Прикладная статистика 12. Последовательный анализ.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com

5 мая 2014 г.

Z-критерий для доли

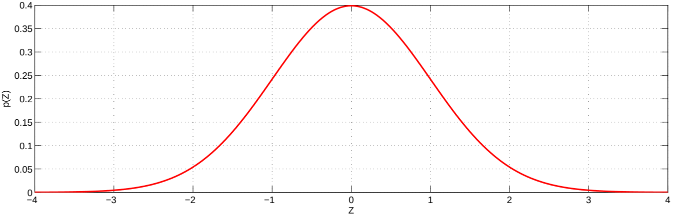
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim Ber(p);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p = p_0;$

альтернатива: $H_1\colon p > p_0;$

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad \hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$

$Z(X^n) \sim N(0,1)$ при $H_0;$



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = 1 - ncdf(z, 0, 1).$$

Z-критерий для доли

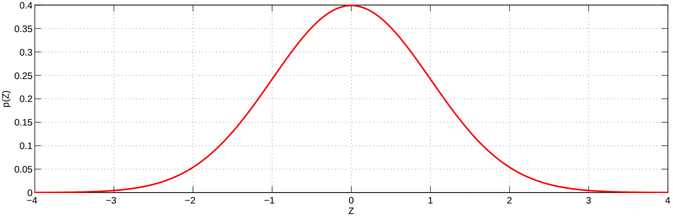
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \sim Ber(p);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p \le p_0;$

альтернатива: $H_1\colon p > p_0;$

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad \hat{p} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i;$

$Z(X^n) \sim N(0,1)$ при $p = p_0$ (наименее благоприятная конфигурация);



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = 1 - ncdf(z, 0, 1).$$

Z-критерий для доли

Пример: рекламная кампания планировалась так, чтобы обеспечить узнаваемость продукта среди целевой аудитории более 30%. После окончания кампании проводится опрос с целью оценки узнаваемости.

H_0: узнаваемость продукта не превышает 30%.
H_1: узнаваемость продукта превышает 30%.

Как выбрать наименьший достаточный объём выборки?
Например, если истинная узнаваемость составляет 35%, то при уровне значимости 0.05 для обеспечения мощности 0.8 нужно опросить 534 человек.

Постановка задачи последовательного анализа

$$\text{выборка:}\quad X^m = (X_1, \ldots, X_m)\,, X_i \sim Ber\,(p)\,.$$

Фиксируем «коридор» отклонений значения параметра p от p_0, которые можно считать несущественными:

$$p_L \le p_0 \le p_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

$$\begin{aligned} \text{нулевая гипотеза:}\quad & H_0 : p \le p_L; \\ \text{альтернатива:}\quad & H_1 : p \ge p_U\,. \end{aligned}$$

Пусть данные поступают постепенно.
Задача: построить проверку гипотез так, чтобы обойтись как можно меньшим объёмом выборки.

Анонс: процедура последовательного анализа при тех же значениях мощности и уровня значимости позволяет обойтись меньшим (иногда вдвое) объёмом выборки.

Процедура последовательного анализа

Поскольку размер выборки не фиксирован, мы можем фиксировать вероятности ошибок обоих родов:
α — уровень значимости — допускаемая вероятность ошибки первого рода,
β — допускаемая вероятность ошибки второго рода.

$$\text{статистика:} \quad d_m\left(X^m\right) = \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

Введём следующие обозначения:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

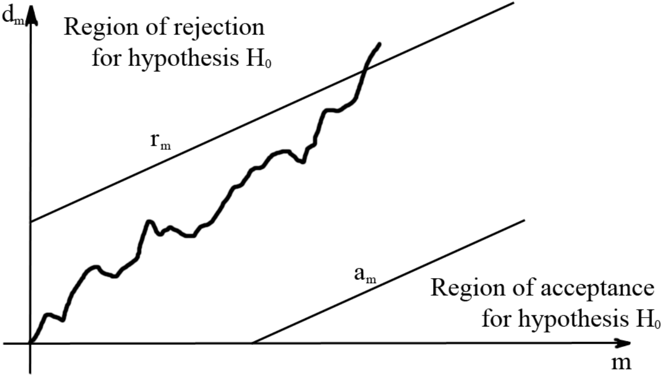
$$a_m = \frac{\ln B + m \ln \frac{1-p_L}{1-p_U}}{\ln \frac{p_U}{p_L} - \ln \frac{1-p_U}{1-p_L}},$$

$$r_m = \frac{\ln A + m \ln \frac{1-p_L}{1-p_U}}{\ln \frac{p_U}{p_L} - \ln \frac{1-p_U}{1-p_L}}.$$

