f(x)$ .

Предположим, что  $\beta^{p^l} = \beta^{p^k}$  и без ограничения общности  $l < k$ . Имеем:

①  $\beta^{p^n} = \beta;$

② поскольку

$$\beta^{p^n} = \beta^{p^k \cdot p^{n-k}} = (\beta^{p^k})^{p^{n-k}} = (\beta^{p^l})^{p^{n-k}} = \beta^{p^{n-k+l}},$$

то  $\beta$  — корень уравнения  $x^{p^{n-k+l}-1} - 1 = 0$ .

Из теоремы «Все неприводимые многочлены  $n$ -й степени над  $\mathbb{F}_p$  являются делителями  $x^{p^n} - x$ » получаем  $n - k + l \geq n \Rightarrow l \geq k$  — противоречие.

## Многочлены над конечным полем: решение уравнений

**Пример**

Задача. Найти корни неприводимого над  $\mathbb{F}_2$  многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1$$



## Многочлены над конечным полем: решение уравнений

**Пример**

Задача. Найти корни неприводимого над  $\mathbb{F}_2$  многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1$$

Решение. Один корень получаем немедленно:  $x$  (или  $\bar{x}$ ).

## Многочлены над конечным полем: решение уравнений

**Пример**

**Задача.** Найти корни неприводимого над  $\mathbb{F}_2$  многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1$$

**Решение.** Один корень получаем немедленно:  $x$  (или  $\bar{x}$ ).

По только что доказанной теореме можно выписать остальные:

$$x^2, \quad x^4 = x^3 + 1, \quad x^8 = x^6 + 1 = x^3 + x^2 + x.$$

## Многочлены над конечным полем: решение уравнений

## Пример

**Задача.** Найти корни неприводимого над  $\mathbb{F}_2$  многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 + 1$$

**Решение.** Один корень получаем немедленно:  $x$  (или  $\bar{x}$ ).

По только что доказанной теореме можно выписать остальные:

$$x^2, \quad x^4 = x^3 + 1, \quad x^8 = x^6 + 1 = x^3 + x^2 + x.$$

Покажем, что, например,  $x^2$  — действительно корень  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x^2) &= x^4 + x^3 + 1 \Big|_{x \mapsto x^2} = x^{4 \cdot 2} + x^{4+2} + 1 \Big|_{x^4 \mapsto x^3+1} = \\ &= (x^3 + 1)^2 + (x^3 + 1)x^2 + 1 = x^6 + 1 + x^5 + x^2 + 1 = \\ &= x^6 + x^5 + x^2 = x^2(x^4 + x^3 + 1) = x^2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Как решать уравнения  $f(x) = 0$ , когда корней нет?

## Алгоритм нахождения всех корней многочлена

$$f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$$

- 1 Разложить  $f(x)$  на неприводимые множители над  $\mathbb{F}_p$ :

$$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_k(x).$$

- 2 Для каждого многочлена  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, k}$  рассмотреть расширение  $\mathbb{F}_p[x]/(g_i(x))$ , в котором он будет иметь корни

$$x = \alpha, \alpha^p, \dots, \alpha^{p^{\deg g_i - 1}}.$$

Записать данные корни как многочлены из  $\mathbb{F}_p[x]/(g_i(x))$ .

- 3 Объединить все корни в одном общем расширении  $\mathbb{F}_p^m$ , где  $m = \text{НОК}(\deg g_1, \deg g_2, \dots, \deg g_k)$ .

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов**
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства**
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями**
- 8 Что надо знать

## Разделы

- 1 Поля вычетов по модулю простого числа
- 2 Вычисление элементов в конечных полях
- 3 Линейная алгебра над конечным полем
- 4 Корни многочленов над конечным полем
- 5 Существование и единственность поля Галуа из  $p^n$  элементов
- 6 Циклические подпространства
- 7 Задачи с решениями
- 8 Что надо знать**