

Прикладной статистический анализ данных.
11. Последовательный анализ.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com

I/2016

Z-критерий для доли (версия множителей Лагранжа)

Задача: рекламная кампания планировалась так, чтобы обеспечить узнаваемость продукта среди целевой аудитории более 30%. После окончания кампании проводится опрос с целью оценки узнаваемости.

H_0 : узнаваемость продукта не превышает 30%.

H_1 : узнаваемость продукта превышает 30%.

Z-критерий для доли (версия множителей Лагранжа)

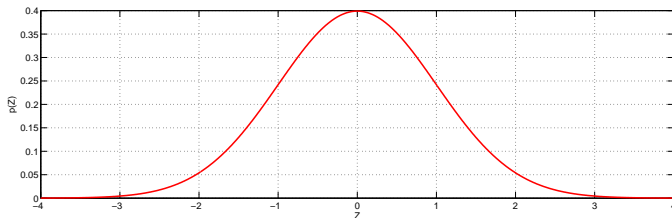
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim \text{Ber}(p)$;

нулевая гипотеза: $H_0: p = p_0$;

альтернатива: $H_1: p > p_0$;

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

$Z(X^n) \sim N(0, 1)$ при H_0 .



Z-критерий для доли (версия множителей Лагранжа)

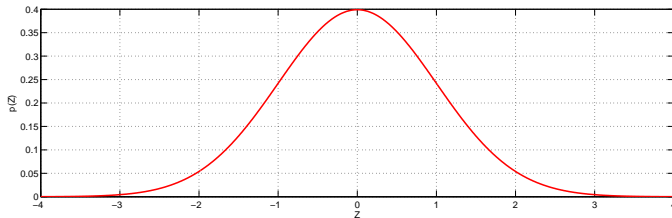
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim Ber(p)$;

нулевая гипотеза: $H_0: p \leq p_0$;

альтернатива: $H_1: p > p_0$;

статистика: $Z(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

$Z(X^n) \sim N(0, 1)$ при $p = p_0$ (наименее благоприятная конфигурация).



Z-критерий для доли (версия множителей Лагранжа)

Как выбрать наименьший достаточный объем выборки?

<https://yadi.sk/d/Md0-WPAqqbdfw>

Постановка задачи последовательного анализа

выборка: $X^m = (X_1, \dots, X_m), X \sim \text{Ber}(p)$.

Фиксируем «коридор» отклонений значения параметра p от p_0 , которые можно считать несущественными:

$$p_L \leq p_0 \leq p_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0: p \leq p_L$;

альтернатива: $H_1: p \geq p_U$.

Пусть данные поступают постепенно.

Задача: построить проверку гипотез так, чтобы обойтись как можно меньшим объёмом выборки.

Анонс: процедура последовательного анализа при тех же значениях мощности и уровня значимости позволяет обойтись меньшим (иногда вдвое) объёмом выборки.

Процедура последовательного анализа

Поскольку размер выборки не фиксирован, мы можем фиксировать вероятности ошибок обоих родов:

α — уровень значимости — допускаемая вероятность ошибки первого рода,
 β — допускаемая вероятность ошибки второго рода.

статистика:
$$d_m(X^m) = \sum_{i=1}^m X_i.$$

Введём следующие обозначения:

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

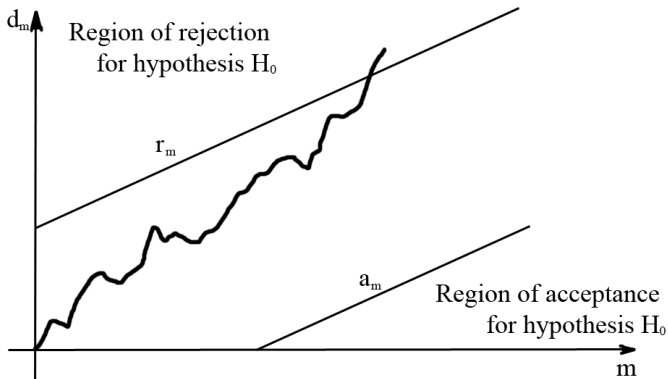
$$a_m = \frac{\ln B + m \ln \frac{1 - p_L}{1 - p_U}}{\ln \frac{p_U}{p_L} - \ln \frac{1 - p_U}{1 - p_L}},$$

$$r_m = \frac{\ln A + m \ln \frac{1 - p_L}{1 - p_U}}{\ln \frac{p_U}{p_L} - \ln \frac{1 - p_U}{1 - p_L}}.$$