Процедура последовательного анализа

При каждом значении m:

- $d_m \geq r_m \Rightarrow$ отвергаем H_0, $p \geq p_U$;
- $d_m \leq a_m \Rightarrow$ принимаем H_0, $p \leq p_L$;
- $a_m < d_m < r_m \Rightarrow$ процесс продолжается, добавляем элемент выборки.



Момент остановки

На каком элементы выборки n произойдёт остановка процедуры?

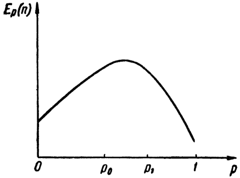
n — случайная величина, можно говорить о её матожидании:

$$\mathbb{E}_p(n) = \frac{L(p)\ln B + (1 - L(p))\ln A}{p \ln \frac{p_U}{p_L} + (1-p)\ln \frac{1-p_U}{1-p_L}},$$

$$L(p) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \text{ —}$$

оперативная характеристика — вероятность принять нулевую гипотезу при условии, что p — истинное значение параметра; h определяется как решение уравнения:

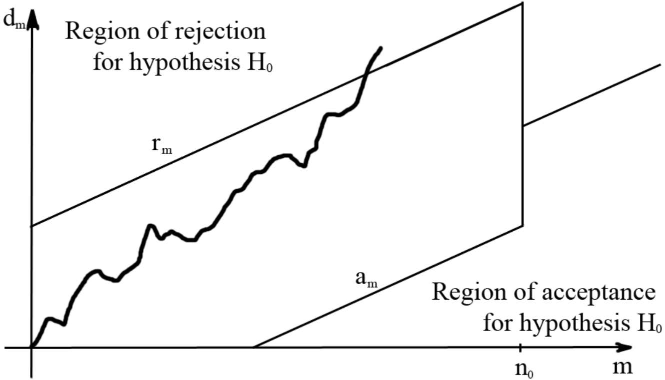
$$p = \frac{1 - \left(\frac{1-p_U}{1-p_L}\right)^h}{\left(\frac{p_U}{p_L}\right)^h - \left(\frac{1-p_U}{1-p_L}\right)^h}.$$



Усечение

Если при $m = n_0$ решение ещё не принято, но возможности добавлять элементы выборки больше нет, используем следующий критерий:

- $d_m \geq \frac{a_{n_0}+r_{n_0}}{2} \Rightarrow$ отвергаем H_0, $p \geq p_U$;
- $d_m \leq \frac{a_{n_0}+r_{n_0}}{2} \Rightarrow$ принимаем H_0, $p \leq p_L$.



Группировка наблюдений

Наблюдения могут поступать группами $g_1, g_2, \ldots$ по v элементов. Тогда значения статистики d_m сравниваются с a_m, r_m только при $m = v, 2v, \ldots$.

Последствия:

- увеличивается размер выборки, при котором происходит остановка;
- истинные вероятности ошибок могут оказаться больше номинальных, но при этом
$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{1-\beta}, \quad \beta' \leq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$
Так как величины α и β обычно малы, отклонением можно пренебречь.

Z-критерий для двух долей

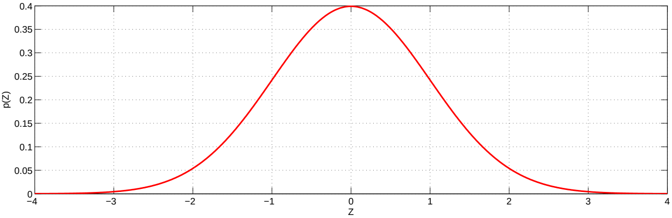
выборки: $X_1^{n_1} = \left(X_{11}, \ldots, X_{1n_1}\right), X_{1i} \sim Ber\left(p_1\right);$
$X_2^{n_2} = \left(X_{21}, \ldots, X_{2n_2}\right), X_{2i} \sim Ber\left(p_2\right);$

нулевая гипотеза: $H_0\colon p_1 \geq p_2;$

альтернатива: $H_1\colon p_1 < p_2;$

статистика: $Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \quad P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1+n_2};$

$Z\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) \sim N(0,1)$ при $p_1 = p_2$ (наименее благоприятная конфигурация);



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(z\right) = 1 - ncdf\left(z, 0, 1\right).$$

Z-критерий для двух долей

Пример: имеются два технологических процесса, классический и модернизированный, p_1, p_2 — доли брака в них.

