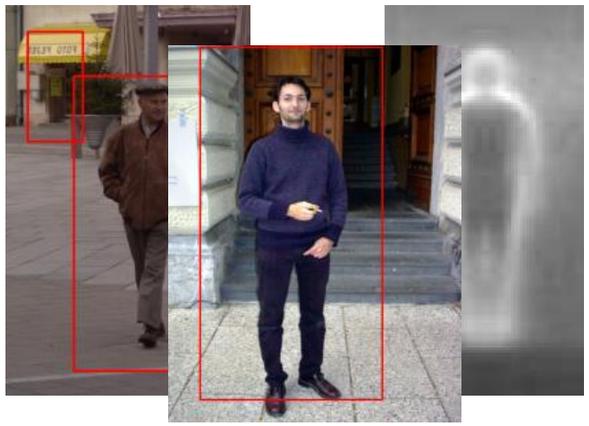
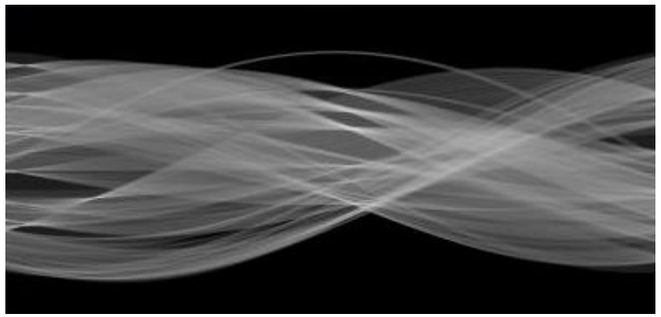
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

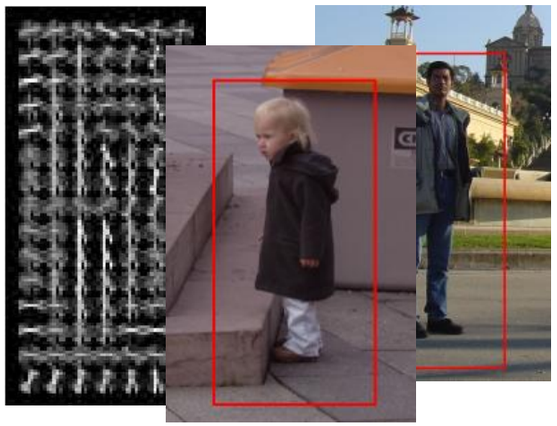
(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич



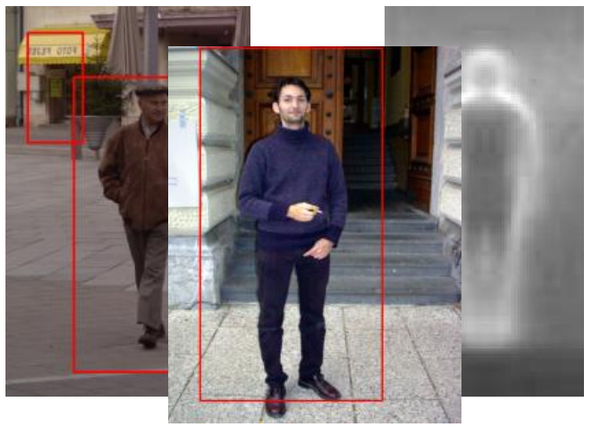


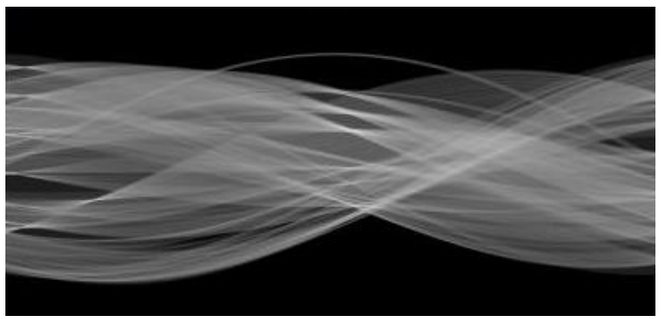


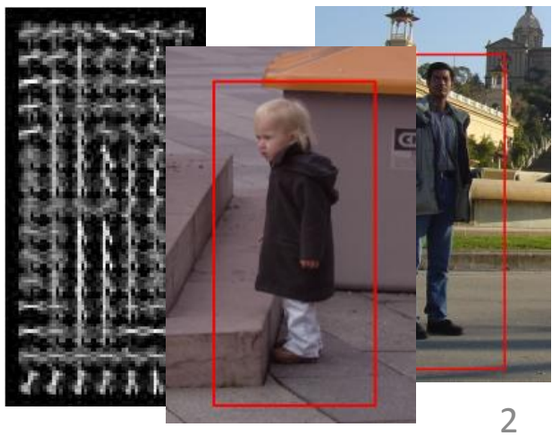
Спектральный анализ изображения

Тема 11

20.03.2026







Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Пусть $\mathbf{f} = \left[f_1 \dots f_Q\right]^T$ – Q-мерный вектор-столбец изображения из множества реализаций (**ансамбля**) изображений $\{\boldsymbol{f_k}\}$.

Информационная эффективность представления реализаций изображения $\mathbf{f}$: $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{ср}}}$.

Рассмотрим преобразование изображения $\mathbf{f}$ такое чтобы уменьшить среднюю длину представления изображения $l_{\text{ср}}$ с минимальными потерями информации $H(\mathbf{f})$, для увеличения эффективности η.

Будем искать линейное преобразование $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) \Rightarrow \; z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}),$$

$$\mathbf{z} = \left[z_1 \dots z_Q\right]^T, \mathbf{f} = \left[f_1 \dots f_Q\right]^T, \; i = 1, .., Q,$$

где матрица $\boldsymbol{\Psi} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_Q\right]^T$, $|\boldsymbol{\Psi}| \neq \mathbf{0}$, состоит из линейно-независимых столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Идея: если преобразование $\boldsymbol{\Psi}$ будет максимизировать количество информации в одном подмножестве компонент $[z_1 \dots z_m]^T$ преобразованного изображения $\mathbf{z}$, то остальное подмножество компонент $\left[z_m \dots z_Q\right]^T$ будет содержать минимальное количество информации, т.е. преобразование $\boldsymbol{\Psi}$ должно перераспределять количество информации в компонентах вектора $\mathbf{z}$, так чтобы можно было удалить те компоненты, которые несут несущественную долю информации: $H([z_1 \dots z_m]^T, \boldsymbol{\Psi}) \approx H(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi}) = H(\mathbf{f})$, тем самым уменьшить длину представления $l_{\text{ср}} = len([z_1 \dots z_m]^T) \leq len(\left[z_1 \dots z_Q\right]^T \leq len(\left[f_1 \dots f_Q\right]^T)$ и увеличить эффективность η, где $H(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi})$ –количество информации, содержащейся в представлении вектора $\mathbf{z}$ и матрицы преобразования $\boldsymbol{\Psi}$, таким образом, часть информации $H(\mathbf{f})$ перейдет в $H(\boldsymbol{\Psi})$.

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Пусть $\mathbf{f} = \left[f_1 \dots f_Q\right]^T$ – Q-мерный вектор-столбец изображения из множества реализаций (**ансамбля**) изображений $\{\boldsymbol{f_k}\}$.

Информационная эффективность представления реализаций изображения $\mathbf{f}$: $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{ср}}}$.

Рассмотрим преобразование изображения $\mathbf{f}$ такое чтобы уменьшить среднюю длину представления изображения $l_{\text{ср}}$ с минимальными потерями информации $H(\mathbf{f})$, для увеличения эффективности η.

Будем искать линейное преобразование $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) \Rightarrow \; z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}),$$
$$\mathbf{z} = \left[z_1 \dots z_Q\right]^T, \mathbf{f} = \left[f_1 \dots f_Q\right]^T, \; i = 1, .., Q,$$

где матрица $\boldsymbol{\Psi} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_Q\right]^T$, $|\boldsymbol{\Psi}| \neq \mathbf{0}$, состоит из линейно-независимых столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Идея: если преобразование $\boldsymbol{\Psi}$ будет максимизировать количество информации в одном подмножестве компонент $[z_1 \dots z_m]^T$ преобразованного изображения $\mathbf{z}$, то остальное подмножество компонент $\left[z_m \dots z_Q\right]^T$ будет содержать минимальное количество информации, т.е. преобразование $\boldsymbol{\Psi}$ должно перераспределять количество информации в компонентах вектора $\mathbf{z}$, так чтобы можно было удалить те компоненты, которые несут несущественную долю информации: $H([z_1 \dots z_m]^T, \boldsymbol{\Psi}) \approx H(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi}) = H(\mathbf{f})$, тем самым уменьшить длину представления $l_{\text{ср}} = len([z_1 \dots z_m]^T) \leq len(\left[z_1 \dots z_Q\right]^T \leq len(\left[f_1 \dots f_Q\right]^T)$ и увеличить эффективность η, где $H(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Psi})$ –количество информации, содержащейся в представлении вектора $\mathbf{z}$ и матрицы преобразования $\boldsymbol{\Psi}$, таким образом, часть информации $H(\mathbf{f})$ перейдет в $H(\boldsymbol{\Psi})$.

В соответствии со свойством $H(z_i) \geq H(z_i|z_{i-1}) \geq H(z_i|z_{i-1}, z_{i-2}, \dots)$ для увеличения количества информации в компоненте z_i необходимо уменьшить зависимость (скоррелированность) компонент между собой. Поэтому, в предположении нормального распределения каждой компоненты $\mathbf{f}$ будем искать матрицу $\boldsymbol{\Psi}$ из условия декорреляции компонент в векторном пространстве реализаций $\{\boldsymbol{z_k}\}$:

$$M\{\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\} = \boldsymbol{\Lambda} \;\Leftrightarrow \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \boldsymbol{\Lambda},$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$-диагональная автокорреляционная матрица, $M\{\}$ - мат. ожидание по векторной выборке реализаций $\mathbf{Z} = [\boldsymbol{z_k}]$, полученной путем преобразования $\boldsymbol{\Psi}$ векторной выборки реализаций $\mathbf{F} = [\mathbf{f_k}]$, где $\mathbf{Z}$, $\mathbf{F}$ – матрицы составленные из соответствующих столбцов-векторов выборки реализаций:

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$$ - преобразование Хотеллинга (Hotelling transform)

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализацией изображений $\mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализирует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma_f}$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \boxed{\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma_f}$ – симметричная $\Rightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$ (спектральная теорема) $\Leftrightarrow \mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Sigma_f}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i}$ $i = 1, \ldots, Q$ - уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma_f}$.

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализацией изображений $\mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализирует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma_f}$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \boxed{\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma_f}$ – симметричная $\underset{\text{(спектральная теорема)}}{\Rightarrow} \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Sigma_f}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i}$, $i = 1, \ldots, Q$ - уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma_f}$.