Процедура последовательного анализа

При каждом значении m :

- $d_m \geq r_m \Rightarrow$ отвергаем H_0 , $p \geq p_U$;
- $d_m \leq a_m \Rightarrow$ принимаем H_0 , $p \leq p_L$;
- $a_m < d_m < r_m \Rightarrow$ процесс продолжается, добавляем элемент выборки.



Момент остановки

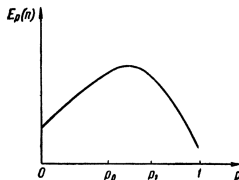
На каком элементе выборки n произойдёт остановка процедуры?

n — случайная величина, можно говорить о её матожидании:

$$\mathbb{E}_p(n) = \frac{L(p) \ln B + (1 - L(p)) \ln A}{p \ln \frac{pU}{pL} + (1 - p) \ln \frac{1-pU}{1-pL}},$$

$L(p) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h}$ — оперативная характеристика — вероятность принять нулевую гипотезу при условии, что p — истинное значение параметра; h определяется как решение уравнения:

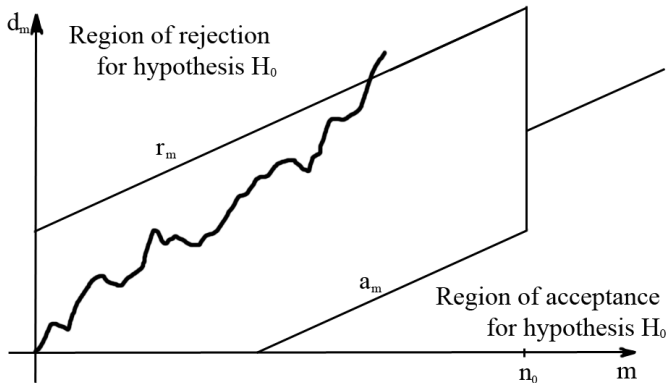
$$p = \frac{1 - \left(\frac{1-pU}{1-pL}\right)^h}{\left(\frac{pU}{pL}\right)^h - \left(\frac{1-pU}{1-pL}\right)^h}.$$



Усечение

Если при $m = n_0$ решение ещё не принято, но возможности добавлять элементы выборки больше нет, используем следующий критерий:

- $d_m \geq \frac{a_{n_0} + r_{n_0}}{2} \Rightarrow$ отвергаем H_0 , $p \geq p_U$;
- $d_m \leq \frac{a_{n_0} + r_{n_0}}{2} \Rightarrow$ принимаем H_0 , $p \leq p_L$.



Группировка наблюдений

Наблюдения могут поступать группами g_1, g_2, \dots по v элементов. Тогда значения статистики d_m сравниваются с a_m, r_m только при $m = v, 2v, \dots$

Последствия:

- увеличивается размер выборки, при котором происходит остановка;
- истинные вероятности ошибок могут оказаться больше номинальных, но при этом

$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{1 - \beta}, \quad \beta' \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Так как величины α и β обычно малы, отклонением можно пренебречь.

Z-критерий для двух долей

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), X_1 \sim \text{Ber}(p_1);$

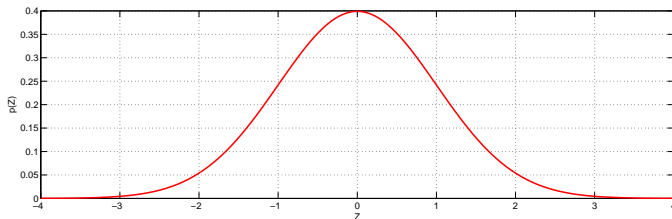
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \dots, X_{2n_2}), X_2 \sim \text{Ber}(p_2);$

нулевая гипотеза: $H_0: p_1 \geq p_2;$

альтернатива: $H_1: p_1 < p_2;$

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, P = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2};$

$Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) \sim N(0, 1)$ при $p_1 = p_2$ (наименее благоприятная конфигурация).