$H_0:$ доля брака в классическом процессе не меньше доли брака в модернизированном.
$H_1:$ доля брака в классическом процессе меньше доли брака в модернизированном.

Аналог в последовательном анализе

Пусть значения x_{1i}, x_{2i} поступают парами.
Будем рассматривать только различающиеся пары — $(0,1)$ и $(1,0)$, а остальные будем отбрасывать.

$k_1 = \frac{p_1}{1-p_1}$, $k_2 = \frac{p_2}{1-p_2}$ — риски,
$u = \frac{k_2}{k_1} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}$ — относительный риск:

- $u = 1 \Leftrightarrow p_1 = p_2$,
- $u > 1 \Leftrightarrow p_1 > p_2$,
- $u < 1 \Leftrightarrow p_1 < p_2$.

Фиксируем «коридор» отклонений u от 1, которые можно считать незначимыми:

$$u_L \leq 1 \leq u_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0\colon u \geq u_U$;
альтернатива: $H_1\colon u \leq u_L$;
статистика: $d_m\left(X_1^m, X_2^m\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(1 - X_{1i}\right) X_{2i}$.

Аналог в последовательном анализе

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{\ln B + m \ln \frac{1-u_U}{1-u_L}}{\ln u_U - \ln u_L},$$

$$r_m = \frac{\ln A + m \ln \frac{1-u_U}{1-u_L}}{\ln u_U - \ln u_L}.$$

Момент остановки:

$$\mathbb{E}_u(n) = \frac{L(u)\ln B + (1 - L(u))\ln A}{\frac{u}{u+1}\ln\frac{u_U(1+u_L)}{u_L(1+u_U)} + \frac{1}{u+1}\ln\frac{1+u_L}{1+u_U}} \Bigg/ \left(p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)\right),$$

$$L(u) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h},$$

h определяется как решение уравнения

$$\frac{u}{u+1} = \frac{1 - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}{\left(\frac{u_U(1+u_L)}{u_l(1+u_U)}\right)^h - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}.$$

Группировка наблюдений

Наблюдения могут поступать группами $g_1, g_2, \ldots$ пар выборок по v элементов. Если при этом внутри пар выборок не указаны соответствия элементов (x_{1i}, x_{2i}), статистику d_m вычислить невозможно.

Пусть $v_1\left(g_i\right)$ — число успехов в выборке из v наблюдений над первой биномиальной совокупностью в группе g_i, $v_2(g_i)$ — над второй. Тогда для этой пары групп в качестве оценки числа пар $(0, 1)$ примем величину $v_2(g_i) - \frac{v_1(g_i)v_2(g_i)}{v}$.

$$d_{g_m} = \sum_{i=1}^{g_m} \left(v_2(g_i) - \frac{v_1\left(g_i\right) v_2\left(g_i\right)}{v} \right).$$

Последствия: аналогичные.

Z-критерий для среднего нормального распределения, односторонняя альтернатива

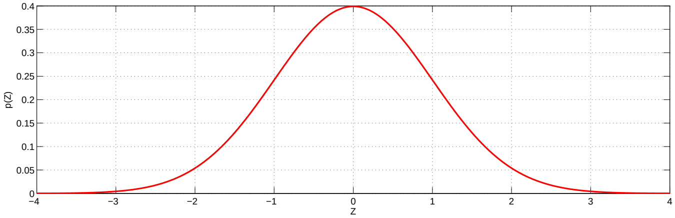
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu \leq \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mu > \mu_0$;

статистика: $Z\left(X^n\right) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$;

$Z\left(X^n\right) \sim N(0,1)$ при $\mu = \mu_0$ (наименее благоприятная конфигурация);



достигаемый уровень значимости:

$$p(z) = 1 - ncdf(z, 0, 1).$$

Z-критерий для среднего нормального распределения, односторонняя альтернатива

Пример: при помощи прибора с известной погрешностью σ измеряется концентрация вредного вещества в образце. Необходимо проверить, что она не превышает предельно допустимой.