Ортогональная матрица $\mathbf{\Psi}$ состоит из **ортогональных** столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$, по ортогональным проекциям $z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) = \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle$ можно восстановить вектор $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{Q} z_i\boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^{Q} \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \mathbf{\Psi}\mathbf{z} + M\{\mathbf{f}\}$$

Вычислим только первые $m < Q$ компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\hat{\mathbf{f}}(m) - M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i + \boxed{\sum_{i=m+1}^{Q} b_i\boldsymbol{\varphi}_i}, \quad b_i \text{ - константы.}$$

остаток

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализацией изображений $\mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализирует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma_f}$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \boxed{\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma_f}$ – симметричная $\underset{\text{(спектральная теорема)}}{\Rightarrow} \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{\Sigma_f}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Sigma_f}\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i}$ $i = 1, \ldots, Q$ - уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma_f}$.

Ортогональная матрица $\mathbf{\Psi}$ состоит из **ортогональных** столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$, по ортогональным проекциям $z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) = \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}\rangle$ можно восстановить вектор $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{Q} z_i\boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^{Q}\langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}\rangle\boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \mathbf{\Psi}\mathbf{z} + M\{\mathbf{f}\}$$

Вычислим только первые $m < Q$ компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\hat{\mathbf{f}}(m) - M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i + \boxed{\sum_{i=m+1}^{Q} b_i\boldsymbol{\varphi}_i},$$ b_i - константы. Ошибка представления: $e(m) = \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m) = \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} - \sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{i=m+1}^{Q} b_i\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=m+1}^{Q}(z_i - b_i)\boldsymbol{\varphi}_i$

остаток

Средняя ошибка по множеству реализаций $\{\boldsymbol{z_k}\}$: $\overline{e^2}(m) = M\{\|e(m)\|^2\} = M\left\{\sum_{i=m+1}^{Q}\sum_{j=m+1}^{Q}(z_i - b_i)(z_j - b_j)\boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{\varphi}_j\right\} = \sum_{i=m+1}^{Q} M\{(z_i - b_i)^2\}$

Выберем оптимальные константы:

$$\frac{\partial\overline{e^2}(m)}{\partial b_i} = -2(M\{z_i\} - b_i) = 0, \Rightarrow \quad b_i = M\{z_i\} = \boldsymbol{\varphi}_i^T M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})\} = \boldsymbol{\varphi}_i^T(M\{\mathbf{f}\} - M\{\mathbf{f}\}) = \mathbf{0}, \qquad i = m+1, .., Q$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}}(m) = \sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\},\ m < Q} \quad \Longrightarrow \quad \overline{e^2}(m) = M\{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2\} = \sum_{i=m+1}^{Q} M\{(z_i - M\{z_i\})^2\}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

С учетом $M\{\mathbf{f}\}$ ошибка аппроксимации $\hat{\mathbf{f}}(m)$:

$$\Rightarrow M\{\|\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}}(m)\|^2\} = \sum_{i=m+1}^{Q} M\{(z_i - b_i)^2\} = \sum_{i=m+1}^{Q} M\{(z_i - \underbrace{M\{z_i\}}_{=0})^2\} = \sum_{i=m+1}^{Q} \boldsymbol{\varphi}_i^T M\{(\mathbf{f}-M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f}-M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\}\boldsymbol{\varphi}_j =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{Q} \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{i=m+1}^{Q} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=m+1}^{Q} \lambda_i = \sum_{i=m+1}^{Q} \sigma_i^2$$ - остаточная дисперсия

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\Psi} =$$

$$= \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Минимальная ошибка аппроксимации $\hat{\mathbf{f}}(m)$ определяется суммой $(Q-m)$ наименьших собственных чисел, компонентами z_i с минимальными дисперсиями.

$$\hat{\mathbf{f}}(m) = \sum_{i=1}^{m} z_i \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\},\ m < Q$$

Метод главных компонент (преобразование Хотеллинга)

1. Базисные вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ - собственные вектора ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} = M\{(\mathbf{f}-M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f}-M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\}$ по множеству реализаций $\{\mathbf{f}\}$.
2. Полезность признака-компоненты (с точки зрения представления) определяется соответствующим собственным значением.
3. Признаки взаимно некоррелированы: $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Lambda}$. Для нормального распределения $\{\mathbf{f}\}$ - признаки/компоненты z_i взаимно независимы.
4. Собственные вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ дают наименьшее значение среднеквадратичной ошибки $\overline{e^2}(m)$ среди всех ортонормированных базисных векторов.

Доля ошибки аппроксимации - критерий выбора числа компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}}}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент **через сингулярное разложение (SVD)**

Для нахождения матрицы преобразования $\mathbf{\Psi}$ можно использовать сингулярное разложение матрицы изображений:

$$\mathbf{F} - \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\} = \mathbf{USV}^T \Longrightarrow \mathbf{\Sigma_f} = (\mathbf{F} - \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\})^T = \mathbf{USV}^T\mathbf{VS}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{USS}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{US}^2\mathbf{U}^T$$

Условие декорреляции:

$$\Longrightarrow \mathbf{\Sigma_z} = \mathbf{ZZ}^T = \mathbf{\Psi\Sigma_f\Psi}^T = \mathbf{\Psi U S}^2\mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

При $\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}^T \Rightarrow \mathbf{\Sigma_z} = \mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{U}^T(\mathbf{F} - \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\}) \qquad \Longrightarrow \mathbf{Z_m} = \mathbf{U_m^T}(\mathbf{F} - \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\})$$

$$\Longrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{UZ} + \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\} \qquad \Longrightarrow \boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U_m Z_m} + \boldsymbol{M}\{\mathbf{f}\}} \qquad m < Q$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\lambda^{1/2}(1) \quad \ddots \quad \lambda^{1/2}(m)}}^{m} \quad \overbrace{\hphantom{0}}^{Q-m} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda^{1/2}(1) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \lambda^{1/2}(m) & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, Q-m \end{array} \end{array}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Преобразование Хотеллинга максимизирует **информационную эффективность** представления $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{ср}}}$

$$H(\mathbf{f}) = \sum_{q=1}^{Q} H\big(f(q)\big)$$

Пусть $\mathrm{P}(\mathbf{f})$ - нормальное распределение:

$$H(\mathbf{f}) = -\int_{\mathcal{P}} (2\pi)^{-Q/2} |\mathbf{\Sigma_f}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T \mathbf{\Sigma_f}^{-1} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})\right\} \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T \mathbf{\Sigma_f}^{-1} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) - \frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Sigma_f}| - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right] d\mathbf{f}$$

$$= \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Sigma_f}| + \frac{1}{2}Q\ln 2\pi$$

Если выбрать главные компоненты в качестве признаков, $|\mathbf{\Sigma_f}| = \prod_{i=1}^{Q} \boldsymbol{\lambda_i}$:

$$H(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{Q}(1 + \mathbf{ln}\boldsymbol{\lambda_i} + \ln 2\pi) \to H(\mathbf{z}, m) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(1 + \mathbf{ln}\boldsymbol{\lambda_i} + \ln 2\pi) + e_H,\ m < Q$$

Большая часть информации содержится в компонентах, соответствующих большим собственным числам.

Критерий отбора: $$\mu_i = \frac{1 + \ln\lambda_i + \ln 2\pi}{\sum_{i=1}^{Q}\left(1 + \ln\lambda_i + \ln 2\pi\right)}$$

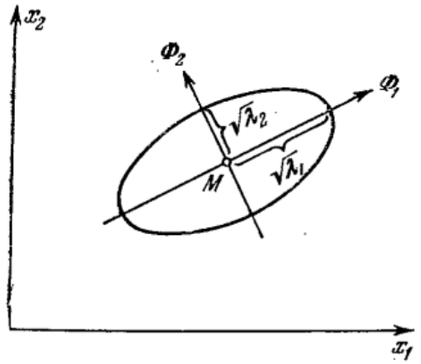
Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

1. **Базисные вектора** Преобразование Хотеллинга - **Главные компоненты**.

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi f},\ \mathbf{\Sigma_z} = \mathbf{\Psi \Sigma_f \Psi}^T,\ \mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\}$$

Для: $(\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) = 1$: $d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M_z}, \mathbf{\Sigma_z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_z}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) \to \max$



- нормированные собственные вектора максимизируют угловые расстояния от среднего (**главные компоненты**)

Понятие визуальной избыточности изображения

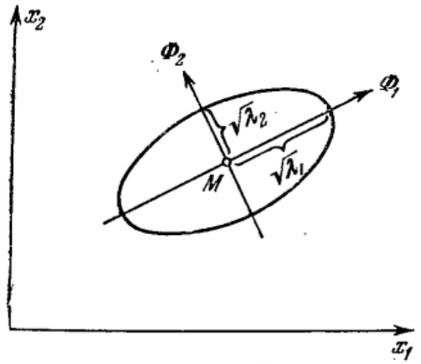
Метод главных компонент

1. **Базисные вектора** Преобразование Хотеллинга - **Главные компоненты**.

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi f},\ \mathbf{\Sigma_z} = \mathbf{\Psi \Sigma_f \Psi}^T,\ \mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\}$$

Для: $(\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) = 1$: $d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M_z}, \mathbf{\Sigma_z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_z}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) \to \max$

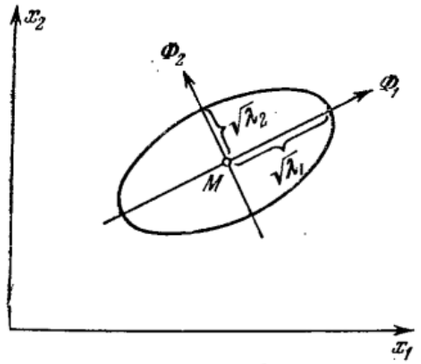
$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \mathbf{M_z}): \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{z}}}\left(\tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - \mu\left(\tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{z}} - 1\right)\right) = 2\mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - 2\mu\tilde{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} = \mu\tilde{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_z}\tilde{\mathbf{z}} = \lambda\tilde{\mathbf{z}}$$



- нормированные собственные вектора максимизируют угловые расстояния от среднего (**главные компоненты**)

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент



1. **Базисные вектора** Преобразование Хотеллинга - **Главные компоненты**.

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi f},\ \mathbf{\Sigma_z} = \mathbf{\Psi \Sigma_f \Psi}^T,\ \mathbf{\Sigma_f} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^{\mathbf{T}}\}$$

Для: $(\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) = 1$: $d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M_z}, \mathbf{\Sigma_z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M_z})^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_z}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{M_z}) \to \max$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \mathbf{M_z}):\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{z}}}\left(\tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - \mu\left(\tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{z}} - 1\right)\right) = 2\mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - 2\mu\tilde{\mathbf{z}} = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{\Sigma_z}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} = \mu\tilde{\mathbf{z}} \ \Rightarrow \mathbf{\Sigma_z}\tilde{\mathbf{z}} = \lambda\tilde{\mathbf{z}}$$

- нормированные собственные вектора максимизируют угловые расстояния от среднего (**главные компоненты**)

2. **Базисные вектора** Преобразованияе Хотеллинга – максимизируют **разнообразие** (разброс) представления.

