

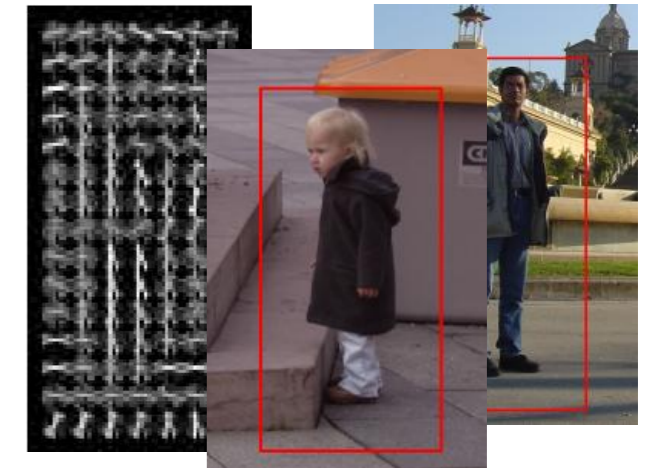
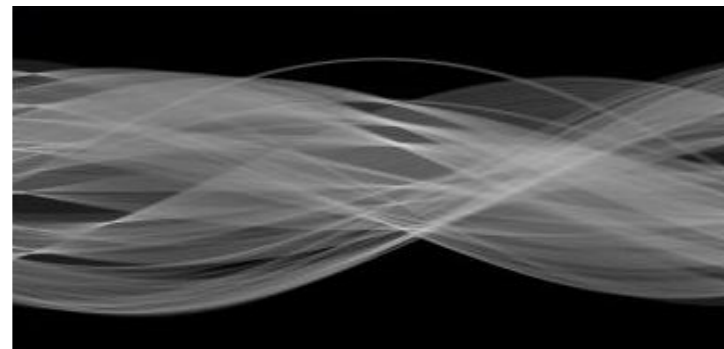
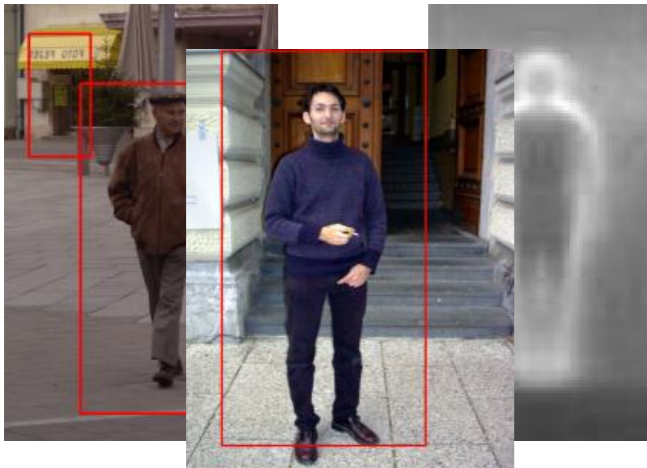
# Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

[http://bit.ly/ML\\_IS\\_CV](http://bit.ly/ML_IS_CV)

Гнеушев Александр Николаевич 

2026



# Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

## Рекомендуемый список литературы

1. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. М., Техносфера, 2005 – 1072 с.
2. **Pratt, W.K.** Introduction to Digital Image Processing. CRC Press, 2013. (на рус.яз: **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений: Пер. с англ.—М.: Мир, 1982.)
3. Методы компьютерной обработки изображений. Под ред. В.А.Сойфера. М., Физматлит, 2003. – 780 с.
4. **Яне Б.** Цифровая обработка изображений М.: Техносфера, 2007 – 584 с.
5. **Шапиро Л, Стокман Дж.** Компьютерное зрение. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006 – 752 с.
6. **Форсайт Д, Понс Ж.** Компьютерное зрение. Современный подход. М., Издательский дом «Вильямс», 2004 – 928 с.
7. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, - 464 с.
8. **Марр Д.** ЗРЕНИЕ: Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов. М., «Радио и связь». 1987.
9. **Бишоп Кристофер М.** Распознавание образов и машинное обучение. Вильямс, 2020 - 960 с.
10. **Duda R.O., Hart P.E., Stork D.G** Pattern classification. New York, Wiley Interscience Publication, 2001 – 654 p.
11. **Ту Дж., Гонсалес Р.** Принципы распознавания образов. М., Мир, 1978 – 412 с.
12. **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов. М., Наука, 1979 – 368 с.
13. **Сергей Николенко, Е. В. Архангельская, А. Кадурин.** Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. 481 с.
14. **Сергей Николенко.** Машинное обучение: основы. Издательство Питер, 2025 – 608 с.

# Цели курса

**Задачи компьютерного зрения:** автоматическая обработка, восстановление, улучшение, сверхразрешение, сегментация, распознавание, индексация, анализ и аннотация, редактирование и генерирование структур сцены на изображениях и видео.

Современные системы компьютерного зрения разнообразны: они реализованы как на основе классических подходов математического моделирования, так и с использованием нейросетевых моделей и машинного обучения в зависимости от требований целевой платформы, масштабируемости, ограничений вычислительных ресурсов, доступности обучающих данных, стоимости разработки и эксплуатации.

Классические методы математического моделирования обладают объяснительными свойствами и востребованы в ответственных системах, где требуется **достоверность** и высокий уровень безопасности. Нейросетевые подходы обобщают классические решения путем обучения параметров моделей на подготовленной обучающей выборке примеров, специализации нейросетевых архитектур и типов слоев, использования регуляризации параметров и латентных моделей, учета свойств изображений и ограничений в условиях недостатка обучающих примеров.

Упор делается на изложении **основ и базовых алгоритмов** обработки изображений, на понимании взаимосвязей и ограничений рассматриваемых методов. Рассматриваются базовые модели регистрации и представления изображений, решаются задачи реконструкция изображения алгебраическими методами и на основе спектральной теории фильтрации, излагаются подходы выделения информативных признаков и сжатия изображений, основы вейвлет-теории и многомасштабного анализа с целью дальнейшей обработки и анализа. При изложении так же рассматриваются обобщения и нейросетевые решения тех или иных задач.

**Цель курса** – дать представление о предмете обработки и анализе изображений, познакомить с математическими моделями, использующимися в компьютерном зрении, выработать интуицию при решении задач и построении **интеллектуальных систем.**

## Что такое интеллект ?

**Иммануил Кант** (Immanuel Kant)

22 апреля 1724 - 12 февраля 1804

«Критика чистого разума», 1781 г. - исследование познавательной возможности разума, в отрыве от знаний, получаемых эмпирическим (опытным) путём.

**Интеллект** – это осмысленная (умственная) способность человека (рассудок, разум, интуиция), развившиеся для адаптации к окружающей среде.  
(из словаря философских терминов)

**“Модель интеллекта”** по Канту: *“всякое наше знание начинается с **чувств**, переходит затем к **рассудку** и заканчивается в **разуме**”* (Кант И. Соч. в 6т. М., 1964, с. 340).

# Что такое интеллект ?

**Иммануил Кант** (Immanuel Kant)

22 апреля 1724 - 12 февраля 1804

«Критика чистого разума», 1781 г. - исследование познавательной возможности разума, в отрыве от знаний, получаемых эмпирическим (опытным) путём.

**Интеллект** – это осмысленная (умственная) способность человека (рассудок, разум, интуиция), развившиеся для адаптации к окружающей среде.  
(из словаря философских терминов)

“**Модель интеллекта**” по Канту: “всякое наше знание начинается с **чувств**, переходит затем к **рассудку** и заканчивается в **разуме**” (Кант И. Соч. в 6 т. М., 1964, с. 340).

Познание среды через органы **чувств**, **феномены** – проекции объектов мира в сознании через опыт, то что мы познаем.

**Категории** – атрибуты, свойства сущностей, классы паттернов. Система (схема) категорий – врожденные паттерны возможных суждений.

**Суждения категориями** – инструмент познания интеллектом (**рассудком**): аналитические и синтетические суждения, априорные (a priori) и апостериорные (a posteriori) по отношению к феноменам, к опыту. Реальность познается через систему суждений рассудка (“*теоретическая нагрузка*” фактов): **разум формирует вещи** (феномены) через априорные знания и систему суждений, *обулавливающие* познание.

**Ноумены** (“вещи в себе”, “чистые” факты) – непознаваемая напрямую реальность из-за ограниченности **рассудка**, существующая независимо от нашего восприятия. “Мы знаем только то, что можем знать”.

**Разум** — единственный источник этики (морального поведения), имеет **регулятивное** значение: регулятор движения мысли к целям систематического единства, дает **систему принципов**, которым должно удовлетворять всякое знание.

# Что такое интеллект ?

**Иммануил Кант** (Immanuel Kant)

22 апреля 1724 - 12 февраля 1804

«Критика чистого разума», 1781 г. - исследование познавательной возможности разума, в отрыве от знаний, получаемых эмпирическим (опытным) путём.

**Феномены** – проекции объектов мира в сознании через опыт, то что мы познаем.

**Система категорий** – врожденные паттерны возможных свойств сущностей.

**Суждения категориями** – инструмент познания интеллектом (**рассудком**): *“разум формирует вещи”*.

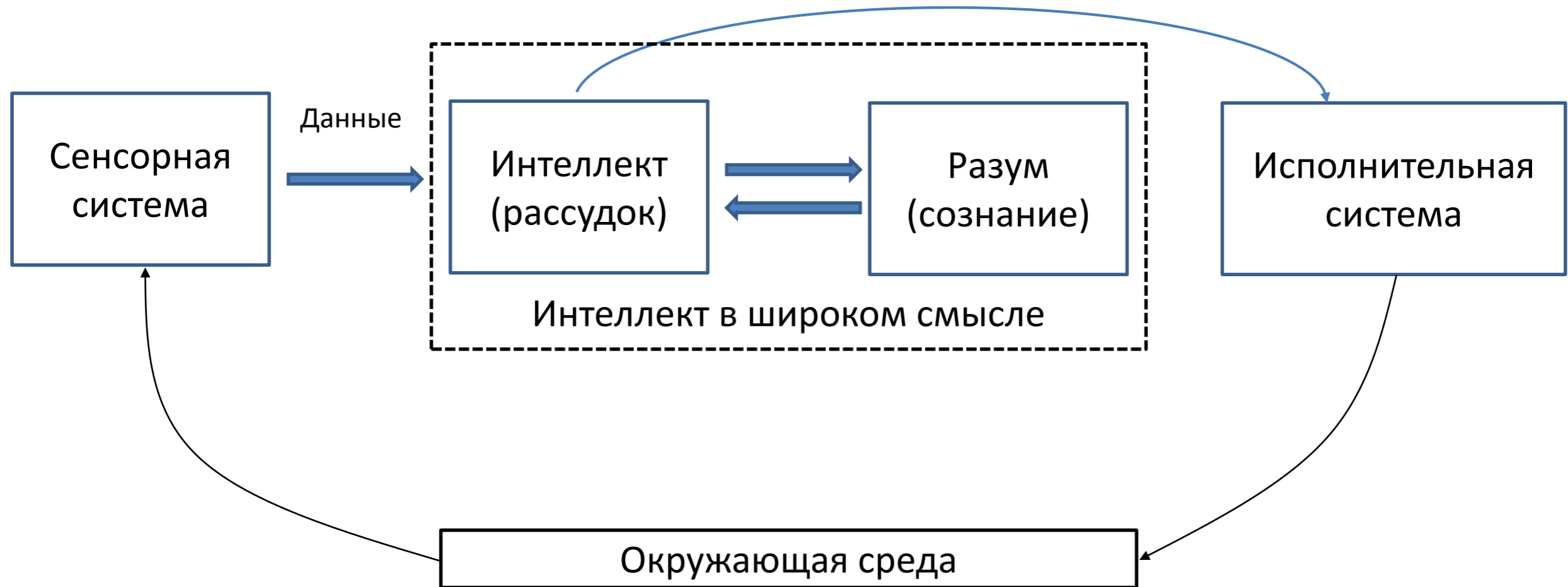
**Ноумены** (“вещи в себе”, “чистые” факты) – непознаваемая напрямую реальность из-за ограниченности **рассудка**.

“Мысли без содержания – пусты,  
созерцание без понятий – слепы.”