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем «коридор» отклонений μ от μ_0, которые можно считать незначимыми:

$$\mu_L \leq \mu_0 \leq \mu_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu \leq \mu_L;$

альтернатива: $H_1\colon \mu \geq \mu_U;$

статистика: $d_m\left(X^m\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i.$

Аналог в последовательном анализе

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{\sigma^2}{\mu_U - \mu_L} \ln B + m \frac{\mu_U + \mu_L}{2},$$

$$r_m = \frac{\sigma^2}{\mu_U - \mu_L} \ln A + m \frac{\mu_U + \mu_L}{2},$$

Момент остановки:

$$\mathbb{E}_\mu (n) = \frac{L(\mu) \ln B \, (1 - L(\mu)) \ln A}{\mu_L^2 - \mu_U^2 + 2 \left(\mu_U - \mu_L\right) \mu},$$

$$L(\mu) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h},$$

$$h = \frac{\mu_U + \mu_L - 2\mu}{\mu_U - \mu_L}.$$

Z-критерий для среднего нормального распределения, двусторонняя альтернатива

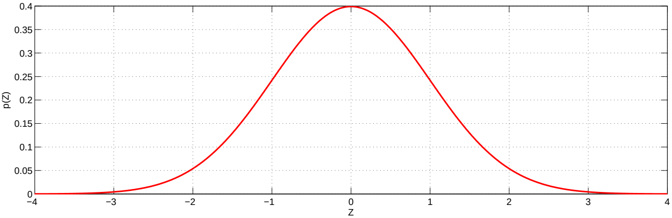
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,, X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \sigma$ известна;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \mu = \mu_0$;

альтернатива: $H_1\colon \mu \neq \mu_0$;

статистика: $Z\left(X^n\right) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$;

$Z\left(X^n\right) \sim N(0,1)$ при H_0;



достигаемый уровень значимости:

$$p\left(z\right) = 2\left(1 - ncdf(|z|, 0, 1)\right).$$

Z-критерий для среднего нормального распределения, двусторонняя альтернатива

Пример: многократные измерения прибором с известной погрешностью для проверки наличия у прибора смещения.

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем симметричный «коридор» отклонений μ от μ_0, которые можно считать незначимыми:

$$\left|\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right| \leq \delta.$$

$$\begin{aligned} \text{нулевая гипотеза:} \quad & H_0: \left|\tfrac{\mu-\mu_0}{\sigma}\right| \leq \delta; \\ \text{альтернатива:} \quad & H_1: \left|\tfrac{\mu-\mu_0}{\sigma}\right| > \delta; \\ \text{статистика:} \quad & d_m\left(X^m\right) = \ln \operatorname{ch}\left(\tfrac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \mu_0\right)\right). \end{aligned}$$

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \ln B + m\frac{\delta^2}{2},$$

$$r_m = \ln A + m\frac{\delta^2}{2}.$$

Критерий хи-квадрат

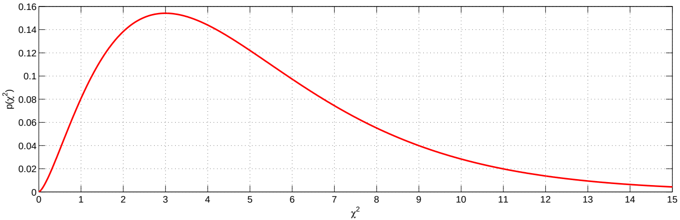
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ известно;

нулевая гипотеза: $H_0\colon \sigma \leq \sigma_0$;

альтернатива: $H_1\colon \sigma > \sigma_0$;

статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$;

$\chi^2(X^n) \sim \chi^2_{n-1}$ при $\sigma = \sigma_0$ (наименее благоприятная конфигурация);



достигаемый уровень значимости:

$$p(\chi^2) = 1 - chi2cdf(\chi^2, n-1).$$

Критерий хи-квадрат

Пример: не превышает ли погрешность прибора заявленного уровня?