$\overline{d_{\mathbf{f}}^2} = M\{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2\} = M\{\mathbf{f}_i^T\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j^T\mathbf{f}_j\} - M\{\mathbf{f}_i^T\mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^T\mathbf{f}_i\}$ - внутри множественное расстояние

$\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j$ - независимые: $\overline{d_{\mathbf{f}}^2} = 2M\{\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}\} - 2M\{\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\}M\{\mathbf{f}\} = 2\mathrm{tr}\left[M\{\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}\} - \mathbf{M_f}\mathbf{M_f}^T\right] = 2\mathrm{tr}\left(\mathbf{K} - \mathbf{M_f}\mathbf{M_f}^T\right) = 2\mathrm{tr}\mathbf{\Sigma_f}$

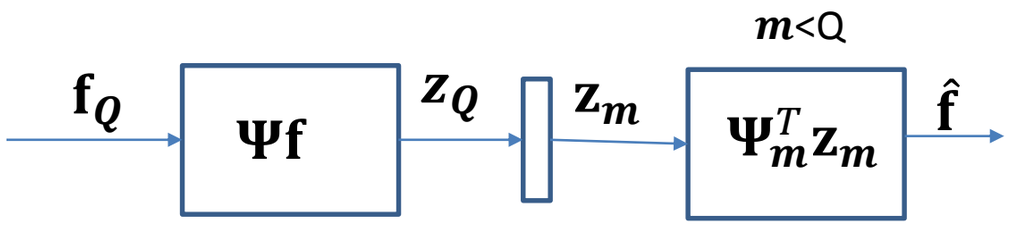
$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi f} \ \Rightarrow\ \overline{d_{\mathbf{z}}^2} = 2\mathrm{tr}\mathbf{\Sigma_z} = 2\mathrm{tr}\mathbf{\Psi \Sigma_f \Psi}^T = 2\mathrm{tr}\mathbf{\Sigma_f}$$

$\overline{d_{\mathbf{z}}^2} = 2\sum_{i=1}^{Q}\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{\Sigma_z}\boldsymbol{\varphi}_i \to \overline{d_{\mathbf{z}}^2(m)} = 2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{\Sigma_z}\boldsymbol{\varphi}_i$ - выбор m –компонент, максимизирующих внутри множественные расстояния, т.е. выбора m главных компонент.

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент. Связь с нейросетевой моделью автоэнкодера.

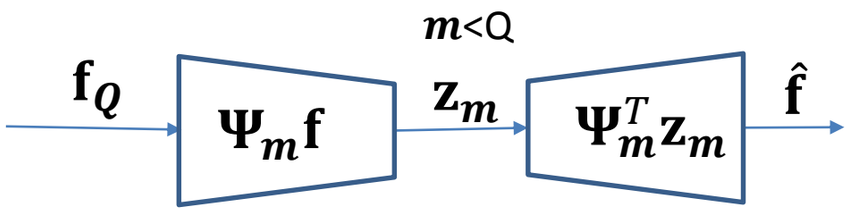
Линейный МГК



$$\min_m \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2$$

Выбор главных компонент

Фиксированные главные компоненты

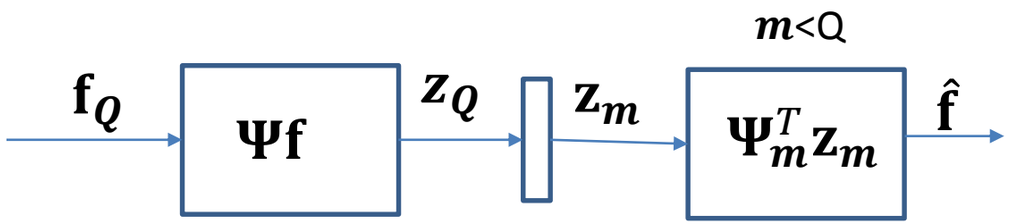


$$\min \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент. Связь с нейросетевой моделью автоэнкодера.

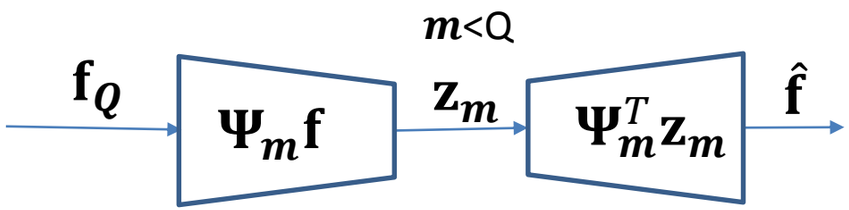
Линейный МГК



$$\min_m \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2$$

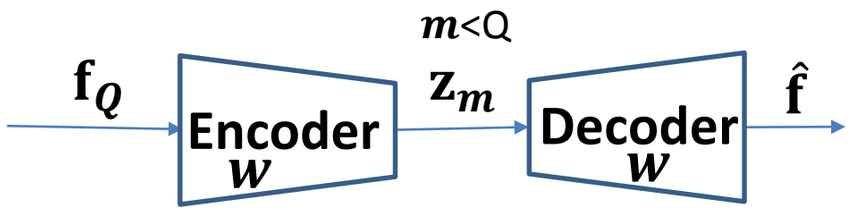
Выбор главных компонент

Фиксированные главные компоненты



$$\min \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2$$

Нейросетевой МГК: Архитектура с узким горлышком – латентным пространством признаков, **Автоэнкодер (АЕ)**

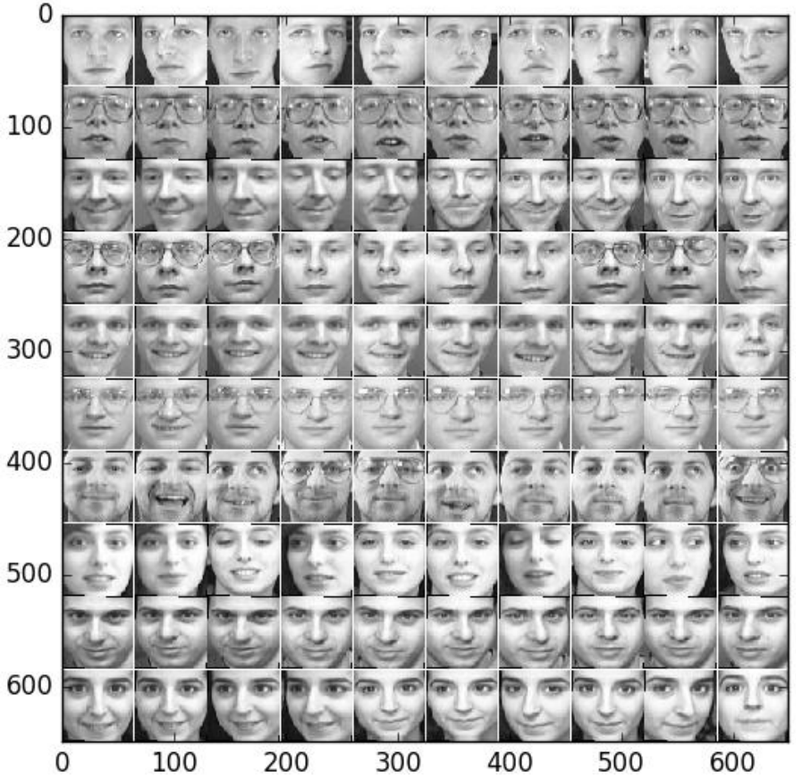


$$\min_{\boldsymbol{w}} \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{w}, m)\|^2$$

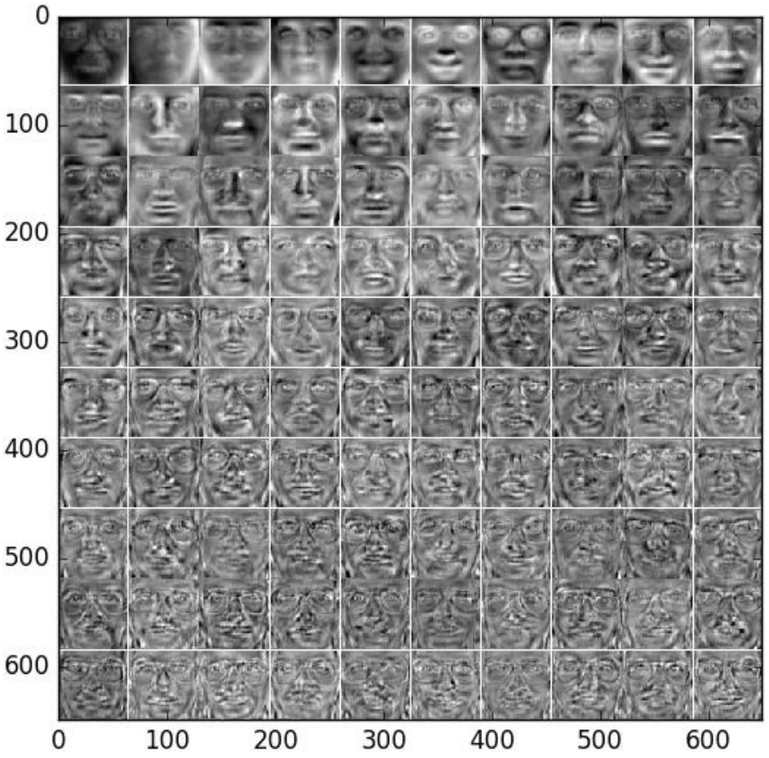
m - **зафиксировано**

Eigenfaces

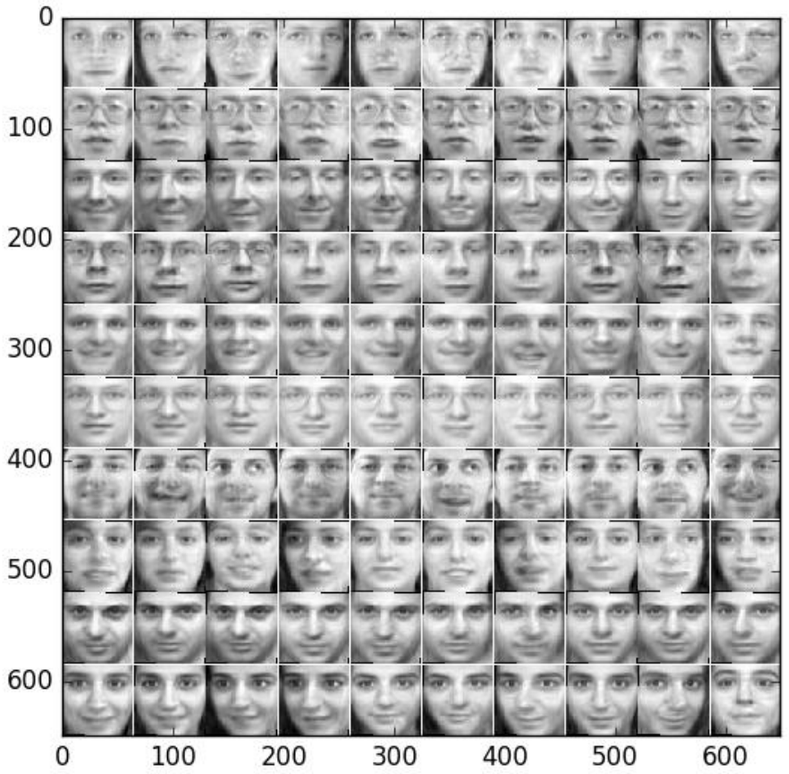
First 100 Face images



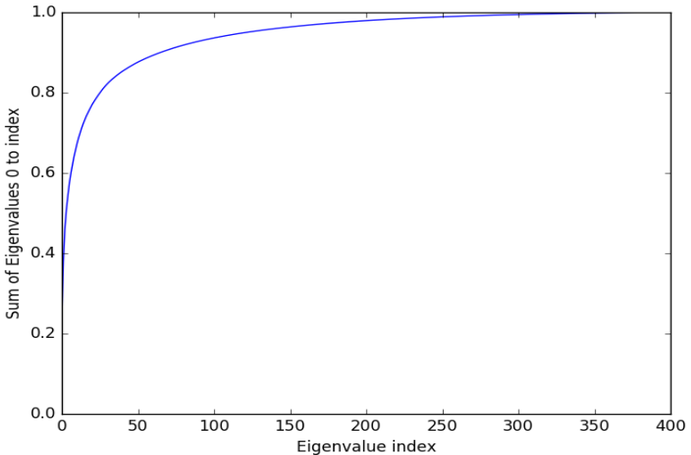
First 100 Eigenvectors of the covariance matrix