Z-критерий для двух долей

Пример: имеются два технологических процесса, классический и модернизированный, p_1, p_2 — доли брака в них.

H_0 : доля брака в классическом процессе не меньше доли брака в модернизированном.

H_1 : доля брака в классическом процессе меньше доли брака в модернизированном.

Аналог в последовательном анализе

Пусть значения x_{1i}, x_{2i} поступают парами.

Будем рассматривать только различающиеся пары — $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а остальные будем отбрасывать.

$$k_1 = \frac{p_1}{1-p_1}, \quad k_2 = \frac{p_2}{1-p_2} \text{ — риски,}$$

$$u = \frac{k_1}{k_2} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} \text{ — относительный риск:}$$

- $u = 1 \Leftrightarrow p_1 = p_2,$
- $u > 1 \Leftrightarrow p_1 > p_2,$
- $u < 1 \Leftrightarrow p_1 < p_2.$

Фиксируем «коридор» отклонений u от 1, которые можно считать незначимыми:

$$u_L \leq 1 \leq u_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0: u \geq u_U;$

альтернатива: $H_1: u \leq u_L;$

$$\text{статистика: } d_m(X_1^m, X_2^m) = \sum_{i=1}^m (1 - X_{1i}) X_{2i}.$$

Аналог в последовательном анализе

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{\ln B + m \ln \frac{1-u_U}{1-u_L}}{\ln u_U - \ln u_L},$$

$$r_m = \frac{\ln A + m \ln \frac{1-u_U}{1-u_L}}{\ln u_U - \ln u_L}.$$

Момент остановки:

$$\mathbb{E}_u(n) = \frac{L(u) \ln B + (1 - L(u)) \ln A}{\frac{u}{u+1} \ln \frac{u_U(1+u_L)}{u_L(1+u_U)} + \frac{1}{u+1} \ln \frac{1+u_L}{1+u_U}} \Big/ (p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)),$$

$$L(u) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h},$$

h определяется как решение уравнения

$$\frac{u}{u+1} = \frac{1 - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}{\left(\frac{u_U(1+u_L)}{u_L(1+u_U)}\right)^h - \left(\frac{1+u_L}{1+u_U}\right)^h}.$$

Группировка наблюдений

Наблюдения могут поступать группами g_1, g_2, \dots пар выборок по v элементов. Если при этом внутри пар выборок не указаны соответствия элементов (x_{1i}, x_{2i}) , статистику d_m вычислить невозможно.

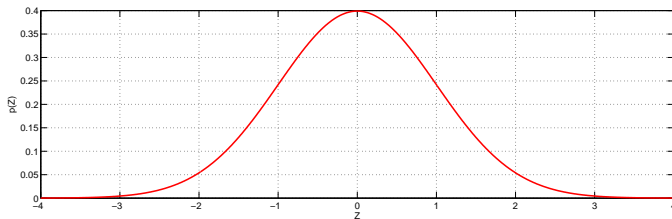
Пусть $v_1(g_i)$ — число успехов в выборке из v наблюдений над первой биномиальной совокупностью в группе g_i , $v_2(g_i)$ — над второй. Тогда для этой пары групп в качестве оценки числа пар $(0, 1)$ примем величину $v_2(g_i) - \frac{v_1(g_i)v_2(g_i)}{v}$.

$$d_{g_m} = \sum_{i=1}^{g_m} \left(v_2(g_i) - \frac{v_1(g_i)v_2(g_i)}{v} \right).$$

Последствия: аналогичные.

Z-критерий для среднего нормального распределения, односторонняя альтернатива

- выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma$ известна;
- нулевая гипотеза: $H_0: \mu \leq \mu_0$;
- альтернатива: $H_1: \mu > \mu_0$;
- статистика: $Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$;
 $Z(X^n) \sim N(0, 1)$ при $\mu = \mu_0$ (наименее благоприятная конфигурация).