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем «коридор» отклонений σ от σ_0, которые можно считать незначимыми:

$$\sigma_L \leq \sigma_0 \leq \sigma_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

$$\begin{aligned} \text{нулевая гипотеза:} \quad & H_0 \colon \sigma \leq \sigma_L; \\ \text{альтернатива:} \quad & H_1 \colon \sigma \geq \sigma_U; \\ \text{статистика:} \quad & d_m\left(X^m\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \mu\right)^2. \end{aligned}$$

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{2 \ln B + m \ln \frac{\sigma_U^2}{\sigma_L^2}}{\frac{1}{\sigma_L^2} - \frac{1}{\sigma_U^2}},$$

$$r_m = \frac{2 \ln A + m \ln \frac{\sigma_U^2}{\sigma_L^2}}{\frac{1}{\sigma_L^2} - \frac{1}{\sigma_U^2}}.$$

Случай неизвестного среднего

Если среднее неизвестно, предлагается использовать его выборочную оценку:

$$\text{статистика:} \quad d_m\left(X^m\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

При этом в последовательном анализе на m-м шаге вместо констант a_m, r_m необходимо использовать a_{m-1}, r_{m-1}.

Доверительный интервал для среднего

Дано: $X_1, \dots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad \mu, \sigma$ неизвестны.

Требуется: построить доверительный интервал J для среднего μ фиксированной длины $2d$:

$$P\left(\mu \in J\right) \geq 1 - \alpha \;\; \forall \mu, \sigma.$$

При фиксированном n и неизвестном σ решения не существует (Данциг, 1940).

Последовательные доверительные интервалы для среднего

При известном σ:

$$J_n = \left[\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d\right],$$

$$P\left(\mu \in J_n\right) = P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \leq d\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}\left|\bar{X}_n - \mu\right|}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}d}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}d/\sigma\right) - 1;$$

$$2\Phi\left(\sqrt{n}d/\sigma\right) - 1 \geq 1 - \alpha = 2\Phi\left(z_{1-\alpha/2}\right) - 1;$$

так как Φ монотонна,

$$\frac{\sqrt{n}d}{\sigma} \geq z_{1-\alpha/2}^2 \Rightarrow n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}\sigma^2}{d^2} \equiv C.$$

C — минимальный размер выборки, при котором J_n имеет уровень доверия $1 - \alpha$.

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Двухэтапная процедура Стейна.

1. $X_1, \dots, X_m$ — пилотная выборка, $m \geq 2$, S_m^2 — оценка дисперсии по ней.
2. Определим, сколько нужно добавить наблюдений:

$$\hat{C} = \frac{t^2_{1-\alpha/2,m-1} S_m^2}{d^2},$$
$$N = \max\left(\left[\hat{C}\right] + 1, m\right),$$

$J_N = \left[\bar{X}_N - d, \bar{X}_N + d\right]$ — искомый $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для μ.

$$\frac{t^2_{1-\alpha/2,m-1}}{z^2_{1-\alpha/2}} C \leq \mathbb{E}_{\mu,\sigma}\left(N\right) \leq \frac{t^2_{1-\alpha/2,m-1}}{z^2_{1-\alpha/2}} C + m.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Двухэтапная процедура состоятельна:

$$P_{\mu,\sigma}\left(\mu \in J_N\right) \geq 1-\alpha,$$

и асимптотически состоятельна:

$$\lim_{d\to 0} P_{\mu,\sigma}\left(\mu \in J_N\right) = 1-\alpha,$$

но асимптотически неэффективна:

$$\lim_{d\to 0} \mathbb{E}_{\mu,\sigma}\left(\frac{N}{C}\right) = \frac{t^2_{1-\alpha/2,m-1}}{z^2_{1-\alpha/2}} > 1.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Полностью последовательная процедура.

- $X_1, \dots, X_m$ — пилотная выборка, $m \geq 2$.
- Для каждого $n = m, m+1, \dots$ вычисляем
$$\hat{C}_n = \frac{z^2_{1-\alpha/2} S^2_n}{d^2}.$$
- Продолжаем набирать выборку, если $n < \hat{C}_n$.