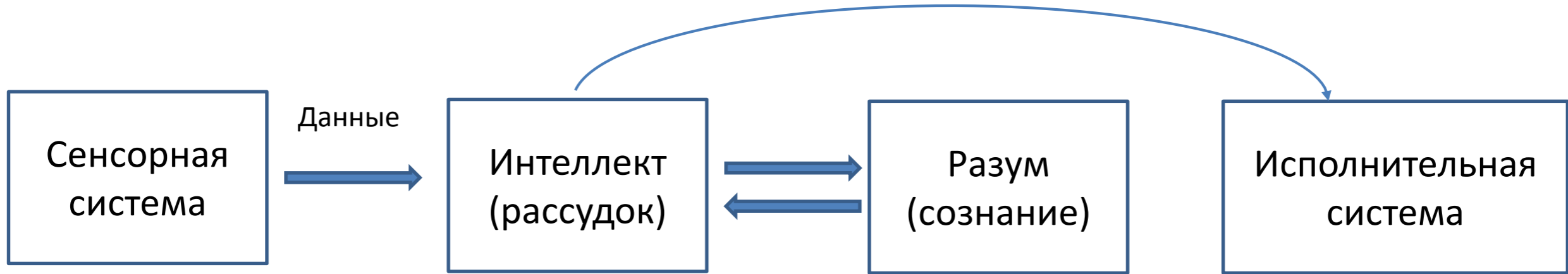


# Что такое интеллект ?

## Модель интеллекта в контексте окружающей среды

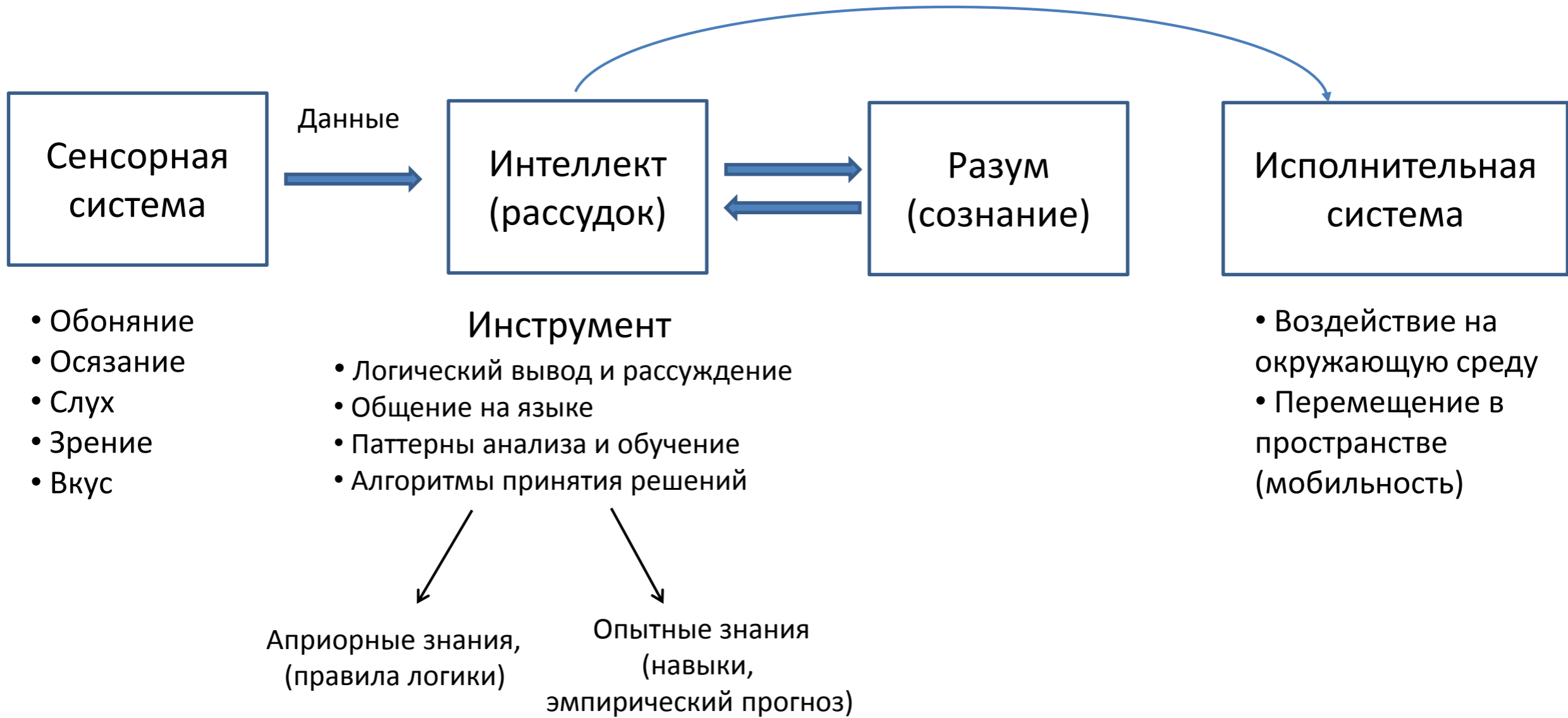


# Что такое интеллект ?

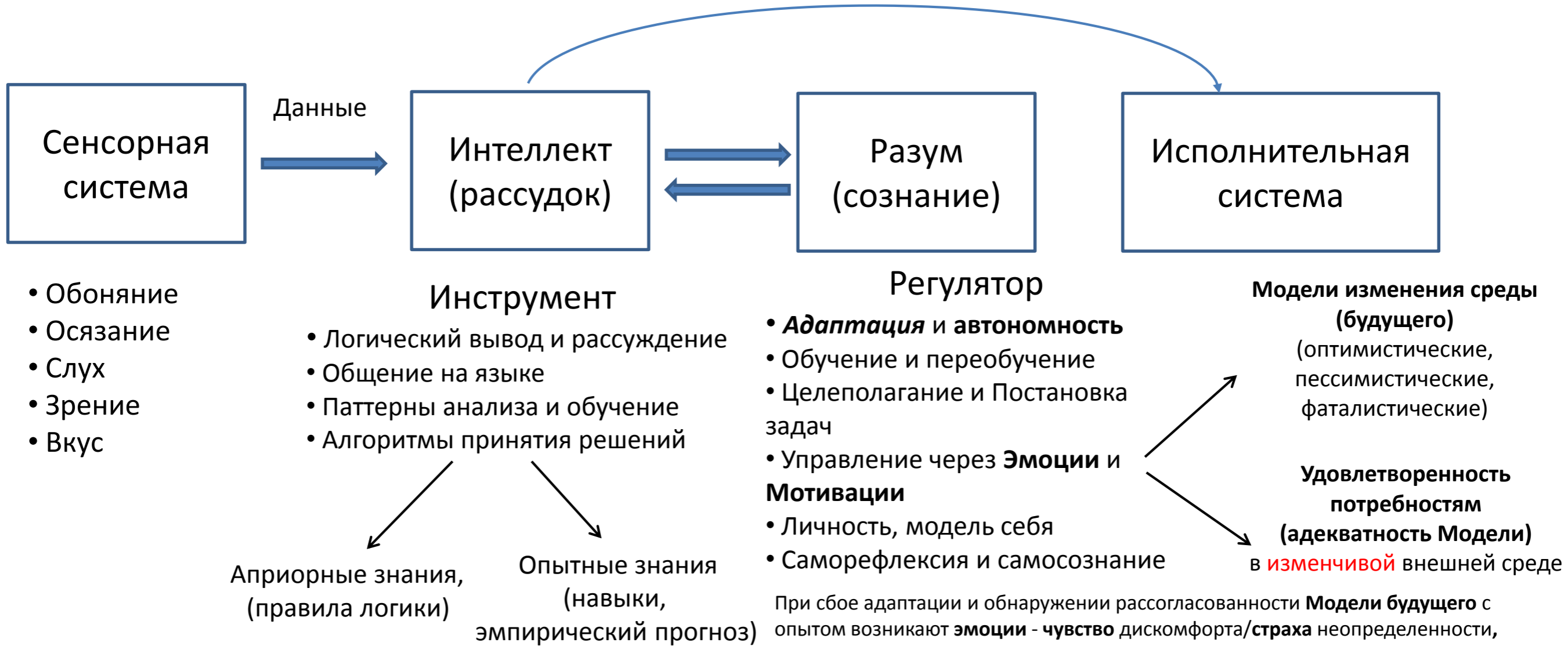


- Обоняние
- Осязание
- Слух
- Зрение
- Вкус

# Что такое интеллект ?



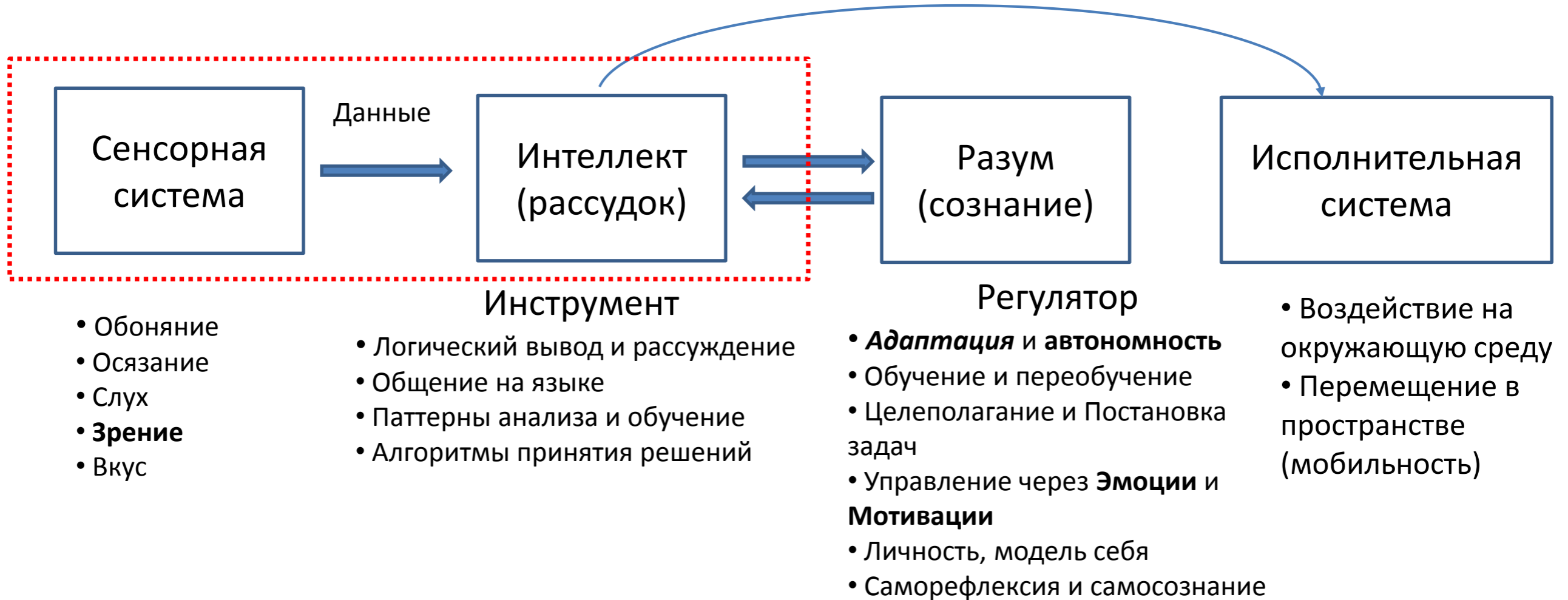
# Что такое интеллект ?



- Что **первично**: рассудок или разум?
- Где граница рассудка и разума? Могут ли функции разума быть следствием развития интеллекта-рассудка?
- Уровень разума определяет степень **автономности**? Развитие разума – необходимость при увеличении **автономности**?
- Сознание – высшее/необходимое состояние разума?

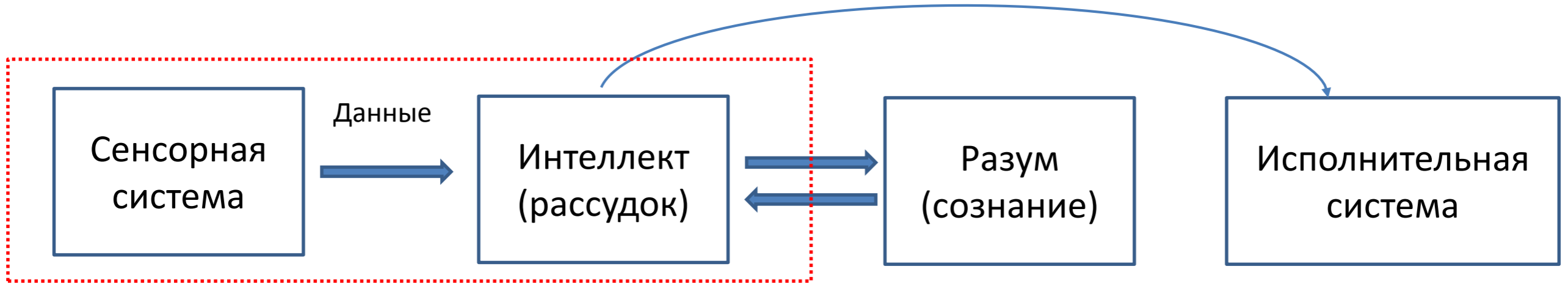
При сбое адаптации и обнаружении несогласованности **Модели будущего** с опытом возникают **эмоции** - **чувство дискомфорта/страха** неопределенности, через дофаминовую систему создается **потребность – мотивация** в компенсации ошибки **Модели** и запускается **поведение** ее обновления новыми знаниями (решение дилеммы exploration vs exploitation). В случае успеха это приводит к **эмоции удовлетворения** (дофаминовый всплеск – награда за обучение). Память о дофаминовой награде - чувство **любопытства**, мотивирует проактивное повторение поведения для обновления **Модели** и самообучения.

# Что такое интеллект ?



**Мыслить** – оперировать с данными с помощью интеллекта

# Что такое интеллект ?



- Обоняние
- Осязание
- Слух
- **Зрение**
- Вкус

## Инструмент

- Логический вывод и рассуждение
- Общение на языке
- Паттерны анализа и обучение
- Алгоритмы принятия решений

## Регулятор

- **Адаптация** и автономность
- Обучение и переобучение
- Целеполагание и Постановка задач
- Управление через **Эмоции** и **Мотивации**
- Личность, модель себя
- Саморефлексия и самосознание

- Воздействие на окружающую среду
- Перемещение в пространстве (мобильность)

### Априорные знания

#### Дедукция

по априорным правилам, моделям

↓  
Аналитические модели, экспертные системы

↓  
Объяснительная функция, построение правил вывода (интерпретаций)

### Опытные знания

#### Индукция

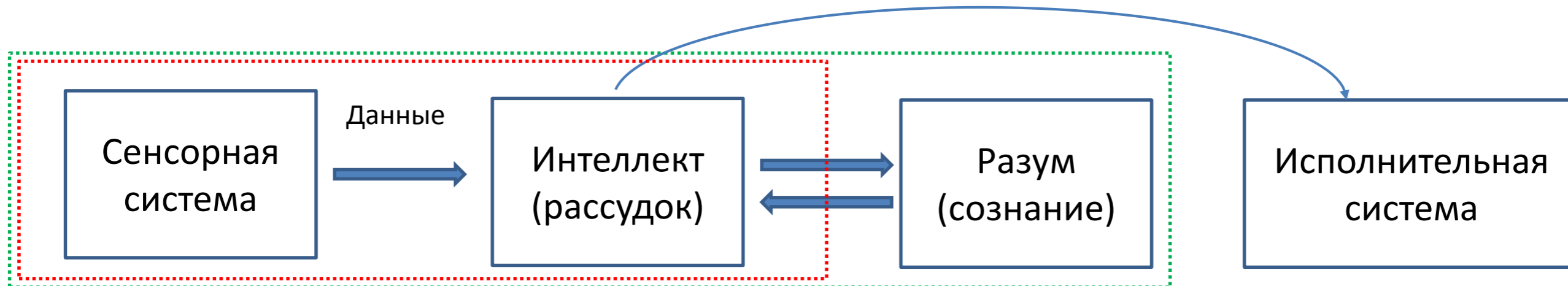
по прецедентам, апостериорные знания

↓  
Обучение по прецедентам, по эмпирическим данным

↓  
Выявление скрытых закономерностей и построение эмпирических правил

- Что **первично**: дедукция или индукция?
- Может ли эволюционно возникнуть дедукция?
- Можно ли машинным обучением (индукцией) получить новое качество интеллекта – объяснение (дедукцию, связную цепочку мыслей - CoT)?

# Что такое интеллект ?



- Обоняние
- Осязание
- Слух
- **Зрение**
- Вкус

- Логический вывод и рассуждение
- Общение на языке
- Паттерны анализа и обучение
- Алгоритмы принятия решений

- **Адаптация** и автономность
- Обучение и переобучение
- Целеполагание и Постановка задач
- Управление через **Эмоции** и **Мотивации**
- Личность, модель себя
- Саморефлексия и самосознание

- Воздействие на окружающую среду
- Перемещение в пространстве (мобильность)

Инструмент

Регулятор

Априорные знания

**Дедукция**

по априорным правилам, моделям

↓  
Аналитические модели, экспертные системы

↓  
Объяснительная функция, построение правил вывода (интерпретаций)

Опытные знания

**Индукция**

по прецедентам, апостериорные знания

↓  
Обучение по прецедентам, по эмпирическим данным

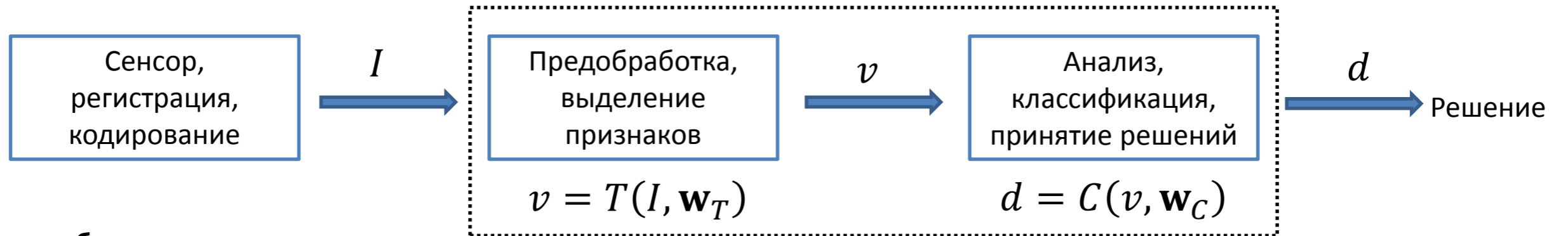
↓  
Выявление скрытых закономерностей и построение эмпирических правил

В полном смысле **Интеллект** включает в себя не только синтез новых знаний из эмпирических данных, но и объяснительную функцию, пошаговое аналитическое рассуждение как и почему было получено то или иное решение (**понимание**).

**Объяснительная функция** – необходимая составляющая приложений, сопряженных с безопасностью, риском для жизни и здоровья.

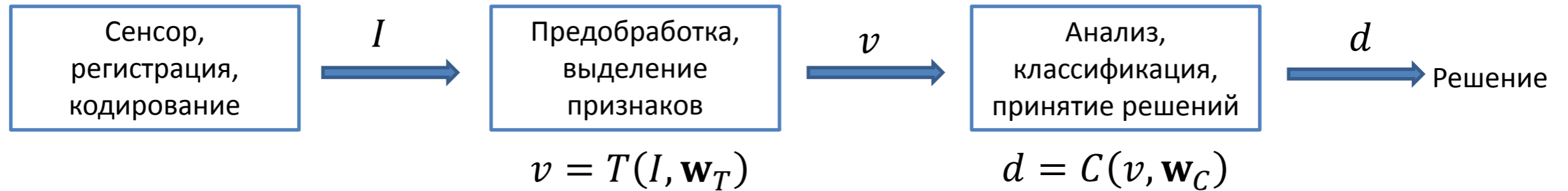
**Сильный ИИ (AGI)**, **автономный разумный ИИ** – инструмент, помощник или конкурент человеку?