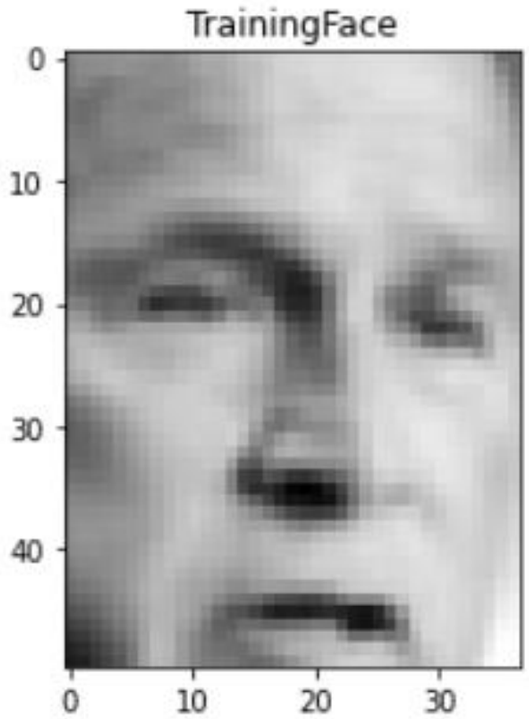
First 100 Face images reconstructed from 50 principal components



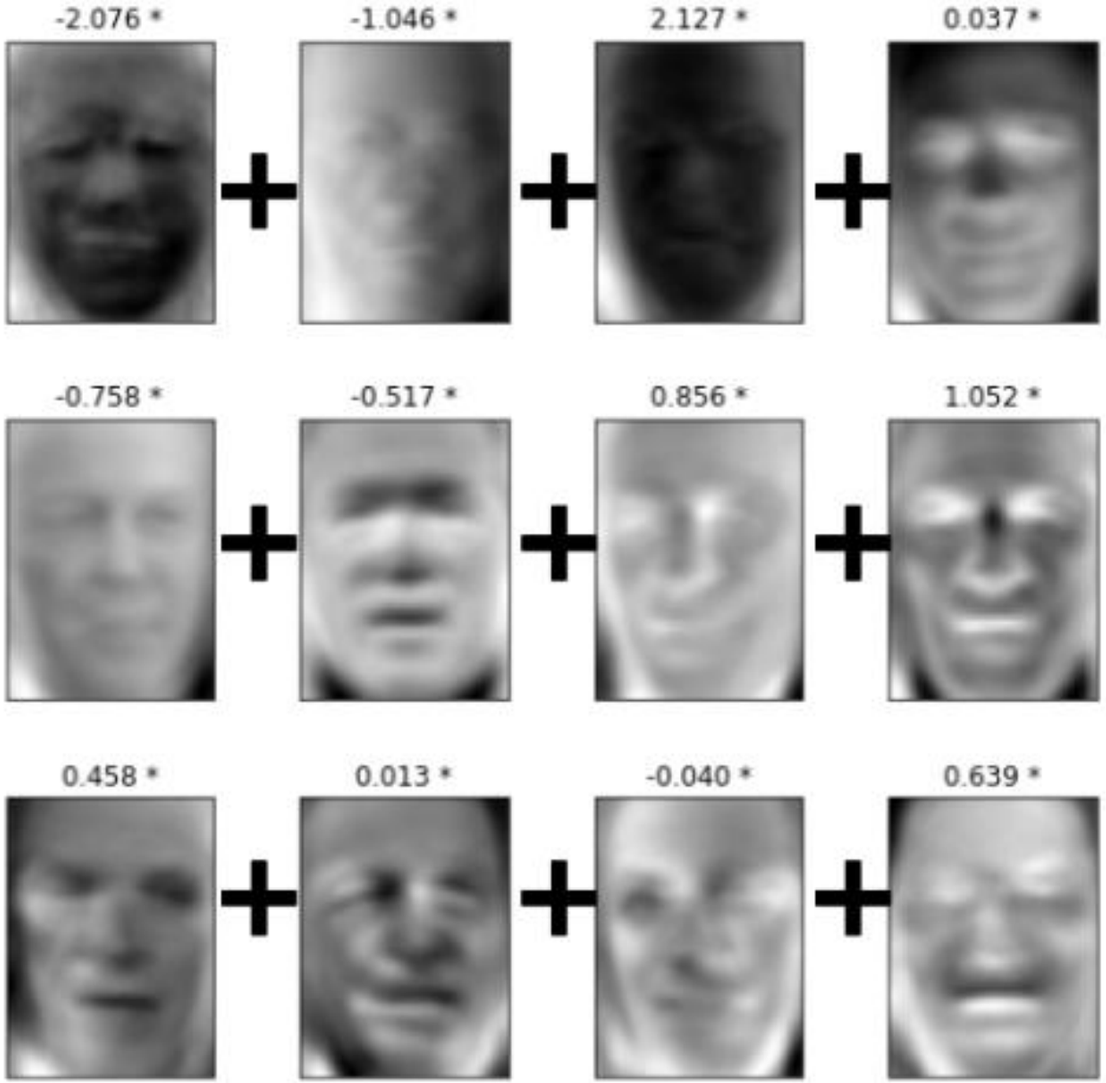
Cumulative sum of Eigenvalues



Eigenfaces


TrainingFace
0
10
20
30
40
0
10
20
30

=


-2.076 *
-1.046 *
2.127 *
0.037 *
-0.758 *
-0.517 *
0.856 *
1.052 *
0.458 *
0.013 *
-0.040 *
0.639 *

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

Пусть $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ – случайный процесс в X.

$$\mathbf{f}(x)=\sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad x_1 \le x \le x_2$$

Базисные функции детерминированы и ортогональны $\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varphi}_i(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(x)dx=\delta_{ij}$

$$z_i=\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(x)dx$$

Пусть $\mathrm{M}\{\mathbf{f}(\mathrm{x})\}=\mathbf{0}$: $R(x,\tau)=\mathrm{M}\left\{\mathbf{f}(x)\mathbf{f}^*(\tau)\right\}=\mathrm{M}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} z_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\left[\sum_{i=1}^{\infty} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\right]^*\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}_j(x)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\tau)\mathrm{M}\left\{z_j z_i^*\right\}$

Пусть $M\{z_j z_i^*\}=\lambda_j$ при $j=i$ иначе 0:

$$R(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)$$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

Пусть $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ – случайный процесс в X.

$$\mathbf{f}(x)=\sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad x_1 \le x \le x_2$$

Базисные функции детерминированы и ортогональны $\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varphi}_i(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(x)dx=\delta_{ij}$

$z_i=\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(x)dx$ - случайные коэффициенты.

Пусть $\mathrm{M}\{\mathbf{f}(\mathrm{x})\}=\mathbf{0}$: $R(x,\tau)=\mathrm{M}\left\{\mathbf{f}(x)\mathbf{f}^*(\tau)\right\}=\mathrm{M}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} z_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\left[\sum_{i=1}^{\infty} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\right]^*\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}_j(x)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\tau)\mathrm{M}\left\{z_j z_i^*\right\}$

Пусть $M\{z_j z_i^*\}=\lambda_j$ при $j=i$ иначе 0:

$$R(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x,\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau=\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_j(x)\int_{x_1}^{x_2}\boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} R(x,\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau=\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)}$$

$$\overline{e^2}(m)=\mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathbf{f}(x)-\sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\mathbf{f}(x)-\sum_{i=1}^{m} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^* dx\right]=\mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^* dx\right]=\sum_{i=m+1}^{\infty}\mathrm{M}\left\{z_i z_i^*\right\}$$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

$$\overline{e^2}(m) = \mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^{m} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^{m} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^* dx\right] = \mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^* dx\right] = \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathrm{M}\left\{z_i z_i^*\right\}$$

$$\mathrm{M}\left\{z_i z_i^*\right\} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{M}\left\{\mathbf{f}(x)\mathbf{f}^*(\tau)\right\}\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\,dx\,d\tau = \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} R(x,\tau)\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\,dx\,d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(x)\,dx = \lambda_i \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{e^2}(m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i}$$

Ортогональные преобразования

Преобразование Карунена-Лоэва для изображения как реализации стационарного процесса

$$\overline{e^2}(m)=\mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathbf{f}(x)-\sum_{i=1}^{m}z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\mathbf{f}(x)-\sum_{i=1}^{m}z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^*dx\right]=\mathrm{M}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}z_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)\right)^*dx\right]=\sum_{i=m+1}^{\infty}\mathrm{M}\left\{z_iz_i^*\right\}$$

$$\mathrm{M}\left\{z_iz_i^*\right\}=\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{M}\left\{\mathbf{f}(x)\mathbf{f}^*(\tau)\right\}\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)dxd\tau=\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2}R(x,\tau)\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)dxd\tau=\int_{x_1}^{x_2}\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)\boldsymbol{\varphi}_i(x)dx=\lambda_i \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{e^2}(m)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i}$$

Пусть $\mathbf{f}(x)$- стационарный процесс (в широком смысле): $m_{\mathbf{f}}(x)=m_{\mathbf{f}}=const,$

$$R(x,\tau)=R(x-\tau)$$

$$\boxed{\int_{-T/2}^{T/2}R(x-\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau=\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i(x)},\quad -T/2\le x\le T/2$$

1. Случай $T\to\infty$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x-\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)d\tau=\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i(x),}\ -\infty\le x\le\infty$$ - интеграл свертки

По теореме о свертке: $\Rightarrow \mathscr{F}_R(\omega)\Phi_i(j\omega)=\lambda_i\Phi_i(j\omega),\quad \mathscr{F}_R(\omega)$ – спектр мощности

выполняется при:

$$\Phi_i(j\omega)=\delta(\omega-\omega_i)\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi}_i(x)=\exp(j\omega_i x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathscr{F}_R(\omega)=\lambda_i}$$