Z-критерий для среднего нормального распределения, односторонняя альтернатива

Пример: при помощи прибора с известной погрешностью σ измеряется концентрация вредного вещества в образце. Необходимо проверить, что она не превышает предельно допустимой.

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем «коридор» отклонений μ от μ_0 , которые можно считать незначимыми:

$$\mu_L \leq \mu_0 \leq \mu_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0: \mu \leq \mu_L$;

альтернатива: $H_1: \mu \geq \mu_U$;

статистика: $d_m(X^m) = \sum_{i=1}^m X_i$.

Аналог в последовательном анализе

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{\sigma^2}{\mu_U - \mu_L} \ln B + m \frac{\mu_U + \mu_L}{2},$$

$$r_m = \frac{\sigma^2}{\mu_U - \mu_L} \ln A + m \frac{\mu_U + \mu_L}{2},$$

Момент остановки:

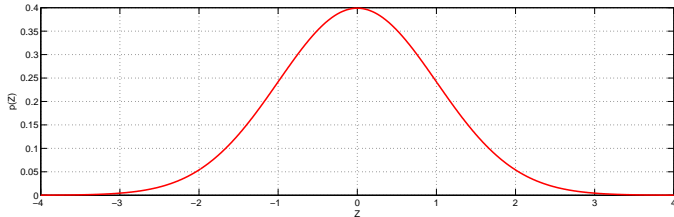
$$\mathbb{E}_\mu(n) = \frac{L(\mu) \ln B (1 - L(\mu)) \ln A}{\mu_L^2 - \mu_U^2 + 2(\mu_U - \mu_L)\mu},$$

$$L(\mu) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h},$$

$$h = \frac{\mu_U + \mu_L - 2\mu}{\mu_U - \mu_L}.$$

Z-критерий для среднего нормального распределения, двусторонняя альтернатива

- выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma$ известна;
- нулевая гипотеза: $H_0: \mu = \mu_0$;
- альтернатива: $H_1: \mu \neq \mu_0$;
- статистика: $Z(X^n) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$;
 $Z(X^n) \sim N(0, 1)$ при H_0 .



Z-критерий для среднего нормального распределения, двусторонняя альтернатива

Пример: многократные измерения прибором с известной погрешностью для проверки наличия у прибора смещения.

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем симметричный «коридор» отклонений μ от μ_0 , которые можно считать незначимыми:

$$\left| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \right| \leq \delta.$$

нулевая гипотеза: $H_0: \left| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \right| \leq \delta;$

альтернатива: $H_1: \left| \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \right| > \delta;$

статистика: $d_m(X^m) = \ln \operatorname{ch} \left(\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_0) \right).$

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \ln B + m \frac{\delta^2}{2},$$

$$r_m = \ln A + m \frac{\delta^2}{2}.$$

Критерий хи-квадрат

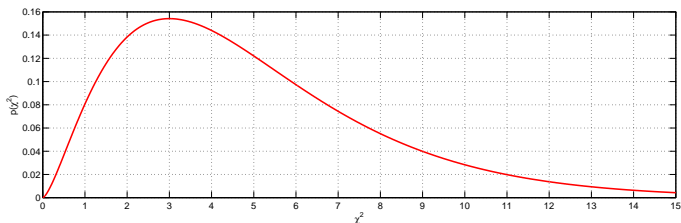
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu$ известно;

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma \leq \sigma_0$;

альтернатива: $H_1: \sigma > \sigma_0$;

статистика: $\chi^2(X^n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$;

$\chi^2(X^n) \sim \chi_{n-1}^2$ при $\sigma = \sigma_0$ (наименее благоприятная конфигурация).



Критерий хи-квадрат

Пример: не превышает ли погрешность прибора заявленного уровня?

Аналог в последовательном анализе

Фиксируем «коридор» отклонений σ от σ_0 , которые можно считать незначимыми:

$$\sigma_L \leq \sigma_0 \leq \sigma_U$$

(хотя бы одно из неравенств — строгое).