# Модель интеллектуальной системы



- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

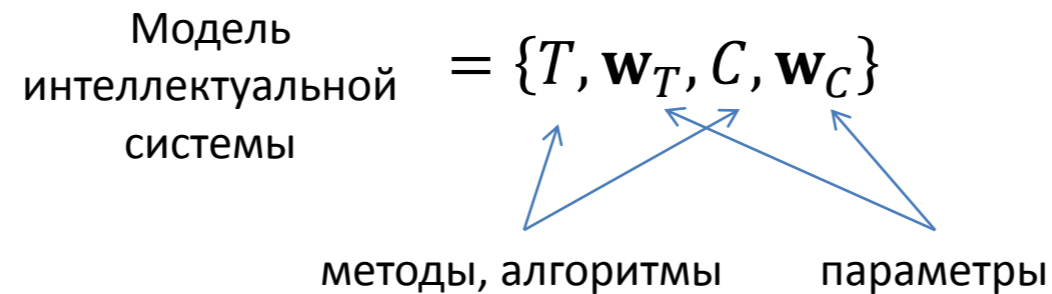
# Модель интеллектуальной системы



- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

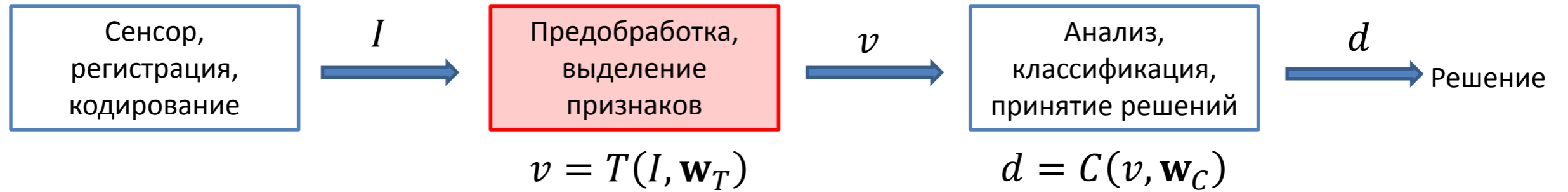
$$F(I, \mathbf{W}) = (C \circ T)(I, \mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T) = C(T(I, \mathbf{w}_T), \mathbf{w}_C)$$

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T\}$$



Методы и параметры модели могут быть обучаемы на опытных данных или получены аналитически на основе математического моделирования и априорно заданы экспертом. В случае обучаемых параметров говорят о машинном обучении.

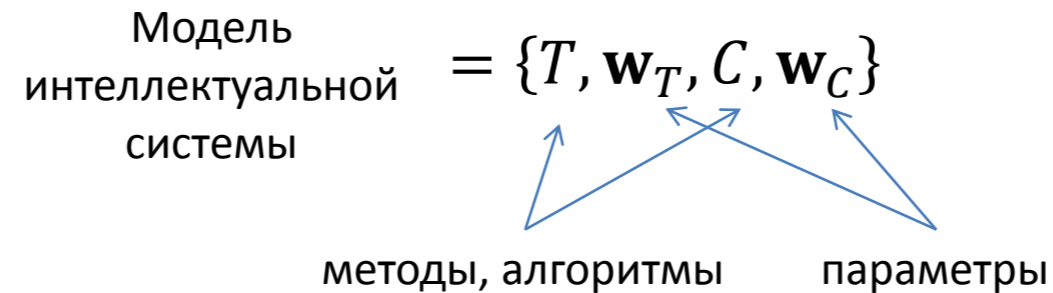
# Модель интеллектуальной системы



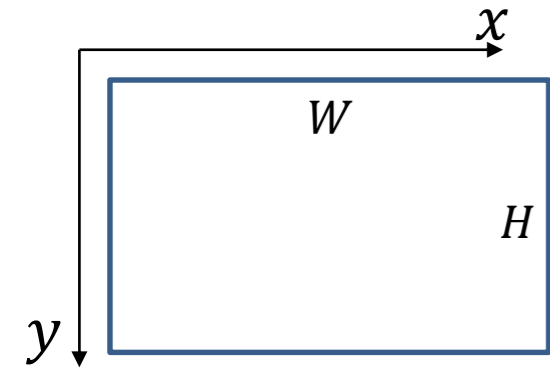
- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

$$F(I, \mathbf{W}) = (C \circ T)(I, \mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T) = C(T(I, \mathbf{w}_T), \mathbf{w}_C)$$

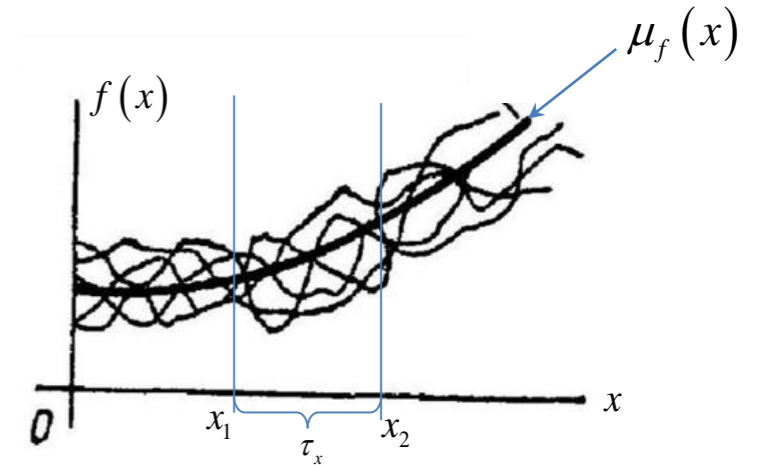
$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T\}$$



# Модель выделения признаков



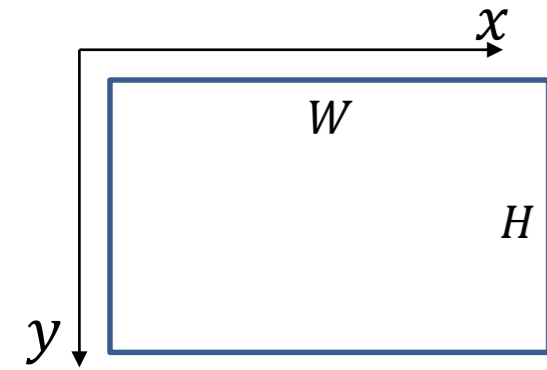
Изображение  $f(\mathbf{x})$ :  $(x, y) \rightarrow \{0, 255\}$ ,  
 $0 \leq x \leq W$ ,  
 $0 \leq y \leq H$



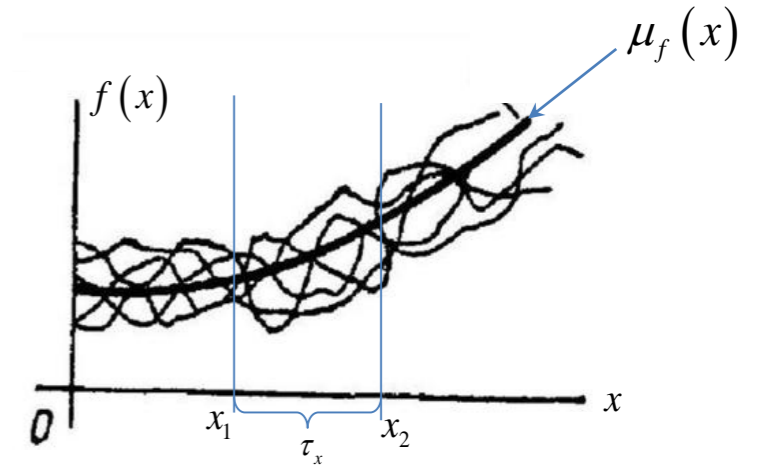
Изображение  $f(x, y)$  - избыточно, моделируется двумерным марковским процессом.  
Автокорреляционная функция стационарного марковского процесса первого порядка:

$$K_{x,y}(x_1, y_1; x_2, y_2) = M\{f(x_1, y_1)f(x_1 + \tau_x, y_1 + \tau_y)\} = K_{x,y}(\tau_x, \tau_y) = Ke^{-\sqrt{a_x^2\tau_x^2 + a_y^2\tau_y^2}} \approx Ke^{-a_x|\tau_x| - a_y|\tau_y|}$$

# Модель выделения признаков



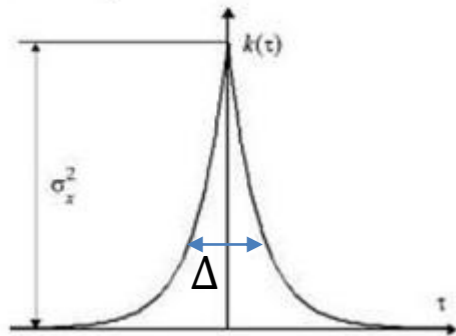
Изображение  $f(\mathbf{x})$ :  $(x, y) \rightarrow \{0, 255\}$ ,  
 $0 \leq x \leq W$ ,  
 $0 \leq y \leq H$



Изображение  $f(x, y)$  - избыточно, моделируется двумерным марковским процессом. Автокорреляционная функция стационарного марковского процесса первого порядка:

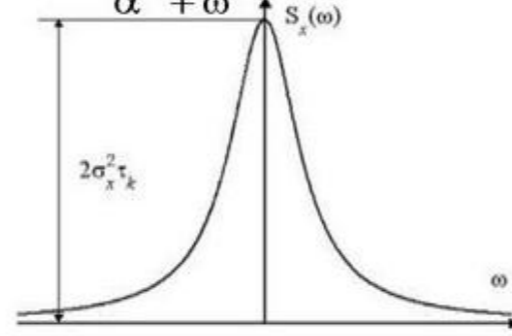
$$K_{x,y}(x_1, y_1; x_2, y_2) = M\{f(x_1, y_1)f(x_1 + \tau_x, y_1 + \tau_y)\} = K_{x,y}(\tau_x, \tau_y) = Ke^{-\sqrt{a_x^2\tau_x^2 + a_y^2\tau_y^2}} \approx Ke^{-a_x|\tau_x| - a_y|\tau_y|}$$

$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$$



Автокорреляционная функция

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



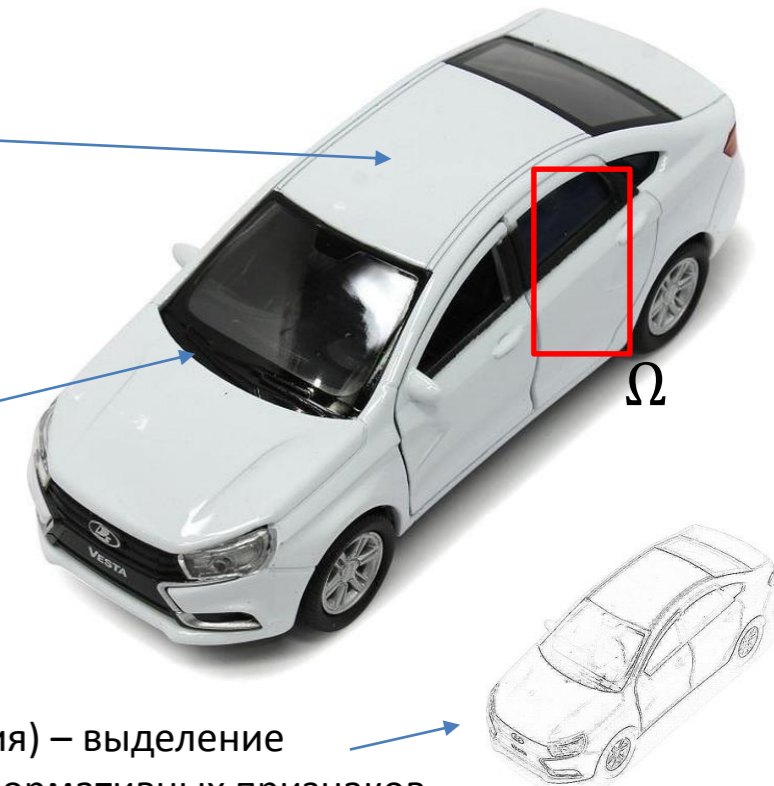
Энергетический спектр мощности

Показатель избыточности: 
$$\Delta = \frac{1}{2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |k_x(\tau)| d\tau$$

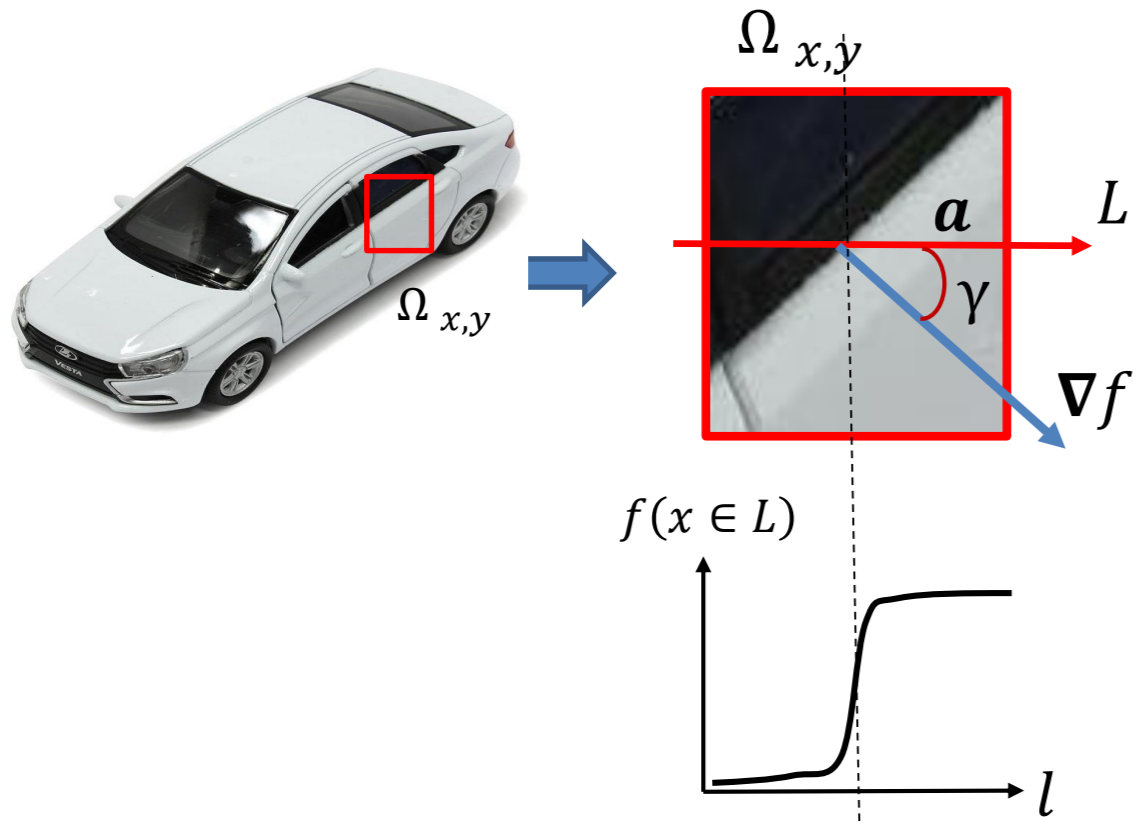
**Наиболее избыточные (предсказуемые) области** - равномерные по яркости области, окруженные границами по-разному ориентированных, различных по яркости плоскостей/областей.

**Контурные признаки (edges)** – перепады яркости, неоднородности, границы однородных областей, несут максимальное количество информации. Для уменьшения избыточности изображения, выделяют граничные точки.