Преобразование Карунена-Лоэва –> **Преобразование Фурье**

$$z_i=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_j^*(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}(x)\exp(-j\omega_i x)dx$$

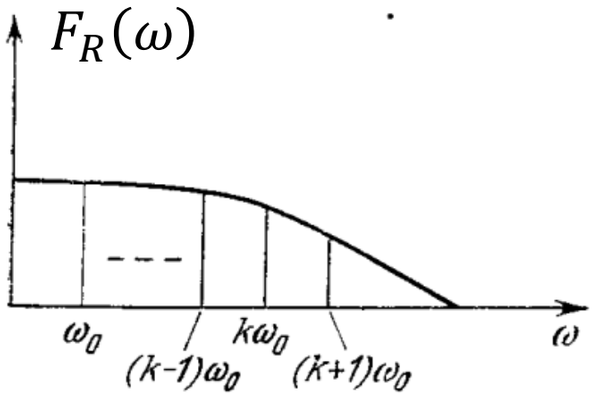
Ортогональные преобразования

Преобразование Карунена-Лоэва для изображения как реализации стационарного процесса

2. Случай T - конечно, нижняя частота равна: $\omega_0 = 2\pi/T$

Пусть: $\boldsymbol{\varphi}_k(x) \cong \exp(jk\omega_0 x), \quad k = 1, 2, ..$

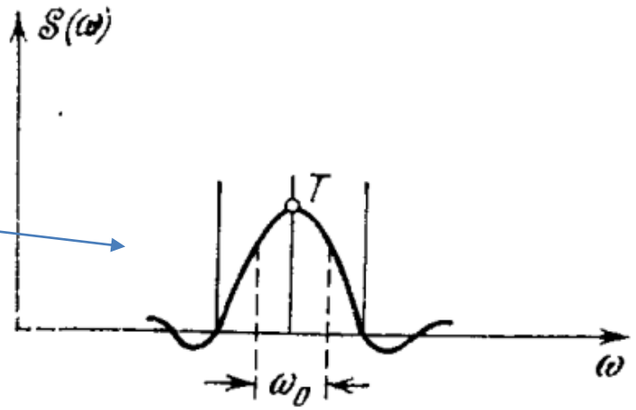
$$R(x-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega)\exp(-j\omega(x-\tau))d\omega$$



$$\Rightarrow \lambda_k \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \int_{-1/T}^{1/T} R(x-\tau)\boldsymbol{\varphi}_k(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega)\int_{-1/T}^{1/T} \exp(-j\omega(x-\tau))\exp(jk\omega_0\tau)d\tau d\omega =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega)\exp(j\omega x)T\left\{\frac{\sin\{[(k\omega_0-\omega)/2]T\}}{[(k\omega_0-\omega)/2]T}\right\}d\omega}$$

Оконная (выборочная) функция



Пусть $F_R(\omega)\exp(j\omega x)$ - слабо меняется между $(k-1)\omega_0$ и $(k+1)\omega_0$:

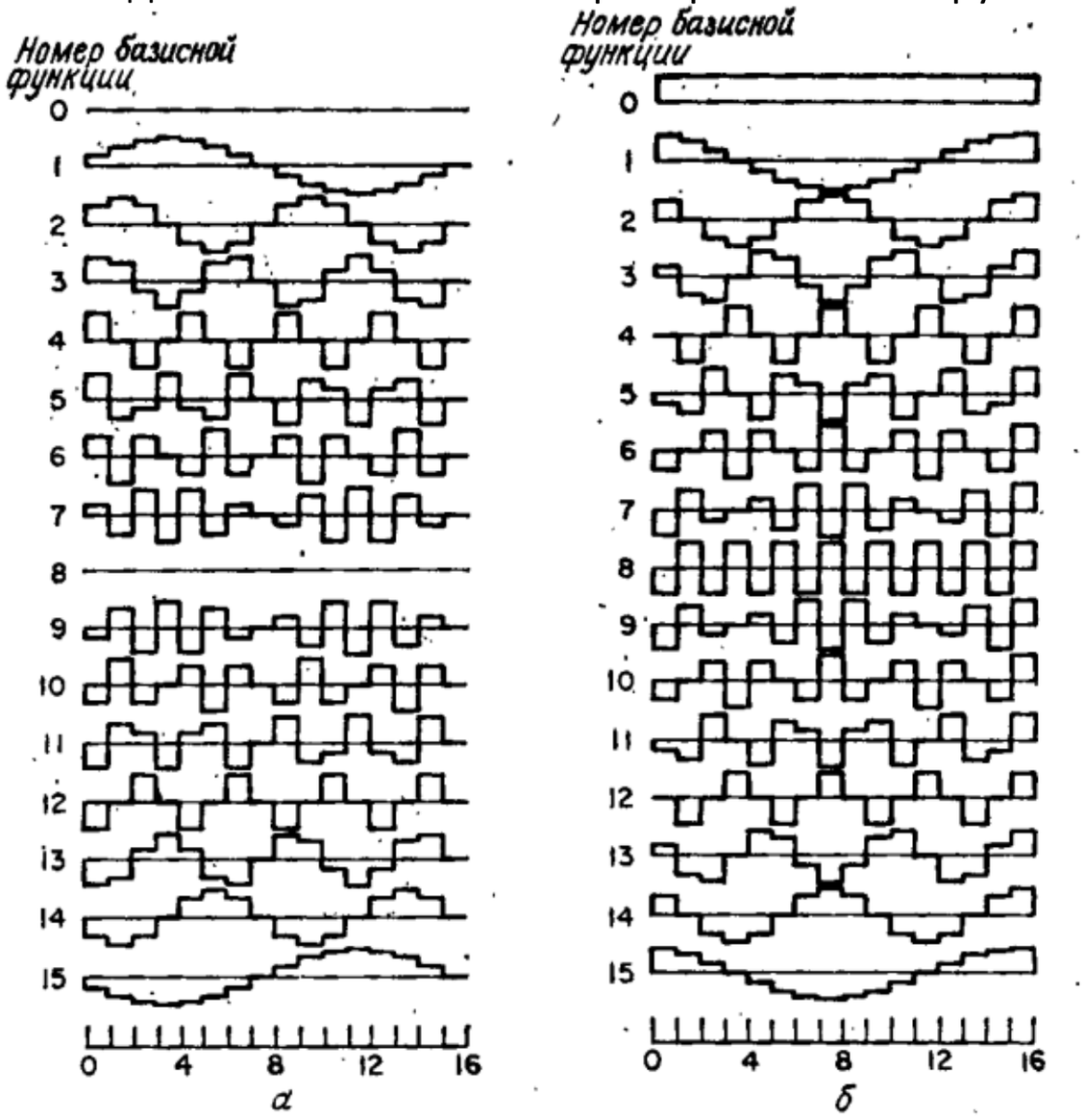
$$\lambda_k \boldsymbol{\varphi}_k(x) \cong \mathcal{F}_R(k\omega_0)\exp(jk\omega_0 x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T\left\{\frac{\sin\{[(k\omega_0-\omega)/2]T\}}{[(k\omega_0-\omega)/2]T}\right\}d\omega = \mathcal{F}_R(k\omega_0)\exp(jk\omega_0 x)$$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_k \cong \mathcal{F}_R(k\omega_0)}$ - отсчеты спектральной функции

Преобразование Карунена-Лоэва –> **Преобразование Фурье** $z_i = \int_{-1/T}^{1/T} \mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}_i^*(x)dx = \int_{-1/T}^{1/T} \mathbf{f}(x)\exp(-jk\omega_0 x)dx$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент. Преобразование Карунена-Лоэва



Базисные функции преобразования Фурье.

Аппроксимация преобразования Карунена-Лоэва для марковского процесса

Для марковского процесса первого порядка автокорреляционная функция и энергетический спектр:

$$R\left(\tau_x,\tau_y\right)=\sigma_s^2\exp\left\{-\sqrt{\alpha_x^2\tau_x^2+\alpha_y^2\tau_y^2}\right\}$$

$$\mathcal{F}_R\left(\omega_x,\omega_y\right)=\frac{1}{\alpha_x\alpha_y}\frac{2\sigma_s^2}{1+\left(\omega_x^2/\alpha_x^2+\omega_y^2/\alpha_y^2\right)}$$

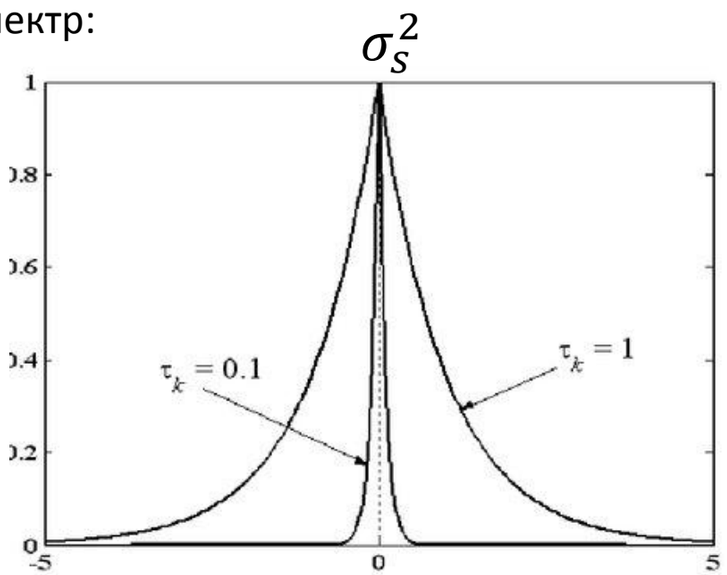
$$\lambda_k\cong\mathcal{F}_R\left(k\omega_0\right)$$

Разделимое представление:

$$R\left(\tau_x,\tau_y\right)=\sigma_s^2\exp\left\{-\alpha_x\left|\tau_x\right|-\alpha_y\left|\tau_y\right|\right\}$$

$$\mathcal{F}_R\left(\omega_x,\omega_y\right)=\frac{4\alpha_x\alpha_y\sigma_s^2}{\left(\alpha_x^2+\omega_x^2\right)\left(\alpha_y^2+\omega_y^2\right)}$$

$\tau_k=1/\alpha$ – **интервал корреляции**



Марковский процесс первого порядка можно сформировать рекуррентной формулой:

$$F(j+1,\ k+1)=\rho_1F(j+1,\ k)+\rho_2F(j,\ k+1)-$$
$$-\rho_1\rho_2F(j,\ k)+\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}\,u(j,\ k)$$

где ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты корреляции между горизонтальными и вертикальными соседними элементами изображения соответственно, $u(j,\ k)$ — некоррелированное случайное поле, дисперсия которого равна дисперсии элементов изображения.

Трех диагональная автокорреляционная матрица Марковского процесса первого порядка:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1 & -\alpha & 0 & \dots & & 0\\ -\alpha & 1 & -\alpha & & & \vdots\\ \vdots & & & & & \vdots\\ \vdots & & & -\alpha & 1 & -\alpha\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha & 1\end{bmatrix},$$

где $\alpha=\rho/(1+\rho^2)$, причем $0\leqslant\rho\leqslant1$ — коэффициент корреляции соседних элементов марковского процесса.