нулевая гипотеза: $H_0: \sigma \leq \sigma_L$;

альтернатива: $H_1: \sigma \geq \sigma_U$;

статистика: $d_m(X^m) = \sum_{i=1}^m (X_i - \mu)^2$.

Константы последовательного анализа:

$$a_m = \frac{2 \ln B + m \ln \frac{\sigma_U^2}{\sigma_L^2}}{\frac{1}{\sigma_L^2} - \frac{1}{\sigma_U^2}},$$

$$r_m = \frac{2 \ln A + m \ln \frac{\sigma_U^2}{\sigma_L^2}}{\frac{1}{\sigma_L^2} - \frac{1}{\sigma_U^2}}.$$

Случай неизвестного среднего

Если среднее неизвестно, предлагается использовать его выборочную оценку:

статистика:
$$d_m(X^m) = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2.$$

При этом в последовательном анализе на m -м шаге вместо констант a_m, r_m необходимо использовать a_{m-1}, r_{m-1} .

Доверительный интервал для среднего

Дано: X_1, \dots, X_n , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ неизвестны.

Требуется: построить доверительный интервал J для среднего μ фиксированной длины $2d$:

$$P(\mu \in J) \geq 1 - \alpha \quad \forall \mu, \sigma.$$

При фиксированном n и неизвестном σ решения не существует (Данциг, 1940).

Последовательные доверительные интервалы для среднего

При известном σ :

$$J_n = [\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d],$$

$$P(\mu \in J_n) = P(|\bar{X}_n - \mu| \leq d) = P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{X}_n - \mu|}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{nd}}{\sigma}\right) = 2\Phi(\sqrt{nd}/\sigma) - 1;$$

$$2\Phi(\sqrt{nd}/\sigma) - 1 \geq 1 - \alpha = 2\Phi(z_{1-\alpha/2}) - 1;$$

так как Φ монотонна,

$$\frac{\sqrt{nd}}{\sigma} \geq z_{1-\alpha/2}^2 \Rightarrow n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2} \equiv C.$$

C — минимальный размер выборки, при котором J_n имеет уровень доверия $1 - \alpha$.

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Двухэтапная процедура Стейна.

- 1 X_1, \dots, X_m — пилотная выборка, $m \geq 2$, S_m^2 — её выборочная дисперсия.
- 2 Определим, сколько нужно добавить наблюдений:

$$\hat{C} = \frac{t_{1-\alpha/2, m-1}^2 S_m^2}{d^2},$$
$$N = \max \left(\lceil \hat{C} \rceil + 1, m \right),$$

$J_N = [\bar{X}_N - d, \bar{X}_N + d]$ — искомый $100(1 - \alpha)\%$ доверительный интервал для μ .

$$\frac{t_{1-\alpha/2, m-1}^2}{z_{1-\alpha/2}^2} C \leq \mathbb{E}_{\mu, \sigma} (N) \leq \frac{t_{1-\alpha/2, m-1}^2}{z_{1-\alpha/2}^2} C + m.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Двухэтапная процедура состоятельна:

$$P_{\mu,\sigma}(\mu \in J_N) \geq 1 - \alpha,$$

и асимптотически состоятельна:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_{\mu,\sigma}(\mu \in J_N) = 1 - \alpha,$$

но асимптотически неэффективна:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mu,\sigma} \left(\frac{N}{C} \right) = \frac{t_{1-\alpha/2, m-1}^2}{z_{1-\alpha/2}^2} > 1.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Полностью последовательная процедура.

- X_1, \dots, X_m — пилотная выборка, $m \geq 2$.
- Для каждого $n = m, m + 1, \dots$ вычисляем

$$\hat{C}_n = \frac{z_{1-\alpha/2}^2 S_n^2}{d^2}.$$

- Продолжаем набирать выборку, если $n < \hat{C}_n$.