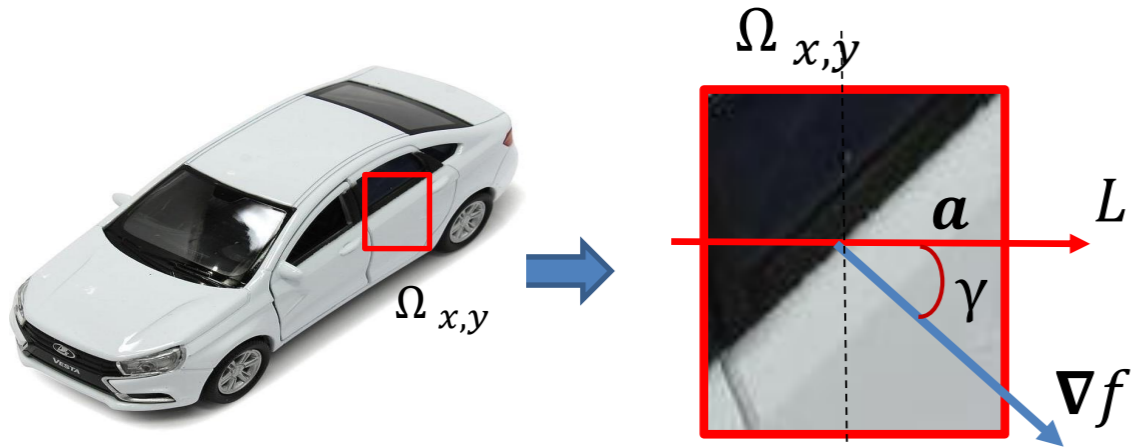
**Преобразование декорреляции (отбеливания)** – выделение разностных неоднородностей, наиболее информативных признаков.



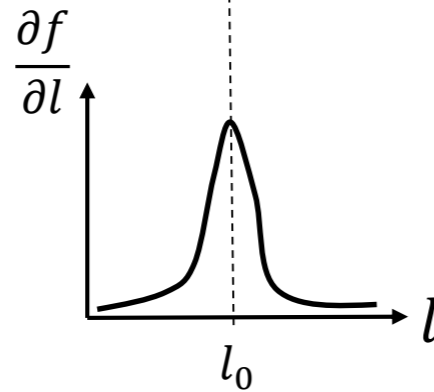
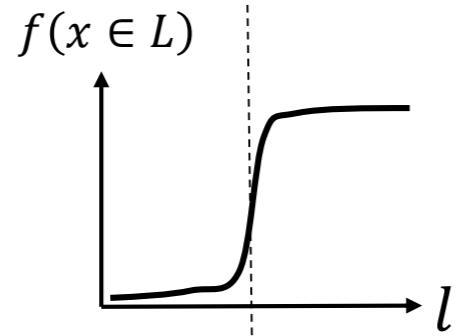
# Модель выделения признаков



# Модель выделения признаков

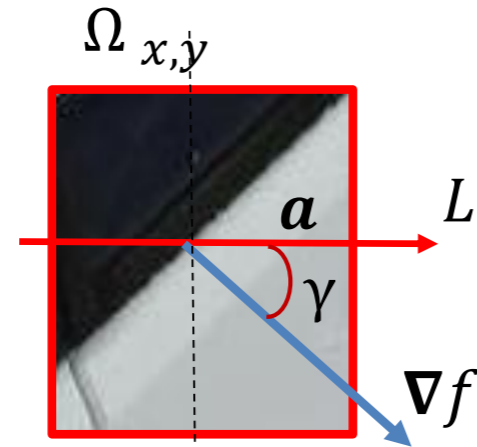
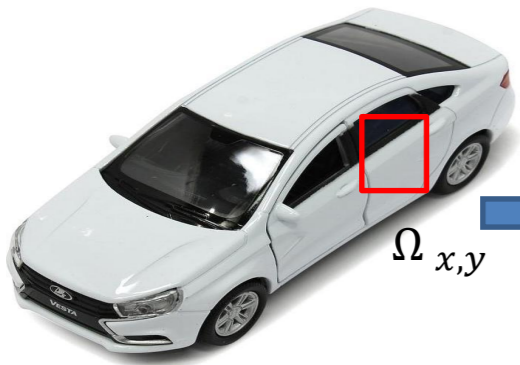


Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



$$l_0 = \operatorname{argmax} \left| \frac{df}{dl} \right|$$

# Модель выделения признаков



$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \langle \nabla f, dr \rangle,$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ,  $d\mathbf{r} = (dx, dy)^T$

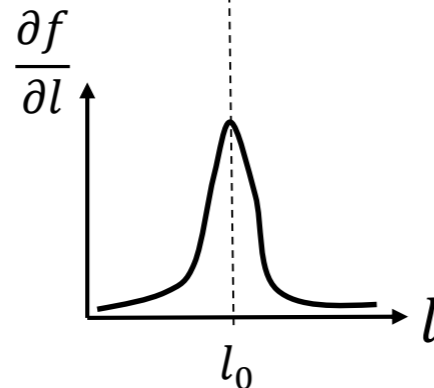
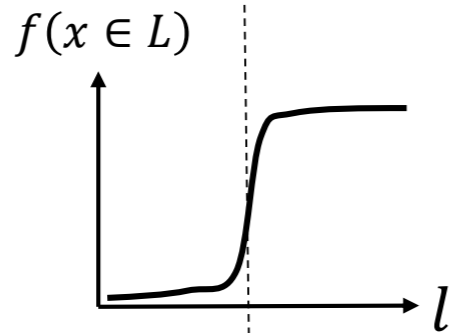
Прямая  $L$  в области  $\Omega_{x,y}$  задана параметрически:

$$L_\beta: \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{a}l + \rho\mathbf{n}; \\ \mathbf{a} = (\cos\beta, \sin\beta); \\ \rho = -x\sin\beta + y\cos\beta; \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{a}dl \Rightarrow df(x, y) = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle dl,$$

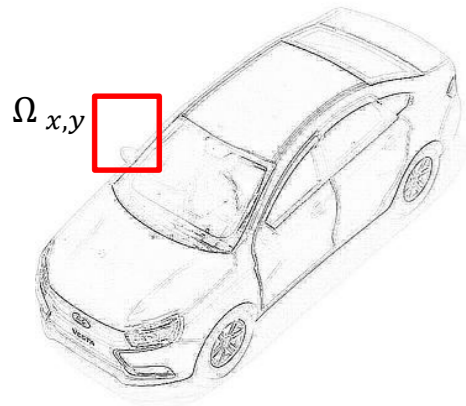
Направляющий вектор

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



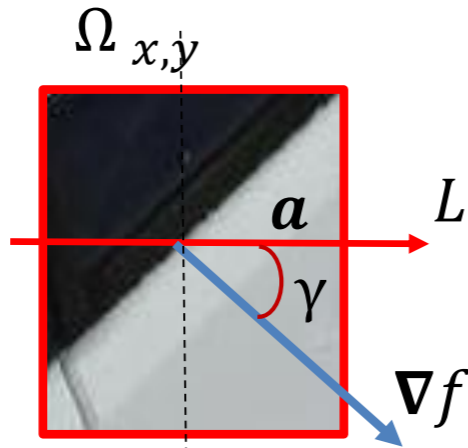
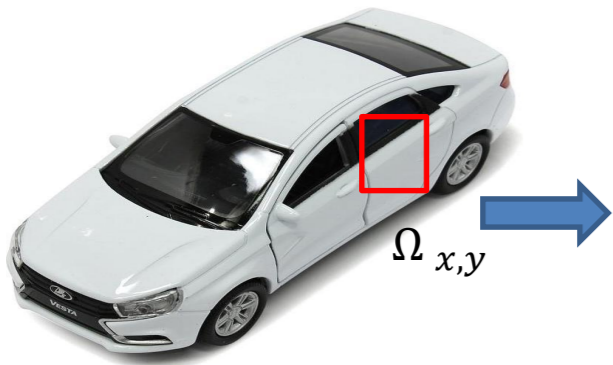
$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{df(x, y)}{dl} = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta = |\nabla f(x, y)| \cos\gamma_\beta$$

проекция градиента на направление  $\mathbf{a}$



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f|$$

# Модель выделения признаков



$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \langle \nabla f, dr \rangle,$$

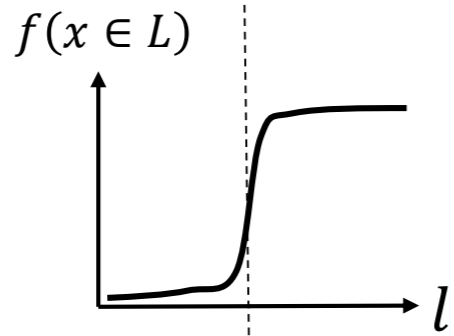
где  $r = (x, y)^T$ ,  $dr = (dx, dy)^T$

Прямая  $L$  в области  $\Omega_{x,y}$  задана параметрически:

$$L_\beta: \begin{cases} r = al + \rho n; \\ a = (\cos\beta, \sin\beta); \\ \rho = -x\sin\beta + y\cos\beta; \end{cases} \Rightarrow dr = a dl \Rightarrow df(x, y) = \langle \nabla f, a \rangle dl,$$

Направляющий вектор

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.

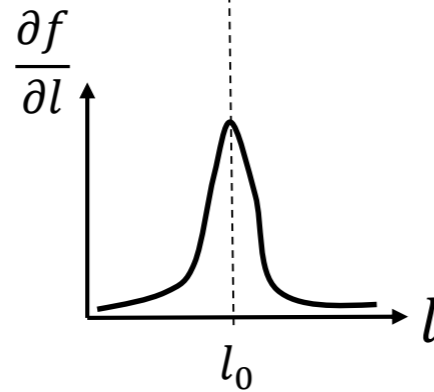


$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{df(x, y)}{dl} = \langle \nabla f, a \rangle = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta = |\nabla f(x, y)| \cos\gamma_\beta$$

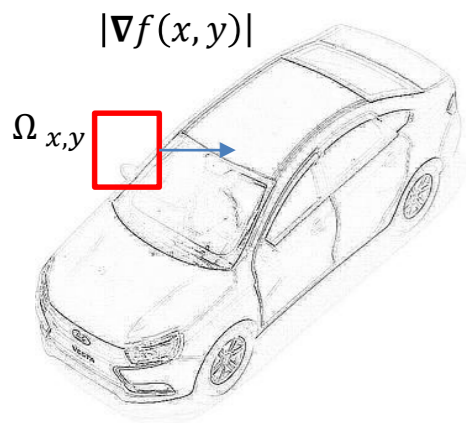
проекция градиента на направление  $a$

$$\Rightarrow \max_\beta V_\beta(x, y) = \max_\beta \frac{df(x, y)}{dl} = |\nabla f(x, y)|$$

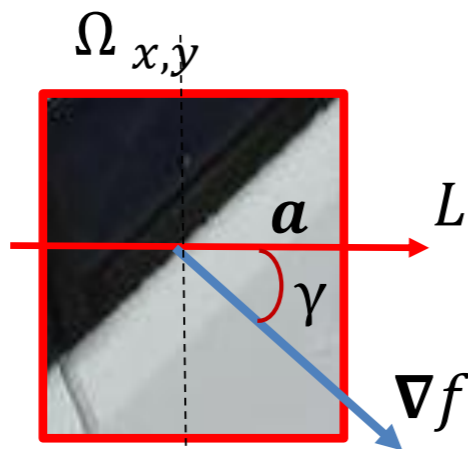
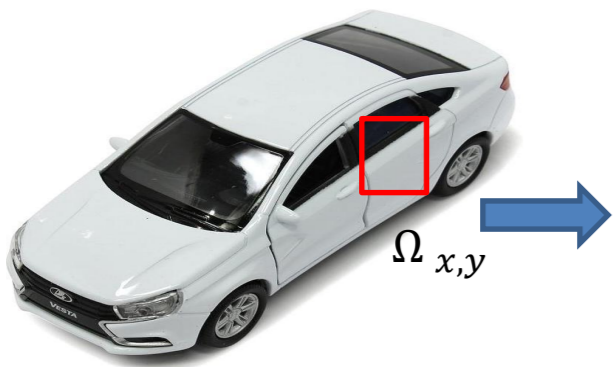
$$\Rightarrow \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} \max_\beta V_\beta(x, y) = \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} |\nabla f(x, y)| = \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f|$$



# Модель выделения признаков



$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \langle \nabla f, dr \rangle,$$

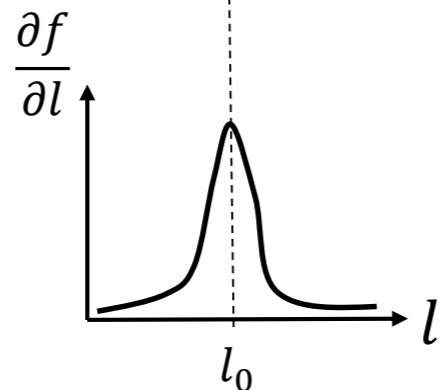
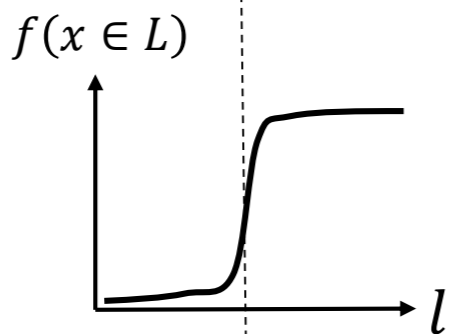
где  $r = (x, y)^T$ ,  $dr = (dx, dy)^T$

Прямая  $L$  в области  $\Omega_{x,y}$  задана параметрически:

$$L_\beta: \begin{cases} r = al + \rho n; \\ \mathbf{a} = (\cos\beta, \sin\beta); \\ \rho = -x\sin\beta + y\cos\beta; \end{cases} \Rightarrow dr = \mathbf{a}dl \Rightarrow df(x, y) = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle dl,$$

Направляющий вектор

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f|$$

$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{df(x, y)}{dl} = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta = |\nabla f(x, y)| \cos\gamma_\beta$$

проекция градиента на направление  $\mathbf{a}$

$$\Rightarrow \max_\beta V_\beta(x, y) = \max_\beta \frac{df(x, y)}{dl} = |\nabla f(x, y)|$$

$$\Rightarrow \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} \max_\beta V_\beta(x, y) = \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} |\nabla f(x, y)| = \max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

## Классический подход - контурные точки

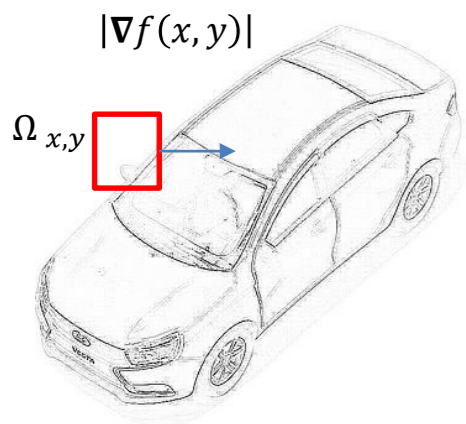
(локальные максимумы по окрестности модуля градиента)

$$E(x, y) = \begin{cases} 1, & \operatorname{argmax}_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} |\nabla f(x, y)| \notin \Gamma_{\Omega_{x,y}} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