Ортогональные преобразования

Для марковского процесса первого порядка с автокорреляционной матрицей **Q**:

$$\mathbf{AQA}^T = \mathbf{D}$$

где **D** — диагональная матрица, составленная из элементов

$$D(k, k) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos[k\pi/(N+1)]+\rho^2}$$

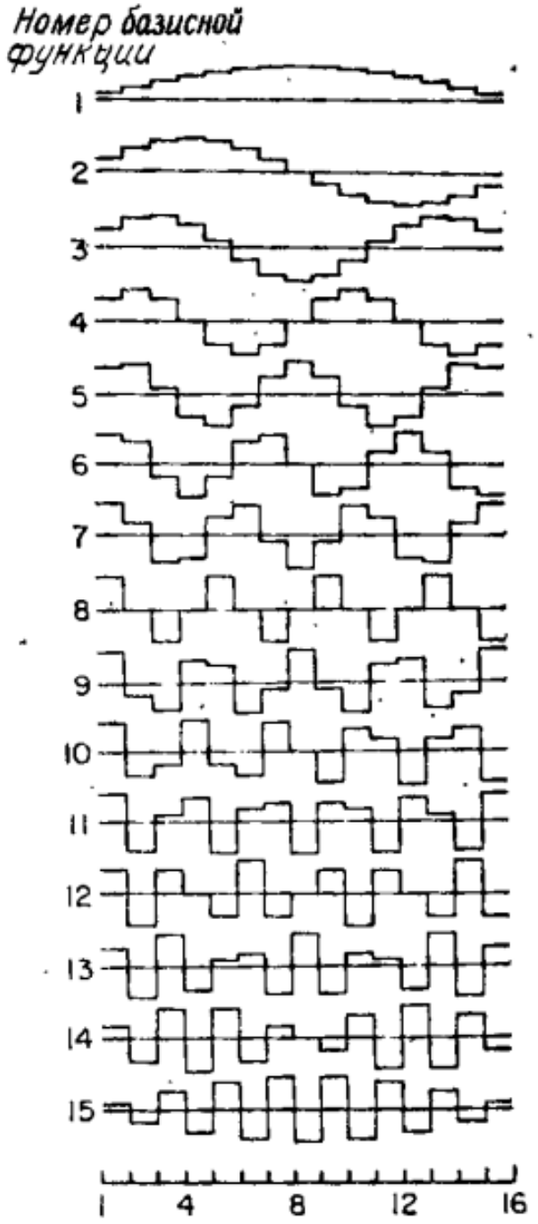
при $k = 1, 2, \ldots, N$.

Матрица **A** составлена из базисных функций вида:

$$A(u, j) = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left[\frac{(j+1)(u+1)\pi}{N+1}\right]$$

Аппроксимация преобразования Карунена-Лоэва для марковского процесса первого порядка –> **Синусное преобразование**

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{2}{N+1}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F(j, k)\sin\left[\frac{(j+1)(u+1)\pi}{N+1}\right] \times$$
$$\times \sin\left[\frac{(k+1)(v+1)\pi}{N+1}\right],$$



Ортогональные преобразования

Четное симметричное косинусное преобразование

$$F_s(j,\ k) = \begin{cases} F(j,\ k) \text{ при } j \geqslant 0,\ k \geqslant 0, \\ F(-1-j,\ k) \text{ при } j < 0,\ k \geqslant 0, \\ F(j,\ -1-k) \text{ при } j \geqslant 0,\ k < 0, \\ F(-1-j,\ -1-k) \text{ при } j < 0,\ k < 0. \end{cases}$$

Преобразование Фурье –> Косинусное преобразование

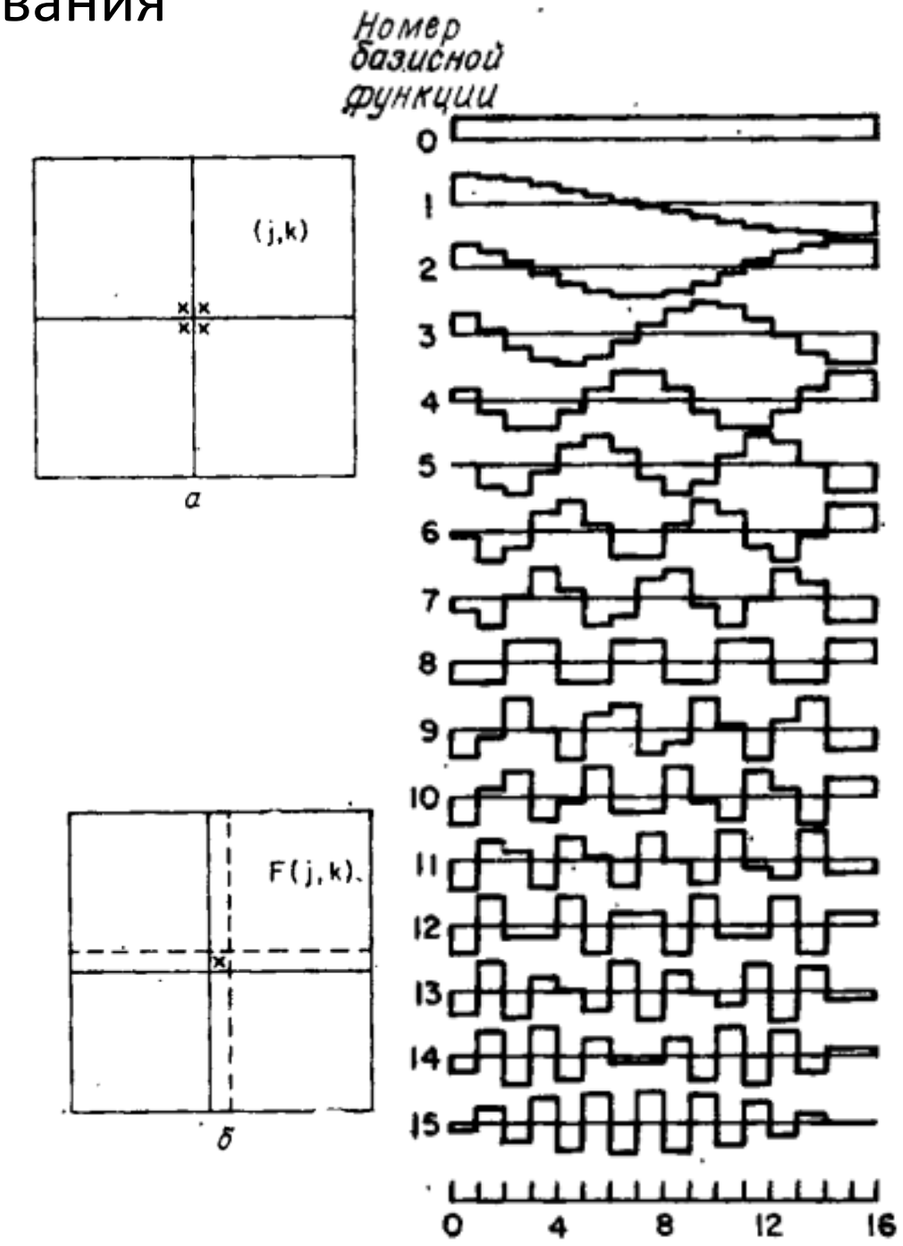
$$\mathscr{F}_s(u,\ v) =$$

$$= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,\ k) \cos\left[\frac{\pi}{N} u \left(j + \frac{1}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\pi}{N} v \left(k + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Нечетное симметричное косинусное преобразование

$$\tilde{F}_s(j,\ k) = \begin{cases} {}^1/_4 F(j,\ k) \text{ при } j = 0,\ k = 0, \\ {}^1/_2 F(j,\ k) \text{ при } j = 0,\ k \neq 0, \\ {}^1/_2 F(j,\ k) \text{ при } j \neq 0,\ k = 0, \\ F(j,\ k) \quad \text{при } j \neq 0,\ k \neq 0. \end{cases} \qquad F_s(j,\ k) = \begin{cases} F(j,\ k) \text{ при } j,\ k \geqslant 0, \\ F(-j,\ k) \text{ при } j < 0,\ k \geqslant 0, \\ F(j,\ -k) \text{ при } j \geqslant 0,\ k < 0, \\ F(-j,\ -k) \text{ при } j,\ k < 0. \end{cases}$$

$$\mathscr{F}_s(u,\ v) = \frac{4}{2N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}(j,\ k) \cos\left[\frac{2\pi}{2N-1} ju\right] \cos\left[\frac{2\pi}{2N-1} kv\right]$$



Ортогональные преобразования
Преобразование Адамара

Нормированная матрица Адамара N-го порядка $\mathbf{H}_N\mathbf{H}_N^T = \mathbf{I}_N$

Матрицы для порядка $N = 2^n$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

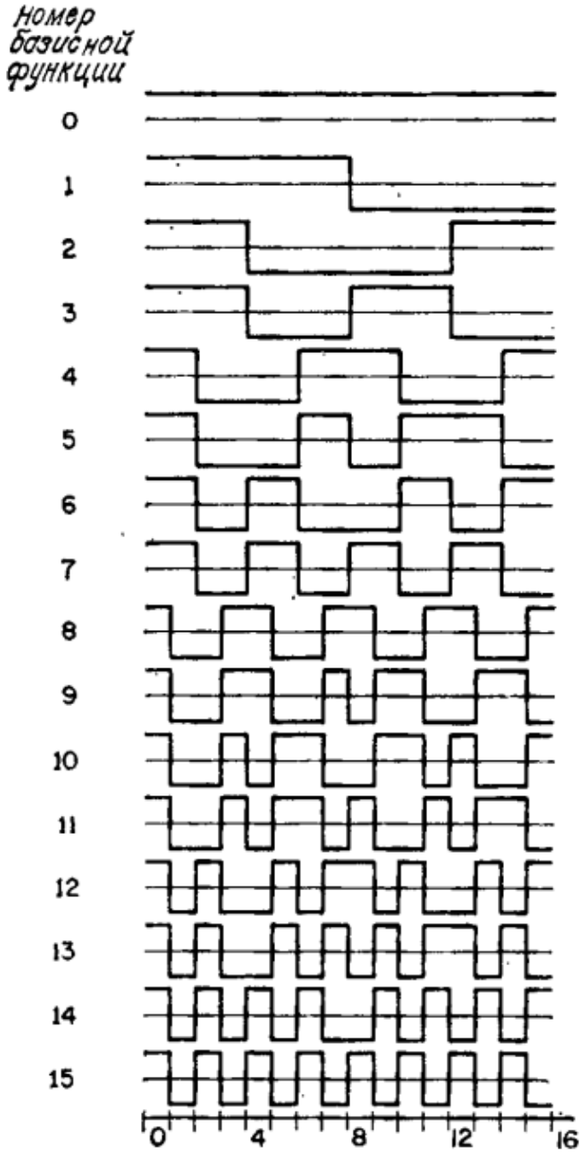
$$\mathbf{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \hline \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{array}\right]$$