N — наименьшее целое $n \geq \hat{C}_n$.

$$\mathbb{E}_{\mu,\sigma}\left(N\right) \leq C + m.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Полностью последовательная процедура только асимптотически состоятельна:

$$\lim_{d\to 0} P_{\mu,\sigma}\left(\mu \in J_N\right) = 1 - \alpha,$$

но зато асимптотически эффективна:

$$\lim_{d\to 0} \mathbb{E}_{\mu,\sigma}\left(\frac{N}{C}\right) = 1.$$

Доверительный интервал для разности двух средних

Дано: $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}, \dots \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), \quad i = 1, 2.$

Требуется: построить доверительный интервал J для разности средних $\mu_1 - \mu_2$ фиксированной длины $2d$:

$$P\left(\mu_1 - \mu_2 \in J\right) \geq 1 - \alpha \ \ \forall \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n &= \left(n_1, n_2\right), \\ T_n &= \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}, \\ U_n^2 &= \frac{\left(n_1 - 1\right) S_{1n_1}^2 + \left(n_2 - 1\right) S_{2n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать доверительные интервалы $J_n = [T_n - d, T_n + d]$.

Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

Поскольку дисперсии равны, будем брать выборки одинакового размера:

$$n_1 = n_2 = n,$$
$$U_n^2 = \frac{S_{1n}^2 + S_{2n}^2}{2}.$$

Двухэтапная процедура.

1. $X_{i1}, \dots, X_{im}$ — пилотные выборки, $m \geq 2$, U_m^2 — оценка дисперсии по ним.
2. Определим, сколько нужно добавить пар наблюдений:

$$\hat{C} = \frac{2t_{1-\alpha/2, 2m-2}^2 U_m^2}{d^2},$$
$$N = \max\left(\left[\hat{C}\right] + 1, m\right),$$

$J_N = \left[\bar{T}_N - d, \bar{T}_N + d\right]$ — искомый $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$.

Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\frac{t^2_{1-\alpha/2,2m-2}}{z^2_{1-\alpha/2}} C \le \mathbb{E}_{\mu_1,\mu_2,\sigma}(N) \le \frac{t^2_{1-\alpha/2,2m-2}}{z^2_{1-\alpha/2}} C + m.$$

Двухэтапная процедура состоятельна и асимптотически состоятельна, но асимптотически неэффективна (по сравнению с $C = \frac{2z^2_{1-\alpha/2}\sigma^2}{d^2}$).

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Пусть $W_1, W_2 \sim St\left(m-1\right)$ независимы, $h_{m,1-\alpha/2}$ — $(1-\alpha/2)$-квантиль распределения $W_1 - W_2$:

$$P\left(W_1 - W_2 \leq h_{m,1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$h_{m,1-\alpha/2} \approx \sqrt{2} z_{1-\alpha/2}$.

Двухэтапная процедура.

1. $X_{i1}, \ldots, X_{im}$ — пилотные выборки, $m \geq 2$, S_{1m}^2, S_{2m}^2 — оценки дисперсий по ним;
2. Определим, сколько нужно добавить наблюдений в каждую выборку:

$$\hat{C}_1 = \frac{h_{m,1-\alpha/2} S_{1m}^2}{d^2}, \quad \hat{C}_2 = \frac{h_{m,1-\alpha/2} S_{2m}^2}{d^2},$$
$$N_1 = \max\left(\left[\hat{C}_1\right] + 1, m\right), \quad N_2 = \max\left(\left[\hat{C}_2\right] + 1, m\right),$$

$J_N = \left[\bar{T}_N - d, \bar{T}_N + d\right]$, $N = (N_1, N_2)$ — искомый $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$.

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\mathbb{E}N_i \approx \frac{h^2_{m,1-\alpha/2}\sigma_i^2}{d^2},\ i = 1, 2.$$

Двухэтапная процедура состоятельна.

В рамках последовательного анализа удалось найти точное решение проблемы Беренца-Фишера!

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Полностью последовательная процедура.