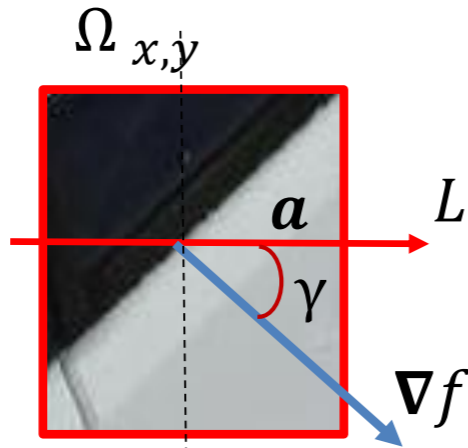
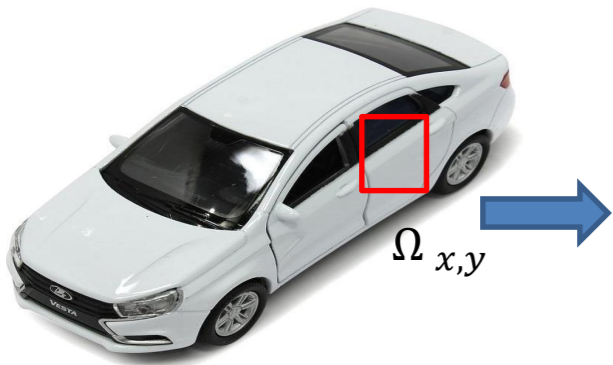
не на границе области (окна  $\Omega_{x,y}$ )

**Аналитическая признаковая модель:**

{контурные точки} -> {контурная модель} -> {высокоуровневое описание}



# Модель выделения признаков



$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \langle \nabla f, dr \rangle,$$

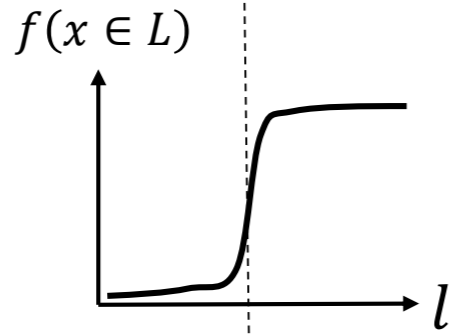
где  $r = (x, y)^T$ ,  $dr = (dx, dy)^T$

Прямая  $L$  в области  $\Omega_{x,y}$  задана параметрически:

$$L_\beta: \begin{cases} r = al + \rho n; \\ \mathbf{a} = (\cos\beta, \sin\beta); \\ \rho = -x\sin\beta + y\cos\beta; \end{cases} \Rightarrow dr = \mathbf{a}dl \Rightarrow df(x, y) = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle dl,$$

Направляющий вектор

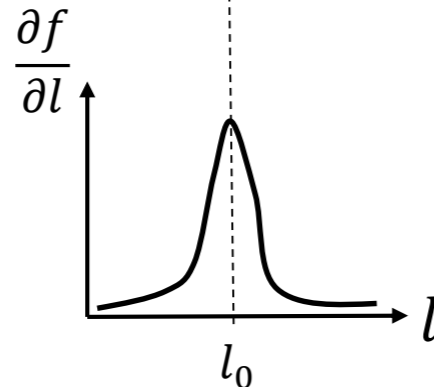
Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



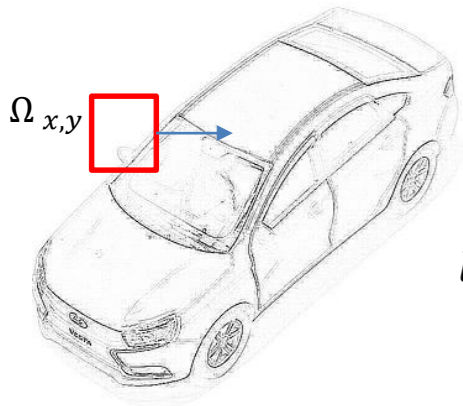
$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{df(x, y)}{dl} = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta = |\nabla f(x, y)| \cos\gamma_\beta$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

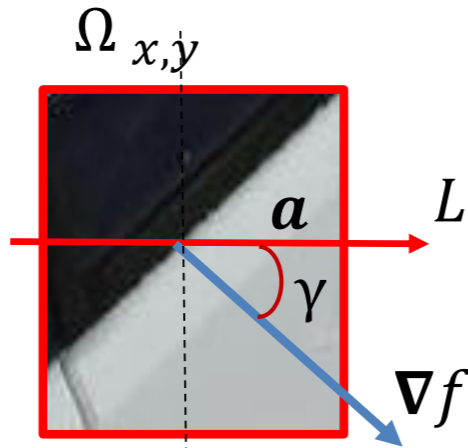
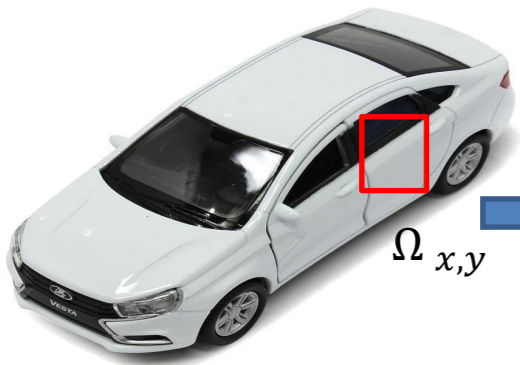
$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{1}{2} (f(x+1, y)\cos\beta - f(x-1, y)\cos\beta + f(x, y+1)\sin\beta - f(x, y-1)\sin\beta)$$



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f| = \operatorname{argmax} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$



# Модель выделения признаков



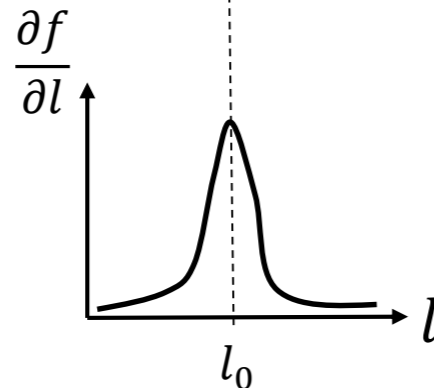
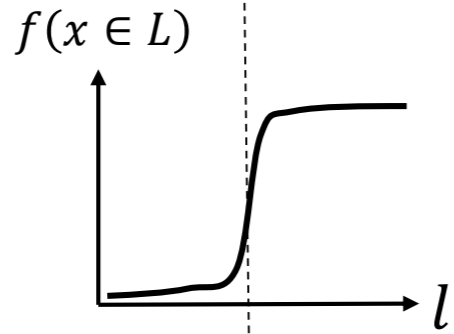
$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \langle \nabla f, dr \rangle,$$

где  $r = (x, y)^T$ ,  $dr = (dx, dy)^T$

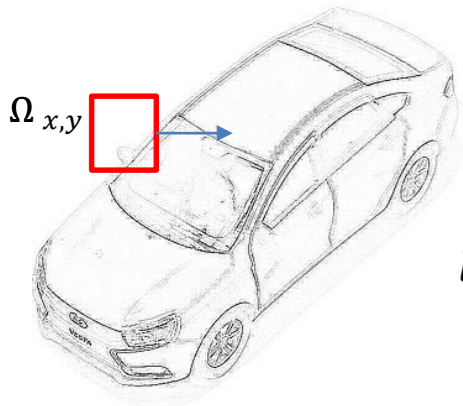
Прямая  $L$  в области  $\Omega_{x,y}$  задана параметрически:

$$L_\beta: \begin{cases} r = al + \rho n; \\ \mathbf{a} = (\cos\beta, \sin\beta); \\ \rho = -x\sin\beta + y\cos\beta; \end{cases} \Rightarrow dr = \mathbf{a}dl \Rightarrow df(x, y) = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle dl,$$

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f| = \operatorname{argmax} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$



$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{df(x, y)}{dl} = \langle \nabla f, \mathbf{a} \rangle = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta = |\nabla f(x, y)| \cos\gamma_\beta$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow V_\beta(x, y) = \frac{1}{2} (f(x+1, y)\cos\beta - f(x-1, y)\cos\beta + f(x, y+1)\sin\beta - f(x, y-1)\sin\beta) =$$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^2 f(x+i-1, y+j-1) G_\beta(i, j) = \left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_\beta \right\rangle_{\beta=1..n}$$

ядро свертки

$$\mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}} = \operatorname{mat2vec} \begin{pmatrix} f(x-1, y-1) & f(x, y-1) & f(x+1, y-1) \\ f(x-1, y) & f(x, y) & f(x+1, y) \\ f(x-1, y+1) & f(x, y+1) & f(x+1, y+1) \end{pmatrix}$$

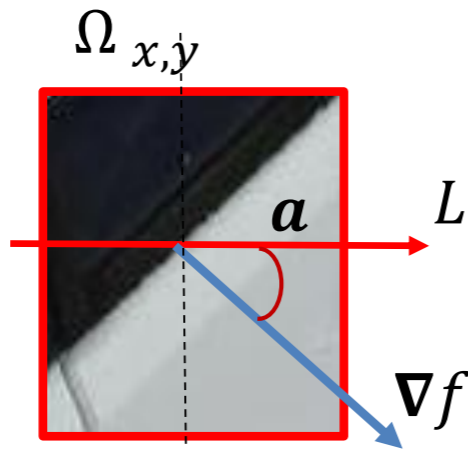
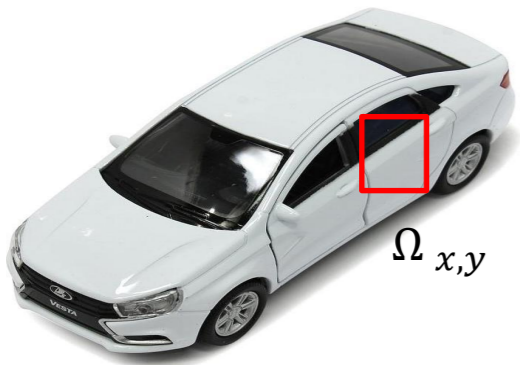
$$\mathbf{G}_\beta = \frac{1}{2} \operatorname{mat2vec} \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta & 0 \\ -\cos\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & \sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

матрица ядра свертки

**Банк фильтров**

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

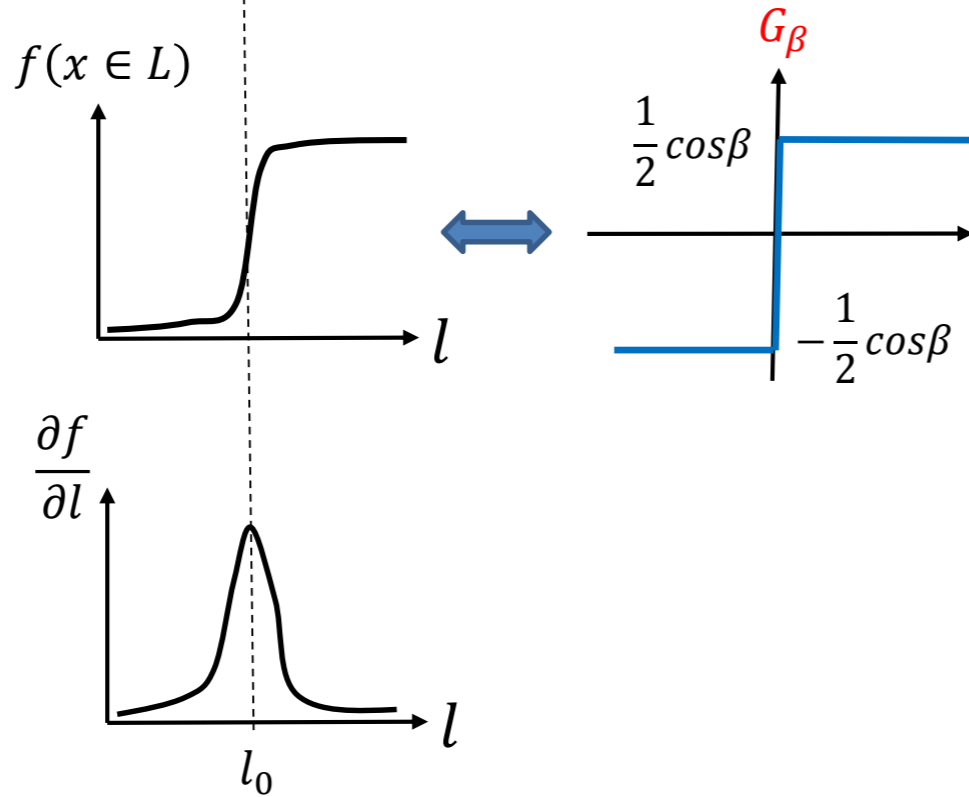
# Модель выделения признаков



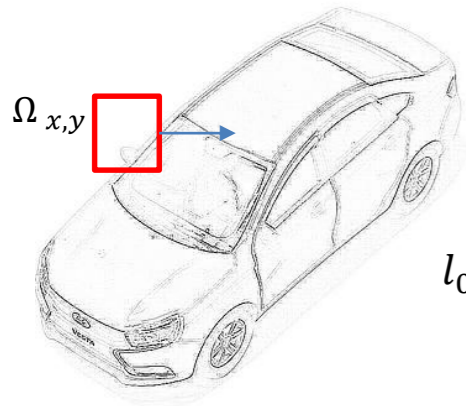
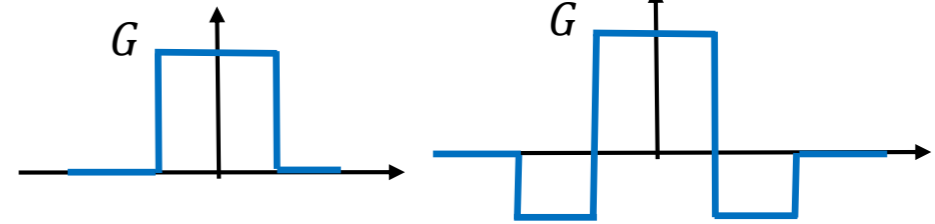
$$V_{\beta}(x, y) = \left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_{\beta} \right\rangle_{\beta \in (0, \pi)}, \quad \mathbf{G}_{\beta} = \frac{1}{2} \text{mat2vec} \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta & 0 \\ -\cos\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & \sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

- имеет максимум в точке  $(x, y)$  если окрестность  $\Omega$  имеет профиль близкий к  $\mathbf{G}_{\beta}$   
 Максимум корреляции окрестности функции и профиля ядра  $\left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_{\beta} \right\rangle$  контрастирует перепады и границы.

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.