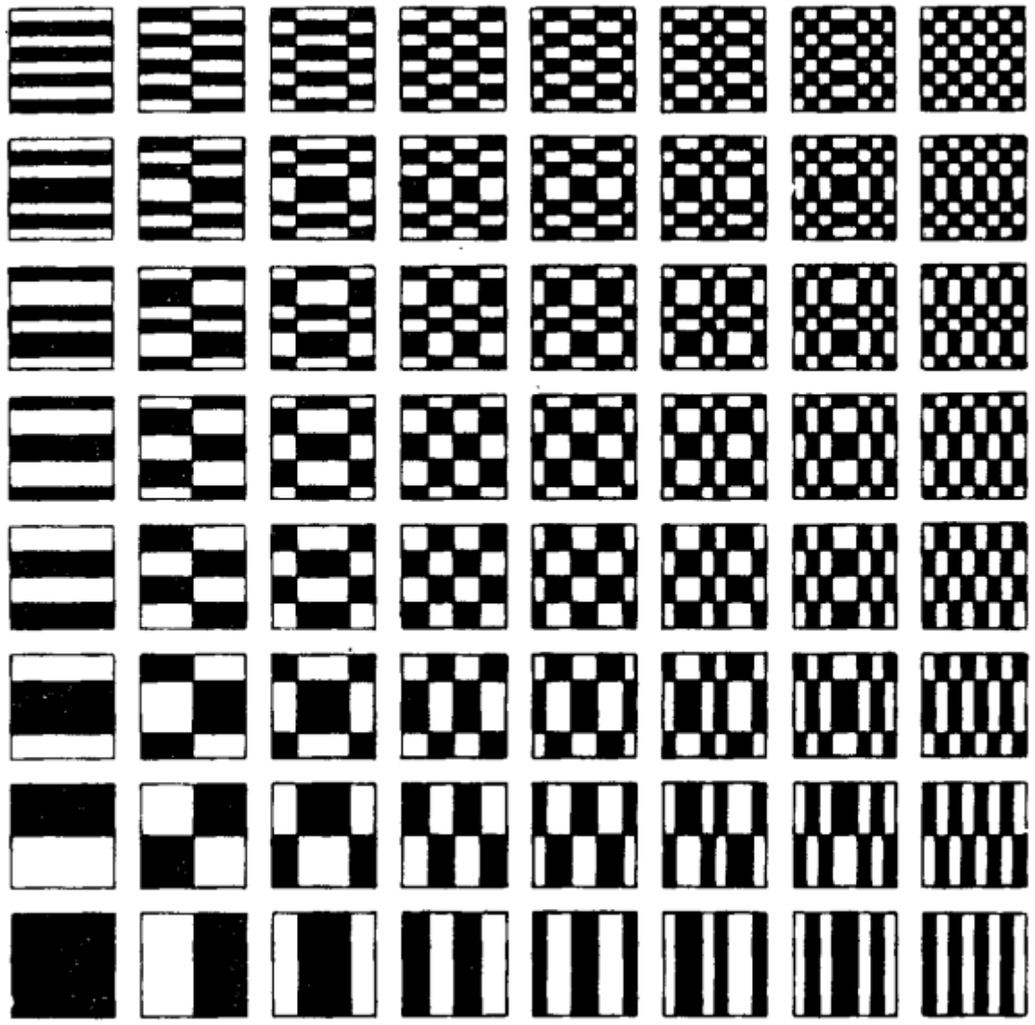
$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Число изменений знака: 0, 3, 1, 2

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Число изменения знака: 0, 7, 3, 4, 1, 6, 2, 5



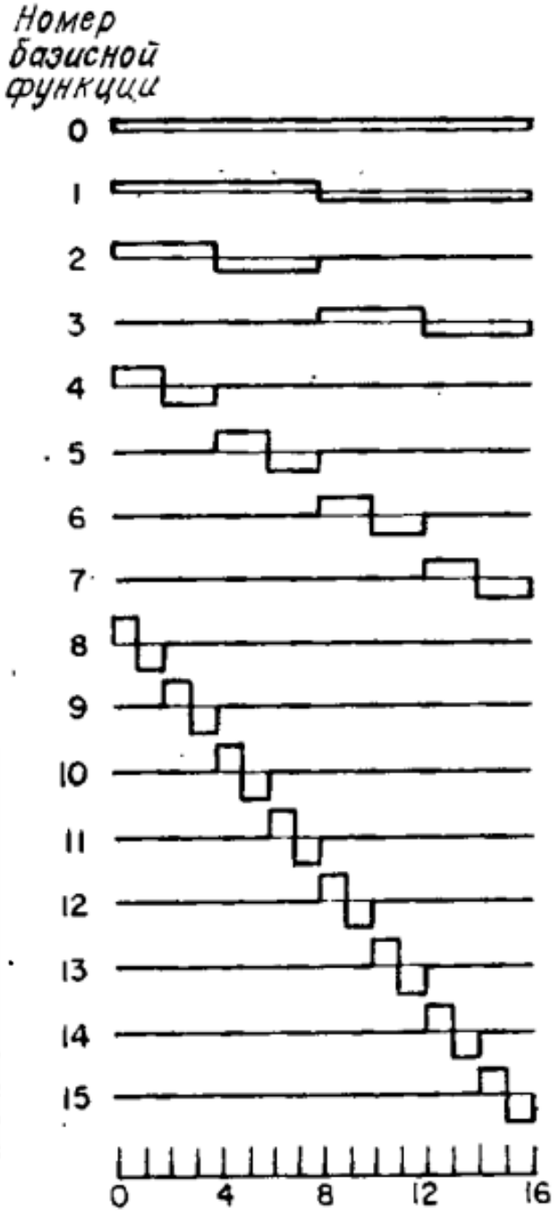


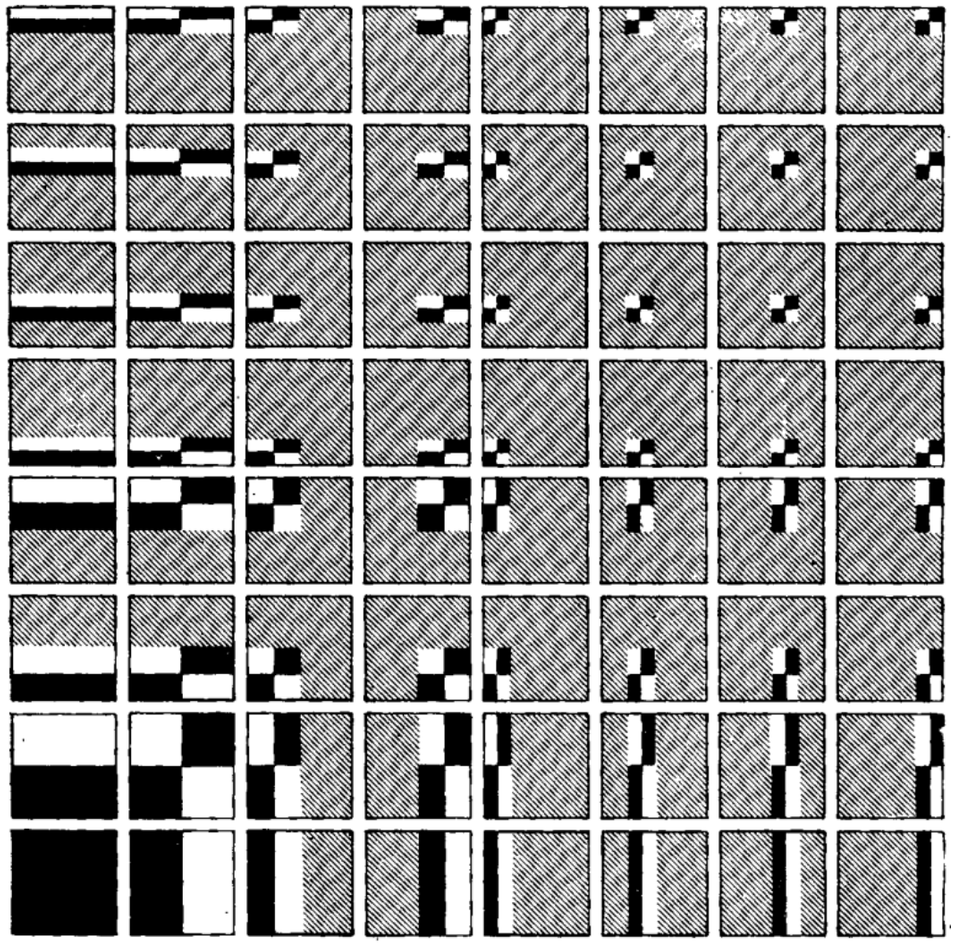
Ортогональные преобразования
Преобразование Хаара

Матрицы для порядка

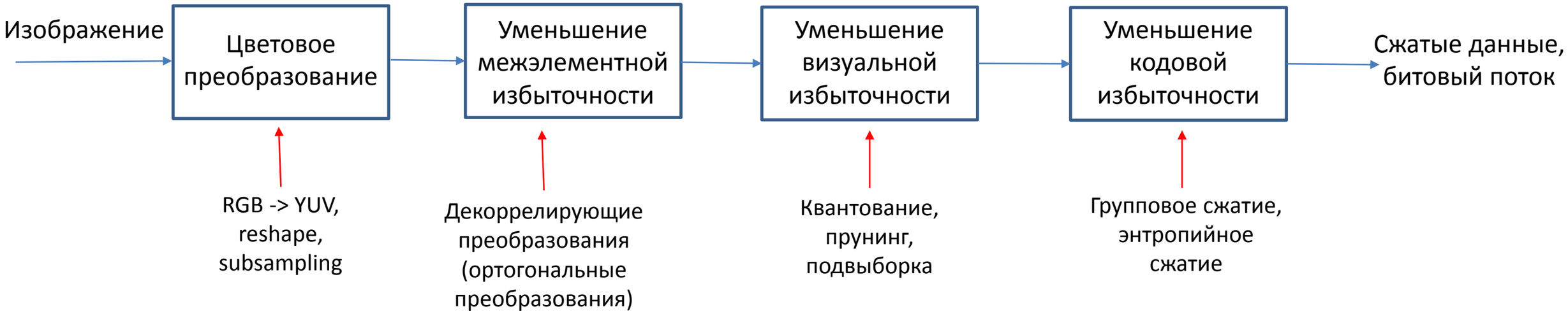
$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