N — наименьшее целое $n \geq \hat{C}_n$.

$$\mathbb{E}_{\mu, \sigma}(N) \leq C + m.$$

Последовательные доверительные интервалы для среднего

Полностью последовательная процедура только асимптотически состоятельна:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_{\mu, \sigma}(\mu \in J_N) = 1 - \alpha,$$

но зато асимптотически эффективна:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mu, \sigma} \left(\frac{N}{C} \right) = 1.$$

Доверительный интервал для разности двух средних

Дано: $X_{i1}, \dots, X_{in_i}, X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2.$

Требуется: построить доверительный интервал J для разности средних $\mu_1 - \mu_2$ фиксированной длины $2d$:

$$P(\mu_1 - \mu_2 \in J) \geq 1 - \alpha \quad \forall \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n &= (n_1, n_2), \\ T_n &= \bar{X}_{1n_1} - \bar{X}_{2n_2}, \\ U_n^2 &= \frac{(n_1 - 1)S_{1n_1}^2 + (n_2 - 1)S_{2n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать доверительные интервалы $J_n = [T_n - d, T_n + d].$

Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

Поскольку дисперсии равны, будем брать выборки одинакового размера:

$$n_1 = n_2 = n,$$
$$U_n^2 = \frac{S_{1n}^2 + S_{2n}^2}{2}.$$

Двухэтапная процедура.

- 1 X_{i1}, \dots, X_{im} — пилотные выборки, $m \geq 2$, U_m^2 — оценка дисперсии по ним.
- 2 Определим, сколько нужно добавить пар наблюдений:

$$\hat{C} = \frac{2t_{1-\alpha/2, 2m-2}^2 U_m^2}{d^2},$$
$$N = \max \left(\left[\hat{C} \right] + 1, m \right),$$

$J_N = [\bar{T}_N - d, \bar{T}_N + d]$ — искомый $100(1 - \alpha)\%$ доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$.

Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\frac{t_{1-\alpha/2, 2m-2}^2}{z_{1-\alpha/2}^2} C \leq \mathbb{E}_{\mu_1, \mu_2, \sigma} (N) \leq \frac{t_{1-\alpha/2, 2m-2}^2}{z_{1-\alpha/2}^2} C + m.$$

Двухэтапная процедура состоятельна и асимптотически состоятельна, но асимптотически неэффективна (по сравнению с $C = \frac{2z_{1-\alpha/2}^2\sigma^2}{d^2}$).

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Пусть $W_1, W_2 \sim St(m-1)$ независимы, $h_{m,1-\alpha/2}$ — $(1-\alpha/2)$ -квантиль распределения $W_1 - W_2$:

$$P(W_1 - W_2 \leq h_{m,1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$h_{m,1-\alpha/2} \approx \sqrt{2}z_{1-\alpha/2}.$$

Двухэтапная процедура.

- 1 X_{i1}, \dots, X_{im} — пилотные выборки, $m \geq 2$, S_{1m}^2, S_{2m}^2 — оценки дисперсий по ним;
- 2 Определим, сколько нужно добавить наблюдений в каждую выборку:

$$\hat{C}_1 = \frac{h_{m,1-\alpha/2} S_{1m}^2}{d^2}, \quad \hat{C}_2 = \frac{h_{m,1-\alpha/2} S_{2m}^2}{d^2},$$
$$N_1 = \max\left(\left[\hat{C}_1\right] + 1, m\right), \quad N_2 = \max\left(\left[\hat{C}_2\right] + 1, m\right),$$

$J_N = [\bar{T}_N - d, \bar{T}_N + d]$, $N = (N_1, N_2)$ — искомый $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$.

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$$\mathbb{E}N_i \approx \frac{h_{m,1-\alpha/2}^2 \sigma_i^2}{d^2}, \quad i = 1, 2.$$

Двухэтапная процедура состоятельна.

В рамках последовательного анализа удалось найти точное решение проблемы Беренца-Фишера!

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Полностью последовательная процедура.