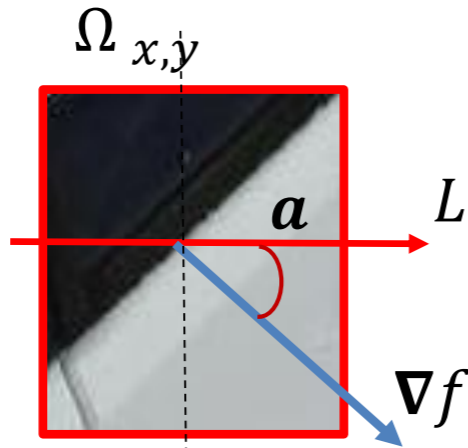
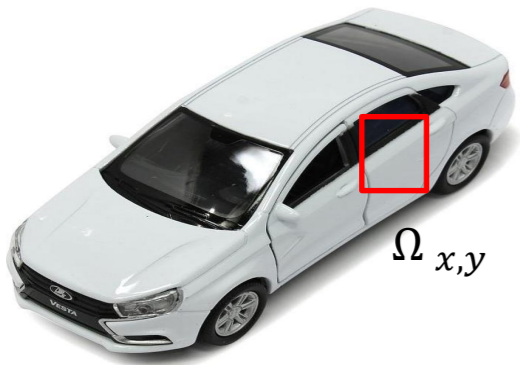


**Обобщение:** другие профили ядра  $\{G_i\}$  можно использовать для выделения других по форме особенностей и неоднородностей:



$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f| = \operatorname{argmax} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

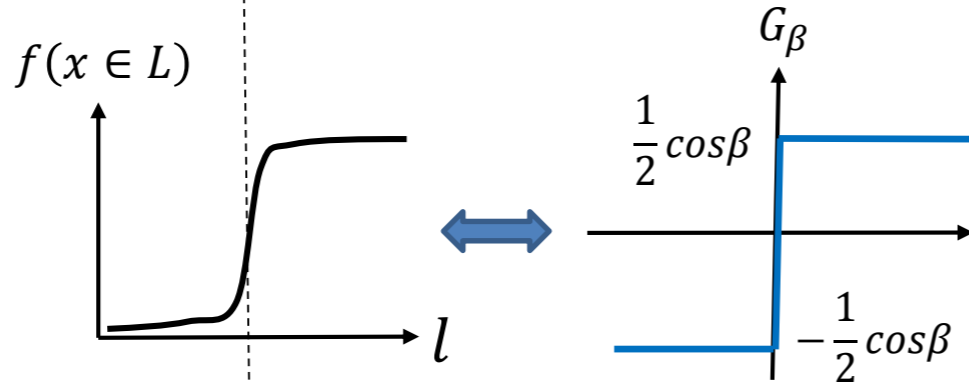
# Модель выделения признаков



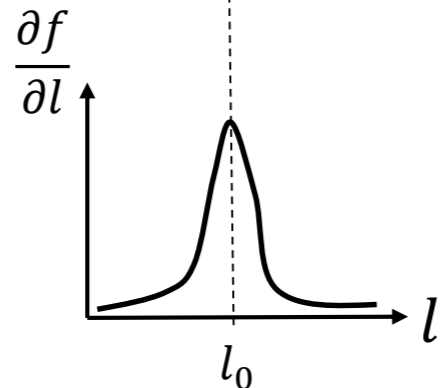
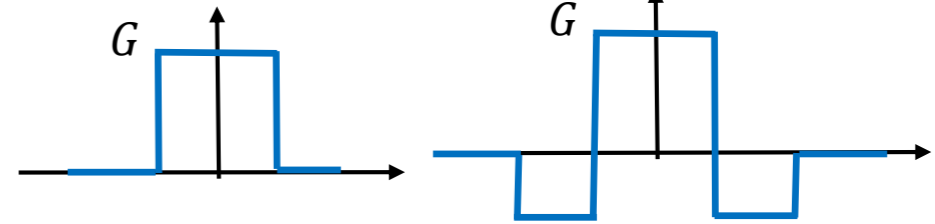
$$V_{\beta}(x, y) = \left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_{\beta} \right\rangle_{\beta \in (0, \pi)}, \quad \mathbf{G}_{\beta} = \frac{1}{2} \text{mat2vec} \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta & 0 \\ -\cos\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & \sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

- имеет максимум в точке  $(x, y)$  если окрестность  $\Omega$  имеет профиль близкий к  $\mathbf{G}_{\beta}$   
 Максимум корреляции окрестности функции и профиля ядра  $\left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_{\beta} \right\rangle$  контрастирует перепады и границы.

Граничные точки (неоднородности, перепады яркости) выделяются разностными операторами на основе производных по направлению. Контурная точка – положение с локального максимума модуля производной по направлению.



**Обобщение:** другие профили ядра  $\{G_i\}$  можно использовать для выделения других по форме особенностей и неоднородностей:



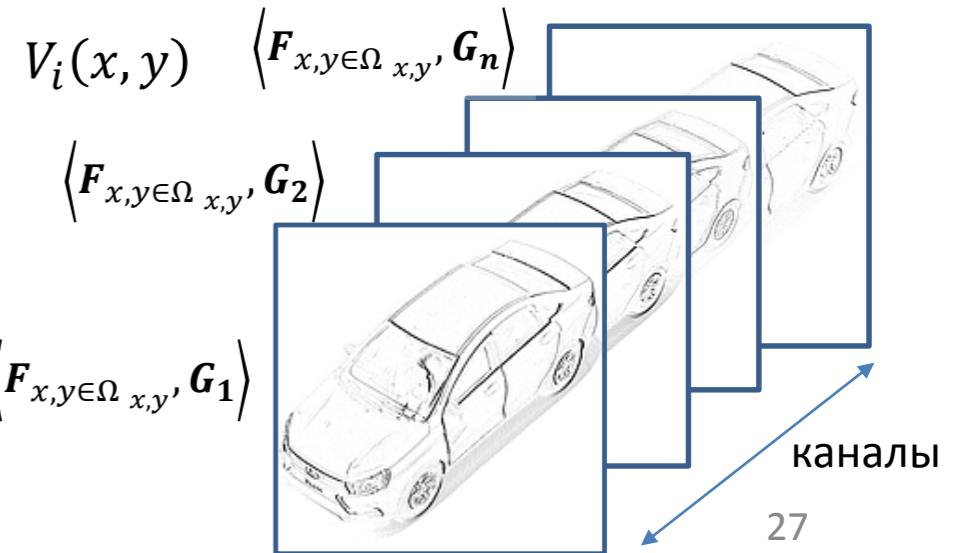
$$l_0 = \operatorname{argmax}_l \left| \frac{df}{dl} \right| = \operatorname{argmax}_l |\nabla f| = \operatorname{argmax} \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial y}}$$

## Карты признаков

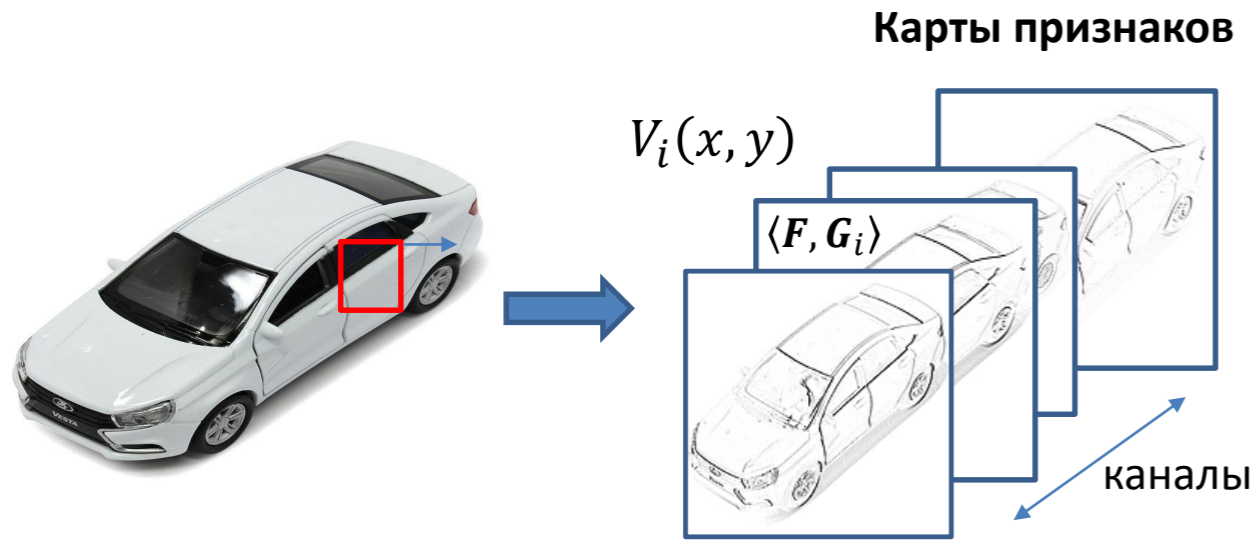
Для множества ядер  $\{G_i\}$ :

Поиск локальных максимумов  $\max_{(x,y) \in \Omega_{x,y}} \max_{\beta} V_{\beta}(x, y)$  по картам признаков обобщается пороговой функцией фильтрации:

$$V_i = \sigma \left( \left\langle \mathbf{F}_{x,y \in \Omega_{x,y}}, \mathbf{G}_i \right\rangle \right)$$



# Модель выделения признаков



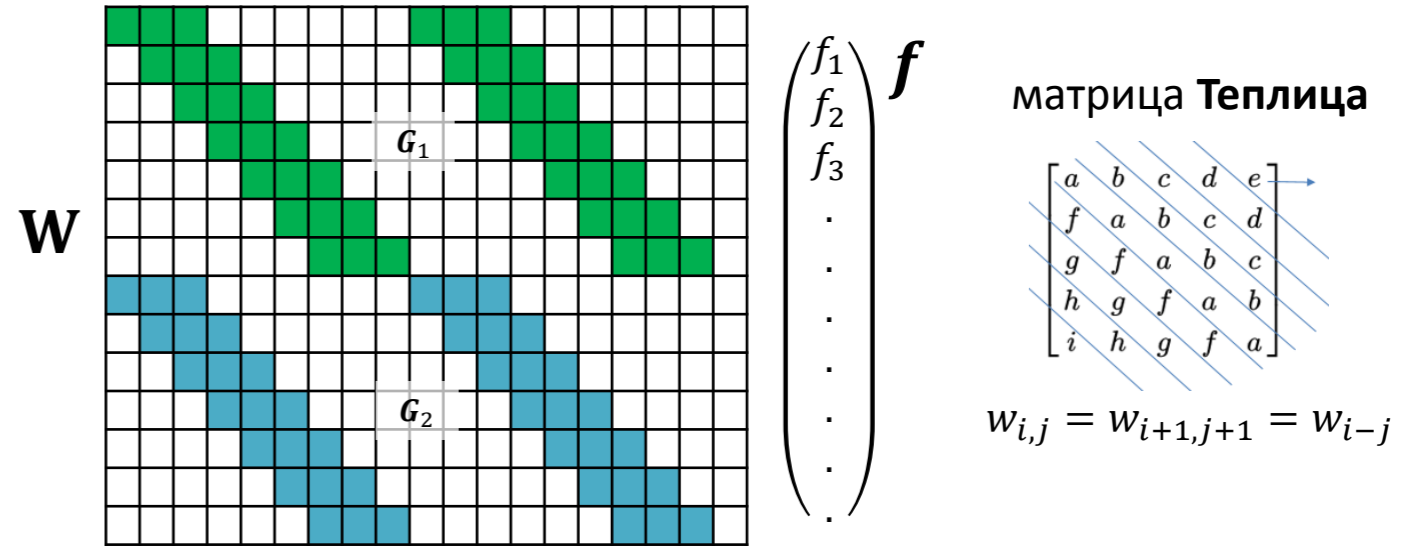
Представление операции свертки и выделения признаков как умножение всего изображения на блочно-теплицевую матрицу:

$$V = Wf,$$

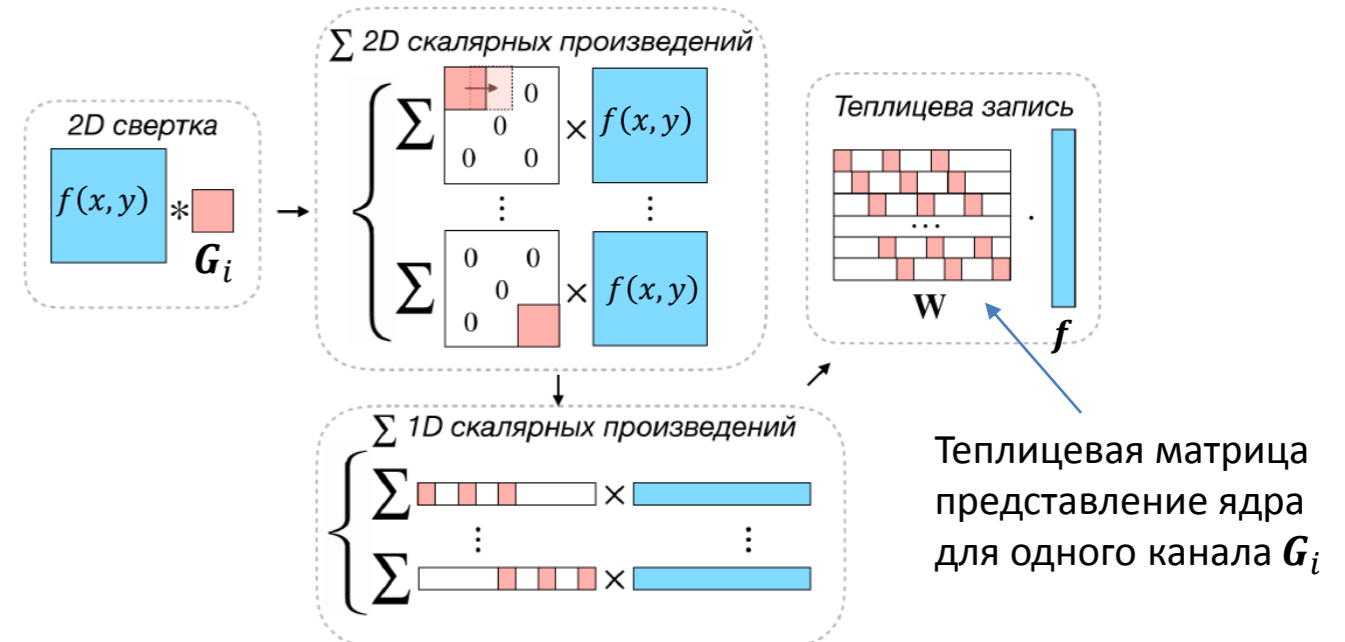
где  $f$  – вектор - развертка изображения  $\text{mat2vec}(f(x, y))$  по столбцам,  $W = \text{Toeplitz}(\{G_i\})$  – блочно-теплицева матрица, построенная из множества векторов-разверток  $\{G_i\}$  сверточных ядер.

$$V_i(x, y) = \left\langle F_{x,y \in \Omega_{x,y}}, G_i \right\rangle$$

Блочнo-теплицево представление двумерной двуканальной свертки:

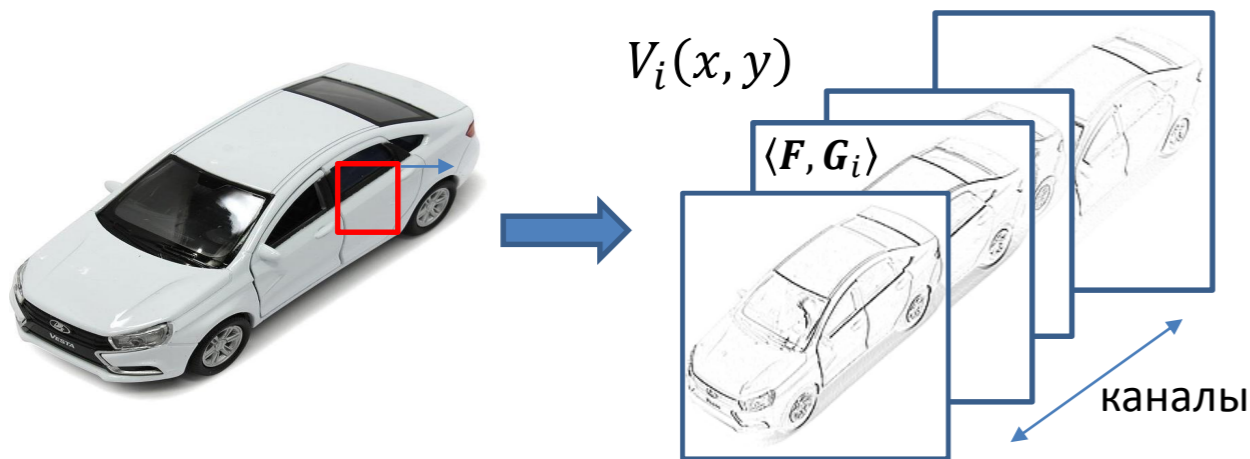


Сверточные **2D ядра** путем развертки в вектора формируют матрицу  $W$  линейного оператора блочно-теплицевого вида:



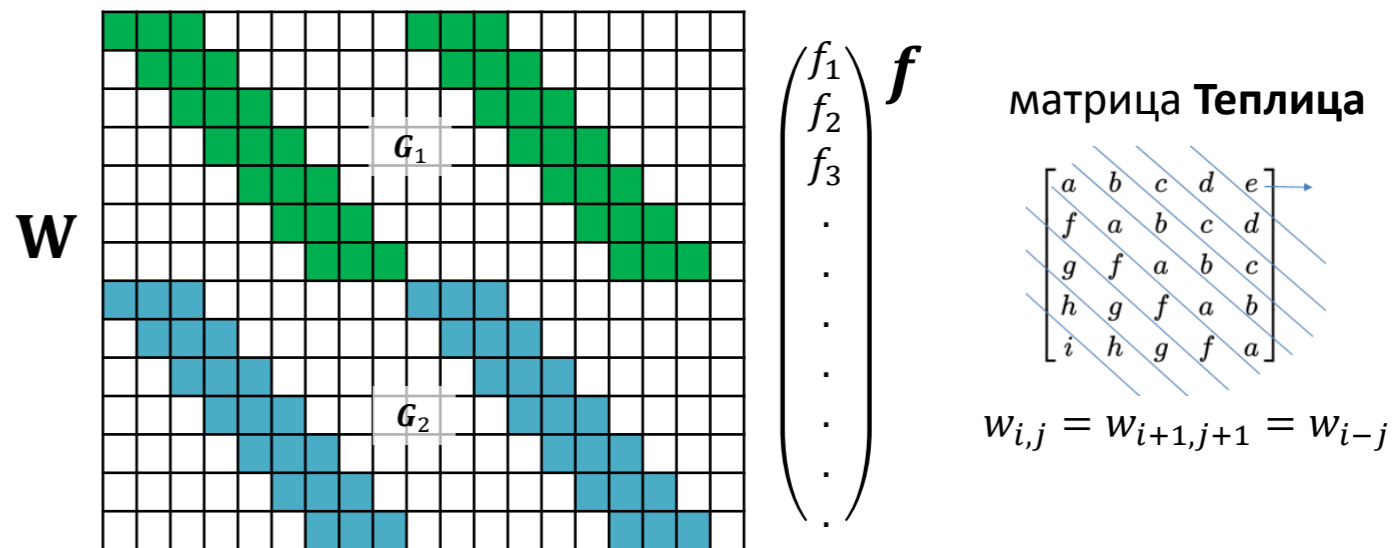
# Модель выделения признаков

Карты признаков



$$V_i(x, y) = \langle F_{x,y \in \Omega_{x,y}}, G_i \rangle$$

Блочнo-теплицево представление двумерной двуканальной свертки:



Представление операции свертки и выделения признаков как умножение всего изображения на блочно-теплицевую матрицу:

$$V = Wf,$$

где  $f$  – вектор - развертка изображения  $\text{mat2vec}(f(x, y))$  по столбцам,  $W = \text{Toeplitz}(\{G_i\})$  – блочно-теплицева матрица, построенная из множества векторов-разверток  $\{G_i\}$  сверточных ядер.