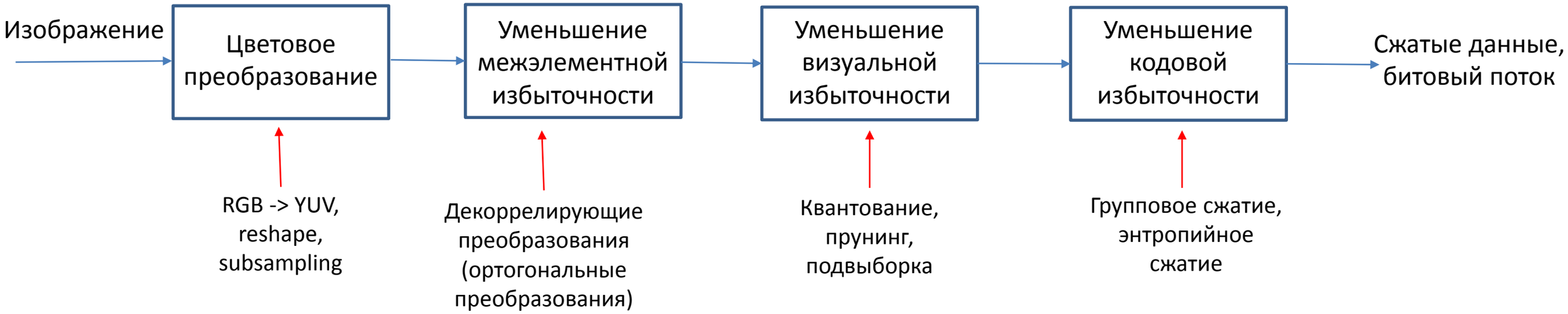




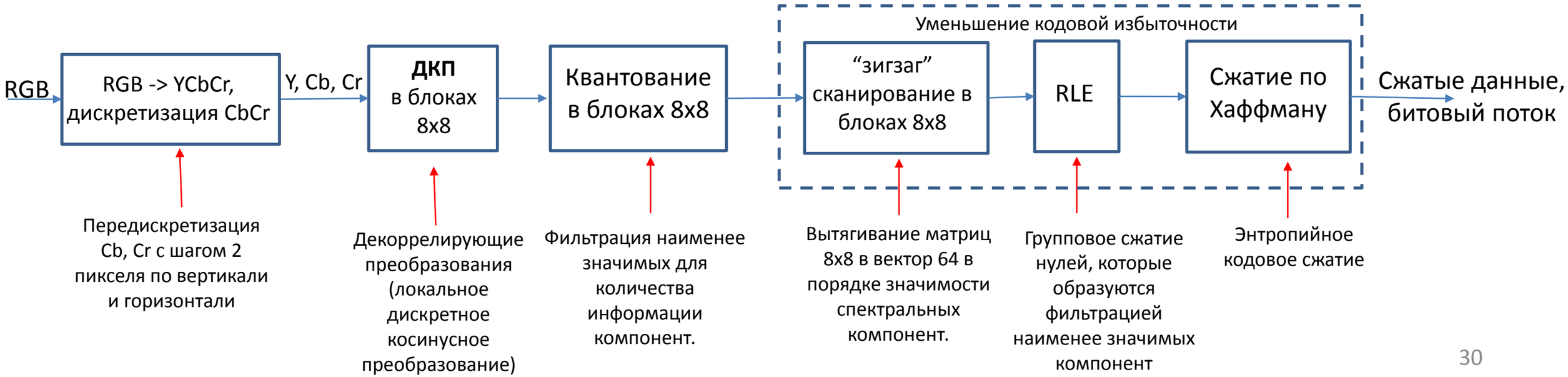
Подходы к сжатию и восстановлению изображения



Подходы к сжатию и восстановлению изображения

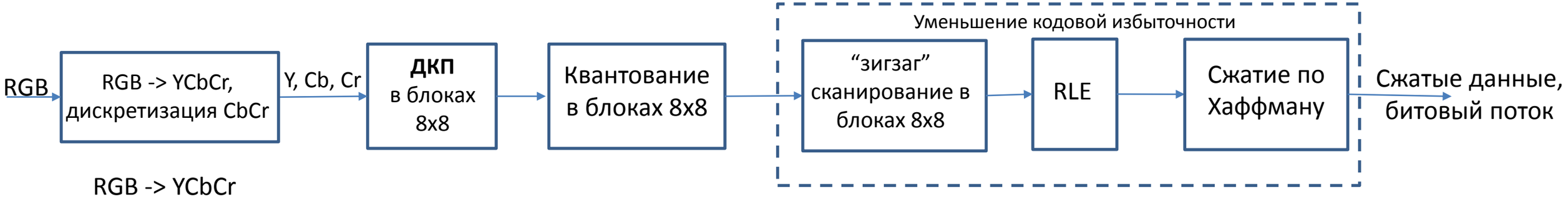


Алгоритм JPEG



Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



RGB -> YCbCr

$$\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix}$$

Передискретизация Cb, Cr с шагом 2 пикселя по вертикали и горизонтали

YCbCr -> RGB

$$\begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix} \right)$$

ДКП

$$Y[u,v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} C(i,u) \times C(j,v) \times y[i,j],$$

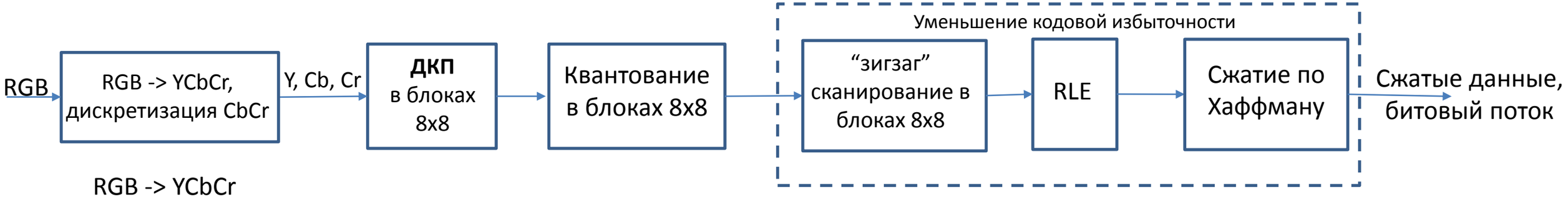
$$C(i,u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n} \right)$$

$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Декоррелирующие преобразования (локальное дискретное косинусное преобразование)

Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



RGB -> YCbCr

$$\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix}$$

YCbCr -> RGB

$$\begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix} \right)$$

ДКП

$$Y[u,v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} C(i,u) \times C(j,v) \times y[i,j],$$

$$C(i,u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n} \right)$$

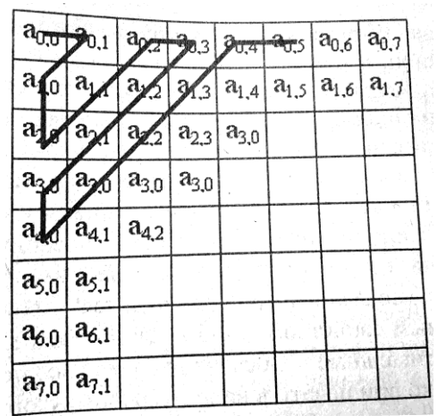
$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Квантование

$$Yq[u,v] = \text{IntegerRound}\left(\frac{Y[u,v]}{q[u,v]} \right)$$

Фильтрация наименее значимых для количества информации компонент.

“зигзаг” сканирование



Вытягивание матриц 8x8 в вектор 64 в порядке значимости спектральных компонент.

Zero run-length encoding, RLE

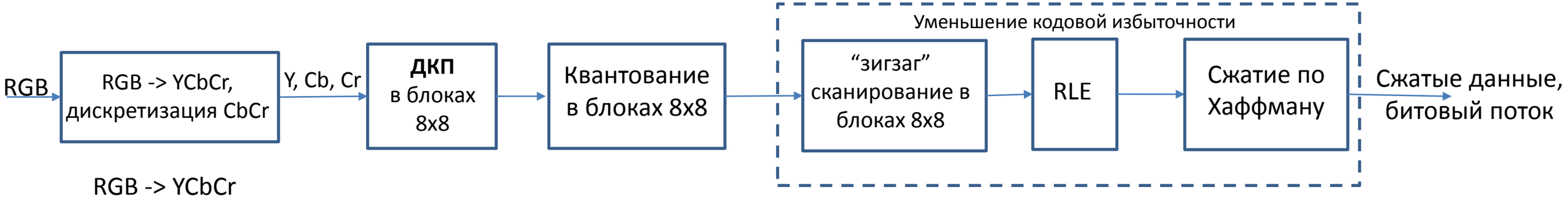
(zero_num,next_value), (zero_num,next_value),…

00000004008 -> (7,4), (2,8)

Групповое сжатие нулей, которые образуются фильтрацией наименее значимых компонент

Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



RGB -> YCbCr

$$\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix}$$

YCbCr -> RGB

$$\begin{vmatrix} R \\ G \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{vmatrix} \right)$$

ДКП

$$Y[u,v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} C(i,u) \times C(j,v) \times y[i,j],$$

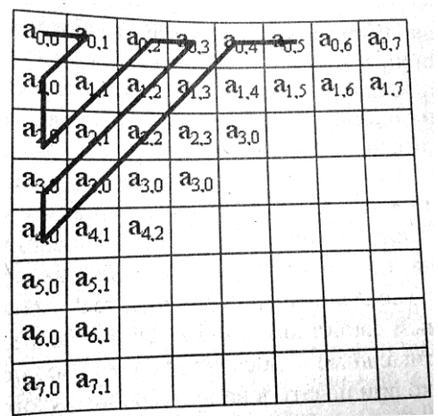
$$C(i,u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n} \right)$$

$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Квантование

$$Yq[u,v] = \text{IntegerRound}\left(\frac{Y[u,v]}{q[u,v]} \right)$$

“зигзаг” сканирование

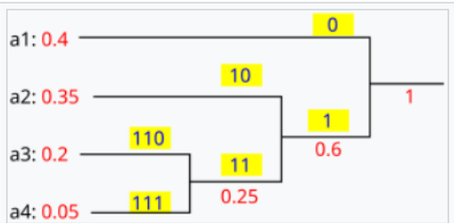


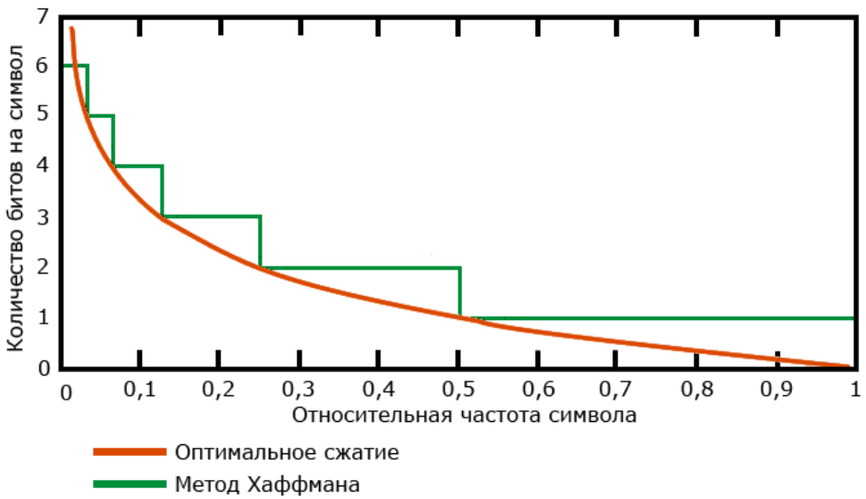
Zero run-length encoding, RLE

(zero_num,next_value), (zero_num,next_value),…

00000004008 -> (7,4), (2,8)

Энтропийное сжатие по Хаффману



A source generates 4 different symbols $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ with probability $\{0.4; 0.35; 0.2; 0.05\}$

Symbol	Code
a1	0
a2	10
a3	110
a4	111