- X_{i1}, \dots, X_{im} — пилотные выборки, $m \geq 2$.
- Продолжаем набирать первую выборку, если $\frac{n_1}{n_2} \leq \frac{S_{1n_1}}{S_{2n_2}}$, и вторую, если $\frac{n_1}{n_2} > \frac{S_{1n_1}}{S_{2n_2}}$.
- Останавливаемся по одному из трёх правил:

$$n_1 + n_2 \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{d^2} (S_{1n_1} + S_{2n_2})^2, \quad (1)$$

$$\frac{S_{1n_1}^2}{n_1} + \frac{S_{2n_2}^2}{n_2} \leq \frac{d^2}{z_{1-\alpha/2}^2}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} n_1 \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{d^2} S_{1n_1} (S_{1n_1} + S_{2n_2}), \\ n_2 \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{d^2} S_{2n_2} (S_{1n_1} + S_{2n_2}). \end{cases} \quad (3)$$

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Пусть N_1, N_2 — объёмы выборок, при которых произошла остановка,
 $N = N_1 + N_2$.

$$\mathbb{E}_{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2} (N) \leq C + m + 2.$$

Для $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ — суммарных объёмов выборок, при которых произошла остановка с использованием правил (1), (2) и (3) — справедливо

$$N^{(1)} \leq N^{(2)} \leq N^{(3)}.$$

Полностью последовательная процедура асимптотически состоятельна и асимптотически эффективна (относительно $C = \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{d^2} (\sigma_1 + \sigma_2)^2$).

Доверительный интервал для матожидания

Дано: $X_1, X_2, \dots, X \sim F(x)$, $\mathbb{E}X, \mathbb{D}X$ конечны.

Требуется: построить доверительный интервал J для среднего $\mathbb{E}X$ фиксированной длины $2d$:

$$P(\mathbb{E}X \in J) \geq 1 - \alpha \quad \forall F(x).$$

Если известно $\mathbb{D}X$, по центральной предельной теореме приближённым решением является интервал $J_n = [\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d]$, где n — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2} (\mathbb{D}X)^2}{d^2} \equiv C.$$

Последовательные доверительные интервалы для матожидания

Полностью последовательная процедура.

- X_1, \dots, X_m — пилотная выборка, $m \geq 2$, S_m^2 — оценка дисперсии по ней.
- Для каждого $n = m, m + 1, \dots$ вычисляем

$$\hat{C}_n = \frac{z_{1-\alpha/2}^2 (S_n^2 + \frac{1}{n})}{d^2}.$$

- Продолжаем набирать выборку, если $n < \hat{C}_n$.

$\frac{1}{n}$ — поправка на случай, если распределение $F(x)$ дискретно.

N — наименьшее целое $n \geq \hat{C}_n$.

$$\mathbb{E}_F(N) \leq C + m + 2.$$

Процедура асимптотически состоятельна и асимптотически эффективна.

Доверительный интервал для медианы

Дано: $X_1, X_2, \dots, X \sim F(x - \theta)$, $\theta = \text{med } X$,

- $F(x)$ симметрична относительно нуля,
- $F(x)$ дважды дифференцируема в окрестности нуля \mathcal{N} ;
- $F''(x)$ ограничена вне \mathcal{N} .

Требуется: построить доверительный интервал J для медианы θ фиксированной длины $2d$:

$$P(\theta \in J) \geq 1 - \alpha \quad \forall F(x).$$

Доверительный интервал для медианы

При фиксированом n асимптотический доверительный интервал задаётся порядковыми статистиками:

$$b(n) = \max \left(1, \left[\frac{1}{2} (n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{n} - 1) \right] \right),$$

$$a(n) = n - b(n) + 1,$$

$$J_n = [X_{n:b(n)}, X_{n:a(n)}],$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta \in J_n) = 1 - \alpha.$$

Чтобы построить доверительный интервал фиксированной длины $2d$ с помощью полностью последовательной процедуры, нужно продолжать набирать выборку, пока $X_{n:a(n)} - X_{n:b(n)} > 2d$.

Литература

- последовательная проверка гипотез — Вальд;
- последовательные доверительные интервалы — Mukhopadhyay.

Вальд, А. *Последовательный анализ*. — М.: Физматлит, 1960.

Mukhopadhyay, N., de Silva, B. M. *Sequential methods and their applications*. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2009.