Задача полноты признаков – задача реконструкции:

Пусть  $\exists$  сходящийся ряд  $f(x, y) = \sum_i a_i \psi_i(x, y)$ :  $f = \Psi a$

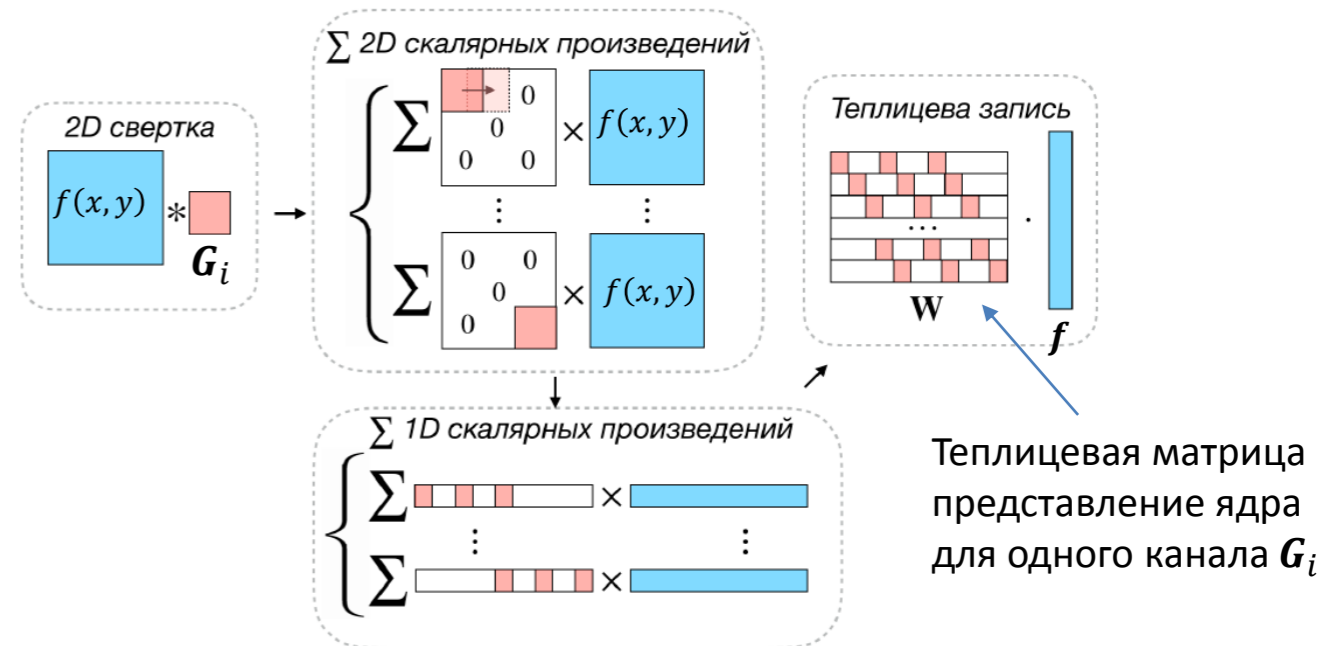
$$V = (W\Psi)a \Rightarrow a = (W\Psi)^{-1}V = (W\Psi)^{-1}Wf = \tilde{W}f$$

Матрица дуальных векторов

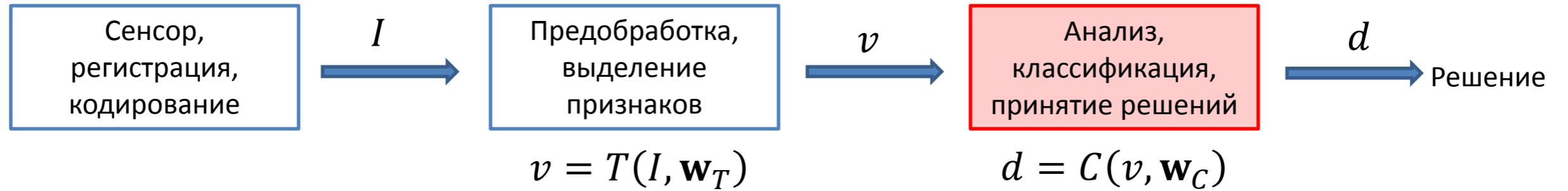
Признаки совпадают с коэффициентами разложения, полная реконструкция по признаком будет, если:

$$\tilde{W} = W \Rightarrow W = \Psi^{-1}, \quad \det W \neq 0$$

Сверточные **2D ядра** путем развертки в вектора формируют матрицу **W** линейного оператора блочно-теплицевого вида:

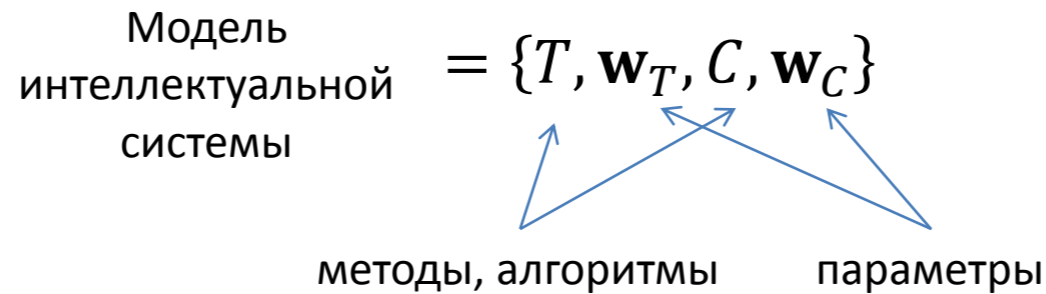


# Модель интеллектуальной системы



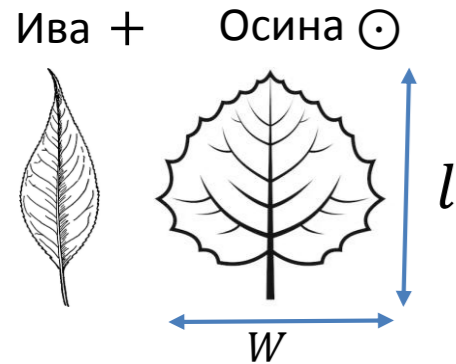
- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

$$F(I, \mathbf{W}) = (C \circ T)(I, \mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T) = C(T(I, \mathbf{w}_T), \mathbf{w}_C)$$
$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T\}$$



# Модель классификации

## Классы

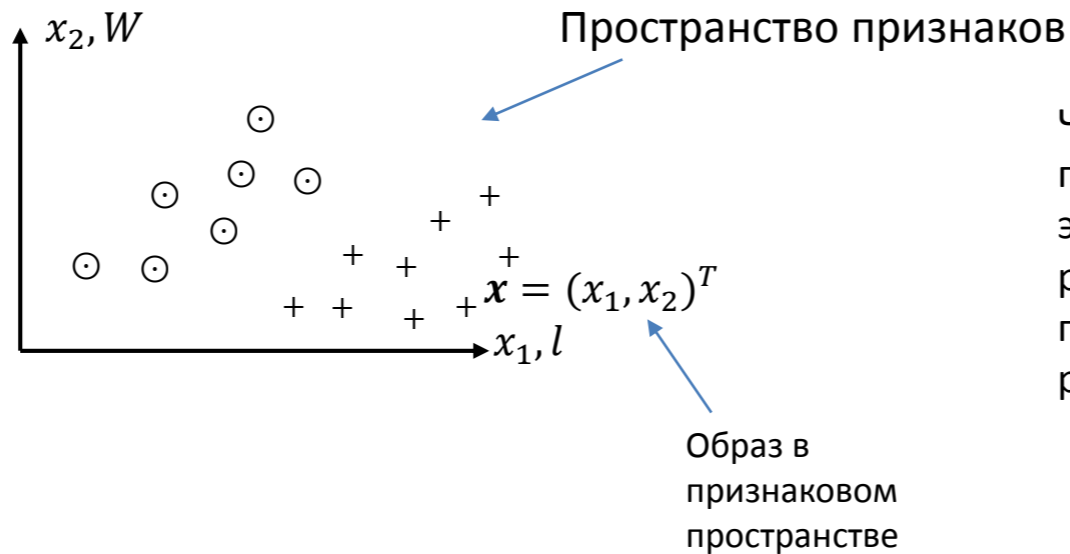


2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

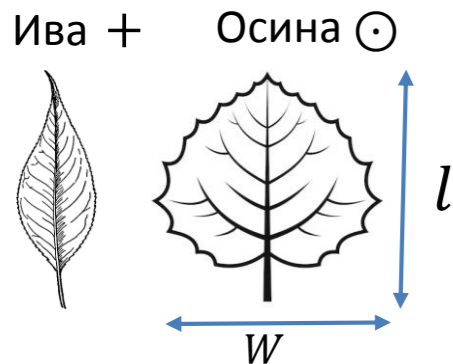
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$



Чем “проще” структура пространства признаков, где признаки образуют компактные связанные множества элементов признаков (кластеры), тем проще разделить эти множества на классы объектов. В простейшем случае – линейно, с помощью линейных решающих правил.

# Модель классификации

## Классы



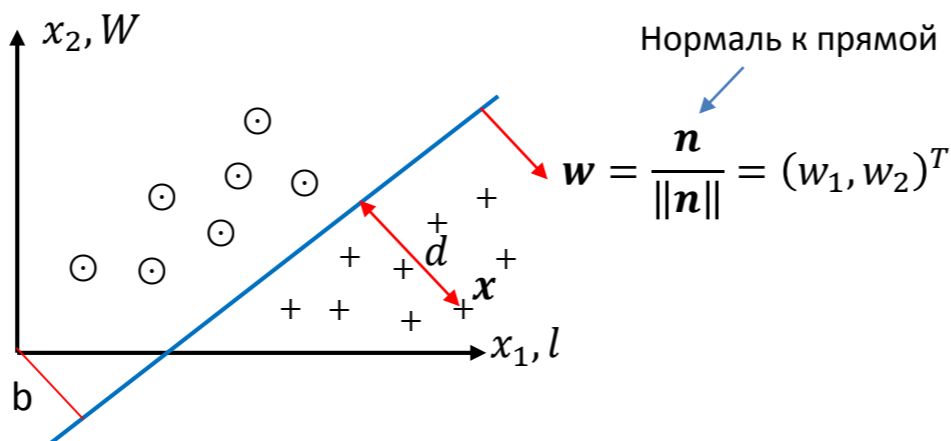
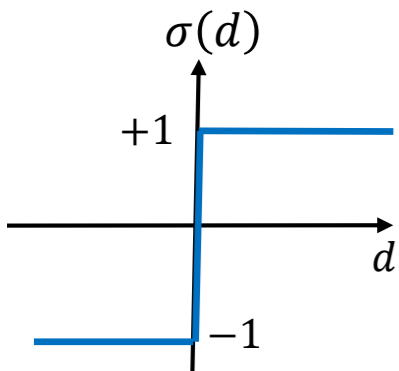
2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации  
(пороговая)



$d$  – расстояние точки в признаковом пространстве до разделяющей прямой. Чем образ глубже погружен в свой класс, тем достовернее решение:

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{n}\|} - b = \mathbf{w}^T \mathbf{x} - b \leq 0, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$$

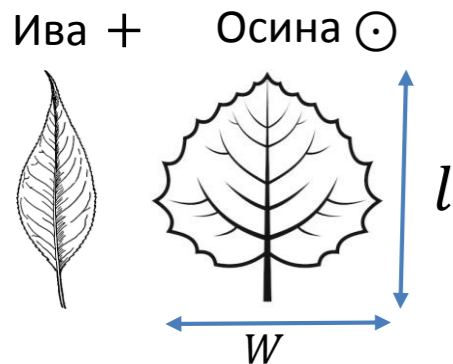
$$y = \sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 - b) = \{1, -1\} \text{ – линейное решающее правило.}$$

Индикатор  
полуплоскости

Чем “проще” структура пространства признаков, где признаки образуют компактные связанные множества элементов признаков (кластеры), тем проще разделить эти множества на классы объектов. В простейшем случае – линейно, с помощью линейных решающих правил.

# Модель классификации

## Классы



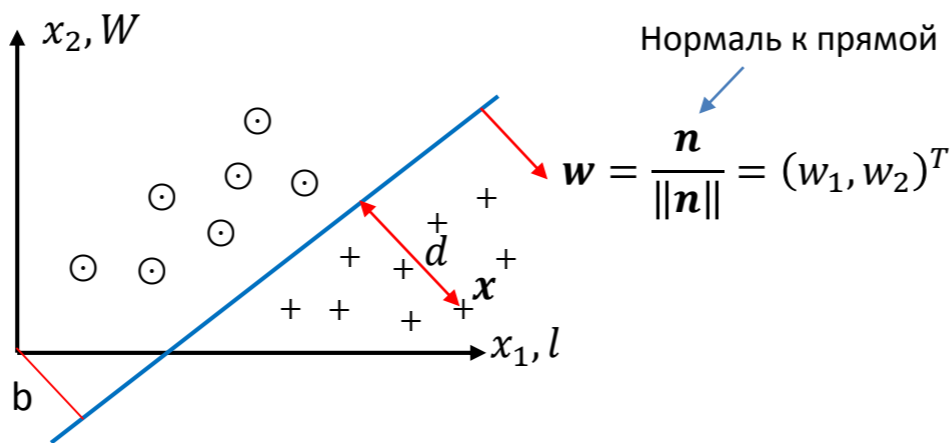
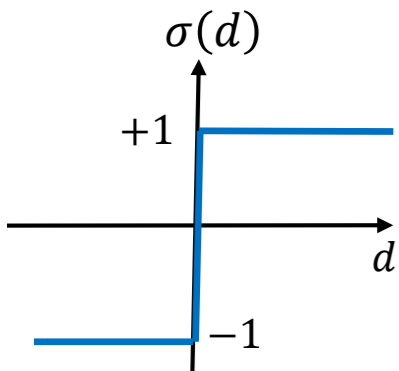
2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации  
(пороговая)

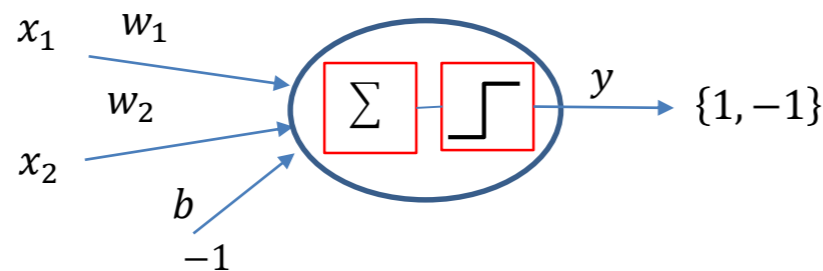


Чем “проще” структура пространства признаков, где признаки образуют компактные связанные множества элементов признаков (кластеры), тем проще разделить эти множества на классы объектов. В простейшем случае – линейно, с помощью линейных решающих правил.