- $X_{i1}, \ldots, X_{im}$ — пилотные выборки, $m \geq 2$.
- Продолжаем набирать первую выборку, если $\frac{n_1}{n_2} \leq \frac{S_{1n_1}}{S_{2n_2}}$, и вторую, если $\frac{n_1}{n_2} > \frac{S_{1n_1}}{S_{2n_2}}$.
- Останавливаемся по одному из трёх правил:

$$n_1 + n_2 \geq \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{d^2} \left(S_{1n_1} + S_{2n_2}\right)^2, \tag{1}$$

$$\frac{S^2_{1n_1}}{n_1} + \frac{S^2_{2n_2}}{n_2} \leq \frac{d^2}{z^2_{1-\alpha/2}}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} n_1 \geq \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{d^2} S_{1n_1} \left(S_{1n_1} + S_{2n_2}\right), \\ n_2 \geq \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{d^2} S_{2n_2} \left(S_{1n_1} + S_{2n_2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Пусть N_1, N_2 — объёмы выборок, при которых произошла остановка, $N = N_1 + N_2$.

$$\mathbb{E}_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2}(N) \leq C + m + 2.$$

Для $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ — суммарных объёмов выборок, при которых произошла остановка с использованием правил (1), (2) и (3) — справедливо

$$N^{(1)} \leq N^{(2)} \leq N^{(3)}.$$

Полностью последовательная процедура асимптотически состоятельна и асимптотически эффективна (относительно $C = \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{d^2}(\sigma_1 + \sigma_2)^2$.).

Доверительный интервал для матожидания

Дано: $X_1, X_2, \dots \sim F(x)$, $\mathbb{E}X, \mathbb{D}X$ конечны.

Требуется: построить доверительный интервал J для среднего $\mathbb{E}X$ фиксированной длины $2d$:

$$P(\mathbb{E}X \in J) \geq 1 - \alpha \;\; \forall F(x).$$

Если известно $\mathbb{D}X$, по центральной предельной теореме приближённым решением является интервал $J_n = \left[\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d\right]$, где n — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2} \left(\mathbb{D}X\right)^2}{d^2} \equiv C.$$

Последовательные доверительные интервалы для матожидания

Полностью последовательная процедура.

- $X_1, \ldots, X_m$ — пилотная выборка, $m \geq 2$, S_m^2 — оценка дисперсии по ней.
- Для каждого $n = m, m+1, \ldots$ вычисляем

$$\hat{C}_n = \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \left(S_n^2 + \frac{1}{n}\right)}{d^2}.$$

- Продолжаем набирать выборку, если $n < \hat{C}_n$.

$\frac{1}{n}$ — поправка на случай, если распределение $F(x)$ дискретно.

N — наименьшее целое $n \geq \hat{C}_n$.

$$\mathbb{E}_F(N) \leq C + m + 2.$$

Процедура асимптотически состоятельна и асимптотически эффективна.

Доверительный интервал для медианы

Дано: $X_1, X_2, \dots \sim F(x-\theta)\,,\quad \theta = \operatorname{med} X,$

- $F(x)$ симметрична относительно нуля,
- $F(x)$ дважды дифференцируема в окрестности нуля $\mathcal{N}$;
- $F''(x)$ ограничена вне $\mathcal{N}$.

Требуется: построить доверительный интервал J для медианы θ фиксированной длины $2d$:

$$P(\theta \in J) \geq 1-\alpha \;\; \forall F(x)\,.$$

Доверительный интервал для медианы

При фиксированом n асимптотический доверительный интервал задаётся порядковыми статистиками:

$$\begin{aligned} b(n) &= \max\left(1, \left[\frac{1}{2}\left(n - z_{1-\alpha/2}\sqrt{n} - 1\right)\right]\right), \\ a(n) &= n - b(n) + 1, \\ J_n &= \left[X_{n:b(n)}, X_{n:a(n)}\right], \\ \lim_{n\to\infty} P\left(\theta \in J_n\right) &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Чтобы построить доверительный интервал фиксированной длины $2d$ с помощью полностью последовательной процедуры, нужно продолжать набирать выборку, пока $X_{n:a(n)} - X_{n:b(n)} > 2d$.

Литература

- последовательная проверка гипотез — Вальд;
- последовательные доверительные интервалы — Mukhopadhyay.

Вальд, А. *Последовательный анализ*. — М.: Физматлит, 1960.

Mukhopadhyay, N., de Silva, B. M. *Sequential methods and their applications*. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2009.