$d$  – расстояние точки в признаковом пространстве до разделяющей прямой. Чем образ глубже погружен в свой класс, тем достовернее решение:

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{n}\|} - b = \mathbf{w}^T \mathbf{x} - b \leq 0, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$$

$$y = \underbrace{\sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 - b)}_{\text{Формальный нейрон}} = \underbrace{\{1, -1\}}_{\text{Индикатор полуплоскости}} \text{ – линейное решающее правило.}$$



$$y = \sigma(\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{x}})$$

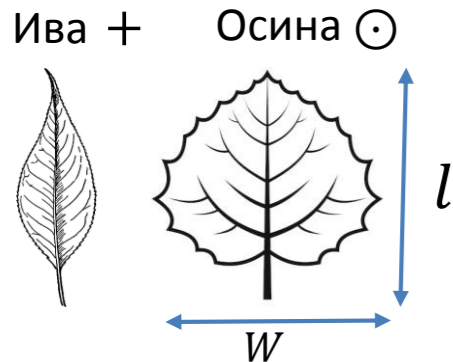
$$\tilde{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, b)^T,$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, -1)^T$$

Мак-Каллок — Питтс (1943)

# Модель классификации

## Классы



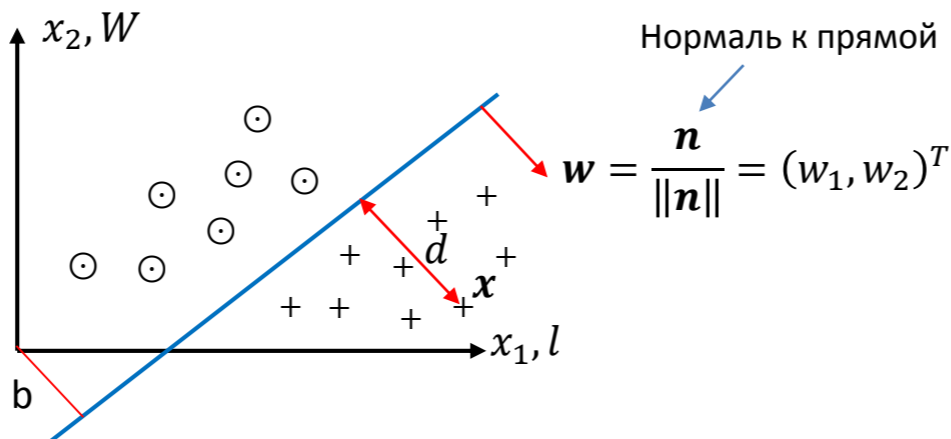
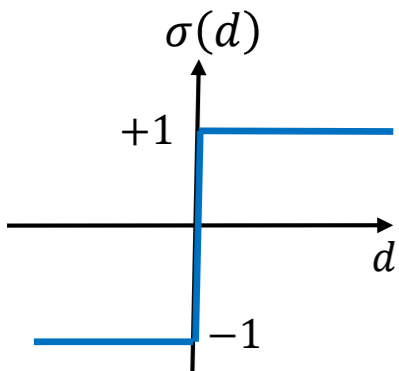
2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации (пороговая)

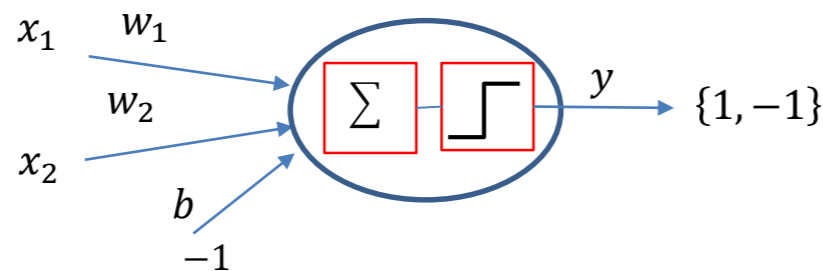


Чем “проще” структура пространства признаков, где признаки образуют компактные связанные множества элементов признаков (кластеры), тем проще разделить эти множества на классы объектов. В простейшем случае – линейно, с помощью линейных решающих правил.

$d$  – расстояние точки в признаковом пространстве до разделяющей прямой. Чем объект глубже погружен в свой класс, тем достовернее решение:

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{n}\|} - b = \mathbf{w}^T \mathbf{x} - b \leq 0, \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$$

$$y = \underbrace{\sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 - b)}_{\text{Формальный нейрон}} = \underbrace{\{1, -1\}}_{\text{Индикатор полуплоскости}}$$



Мак-Каллок — Питтс (1943)

“Обучение” нейрона путем регрессии.

Максимизация числа примеров  $x_i$  с верной классификацией:

$$Score = \sum_i \mathbf{1}[y_i > 0 | x_i = '+' ] + \sum_i \mathbf{1}[y_i < 0 | x_i = '⊙' ] \rightarrow \max_{w,b}$$

## МНК

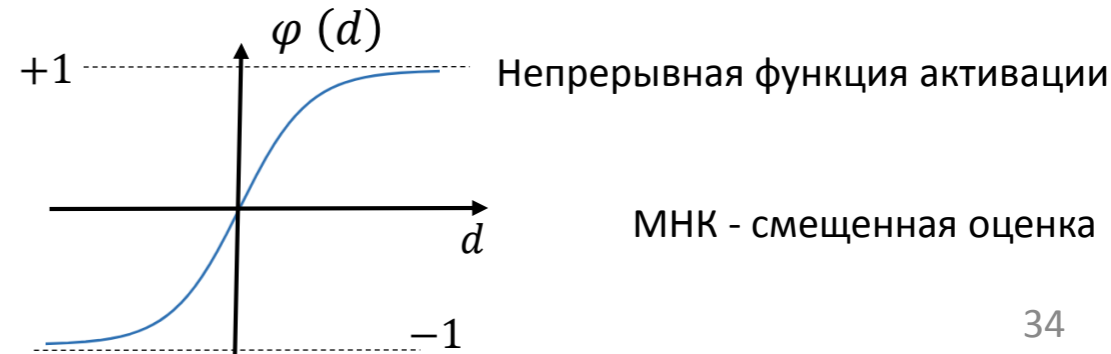
$$y_i = \varphi(\mathbf{w}^T \mathbf{x} - b)$$

$$\varphi(d) = \frac{1 - e^{-d}}{1 + e^{-d}}$$

сигмоида

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \varphi(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b))^2 \rightarrow \min_{w,b}$$

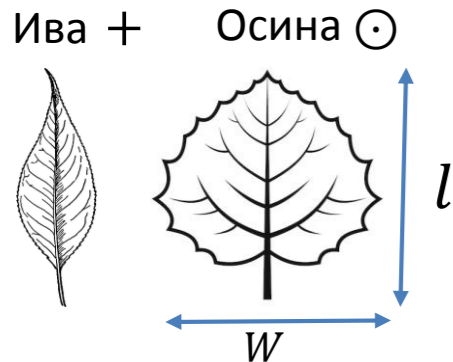
$\tilde{y} \in \{1, -1\}$ - истинные классы, n-примеры



МНК - смещенная оценка

# Модель классификации

## Классы



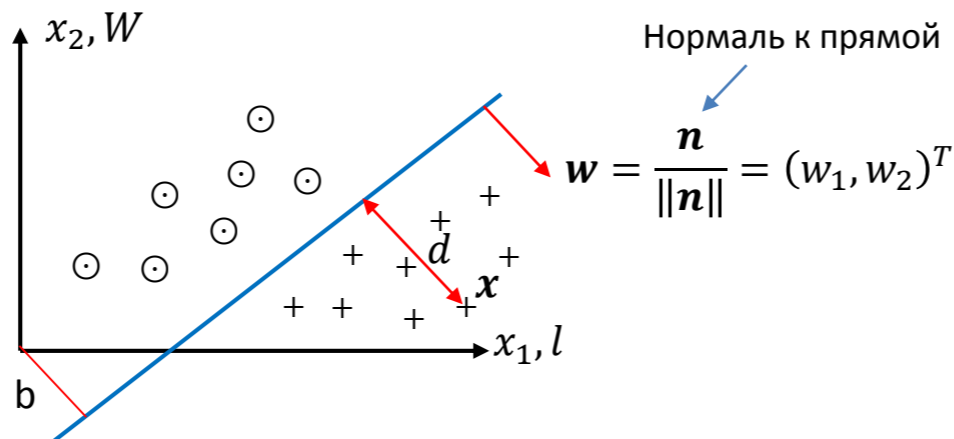
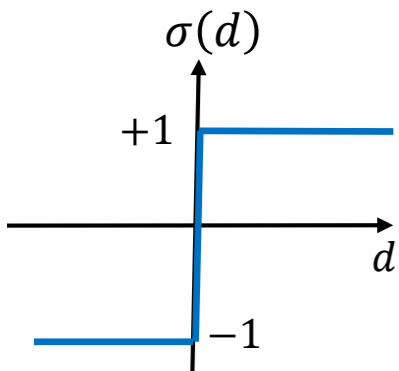
2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации  
(пороговая)

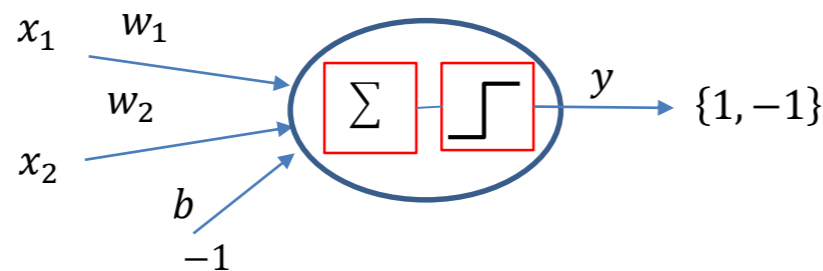


Чем “проще” структура пространства признаков, где признаки образуют компактные связанные множества элементов признаков (кластеры), тем проще разделить эти множества на классы объектов. В простейшем случае – линейно, с помощью линейных решающих правил.

$d$  – расстояние точки в признаковом пространстве до разделяющей прямой. Чем образ глубже погружен в свой класс, тем достовернее решение:

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{n}\|} - b = \mathbf{w}^T \mathbf{x} - b \leq 0, \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$$

$$y = \underbrace{\sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 - b)}_{\text{Формальный нейрон}} = \underbrace{\{1, -1\}}_{\text{Индикатор полуплоскости}}$$



Мак-Каллок — Питтс (1943)

“Обучение” нейрона путем регрессии.

Максимизация числа примеров  $x_i$  с верной классификацией:

$$Score = \sum_i \mathbf{1}[y_i > 0 | x_i = '+' ] + \sum_i \mathbf{1}[y_i < 0 | x_i = '⊙' ] \rightarrow \max_{\mathbf{w}, b}$$

**МНК**

$$y_i = \varphi(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b)$$

$$\varphi(d) = \frac{1 - e^{-d}}{1 + e^{-d}}$$

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \varphi(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b))^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}, w_0}$$

$\tilde{y} \in \{1, -1\}$  - истинные классы,  $n$ -примеры

**Логистическая регрессия**

$$P(y|\mathbf{x}) = \varphi(y(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b)), \varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} - \text{сигмоидная модель функции вероятности}$$

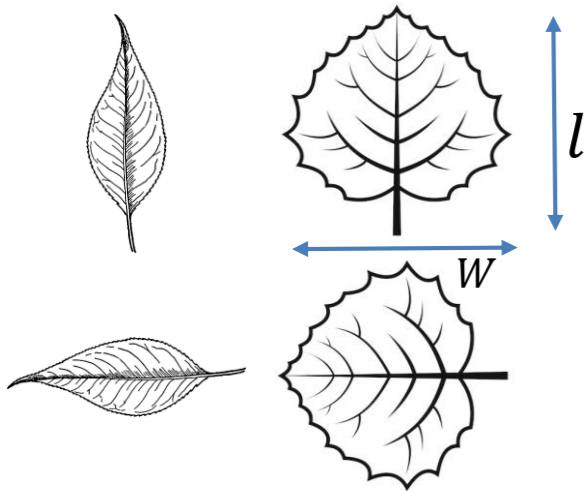
Максимум апостериорной log-функции правдоподобия  $P_{\mathbf{w}, b}(y|\mathbf{x})$ :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\tilde{y}_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b))) \rightarrow \min_{\mathbf{w}, b}$$

# Модель классификации

## Классы

Ива +    Осина ⊙



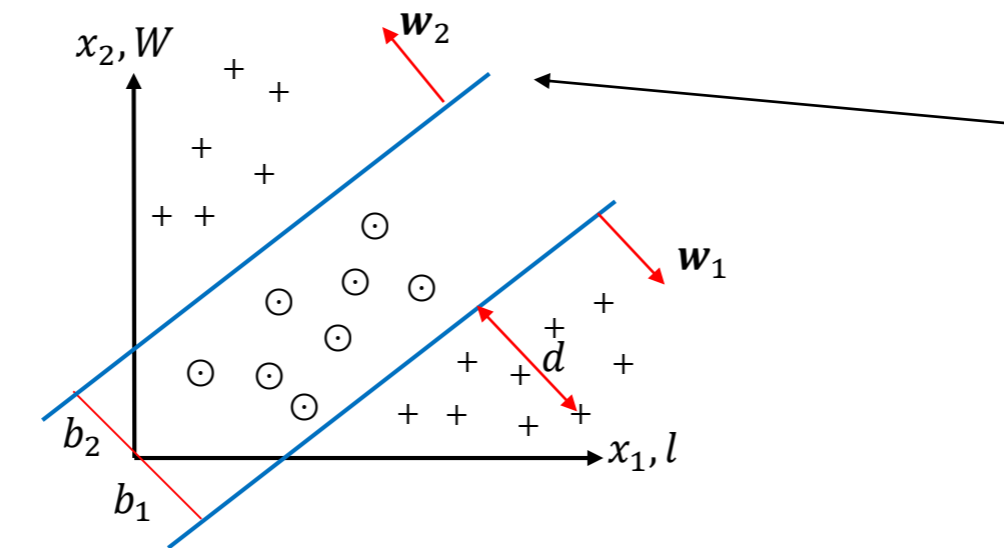
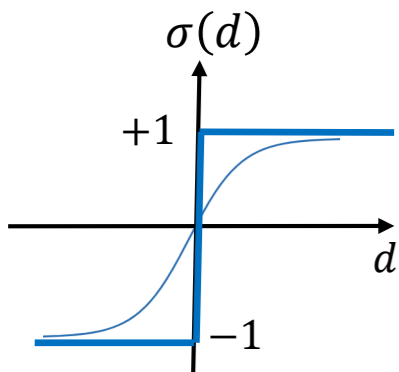
2 признака:

$$x_1 = l$$

$$x_2 = W$$

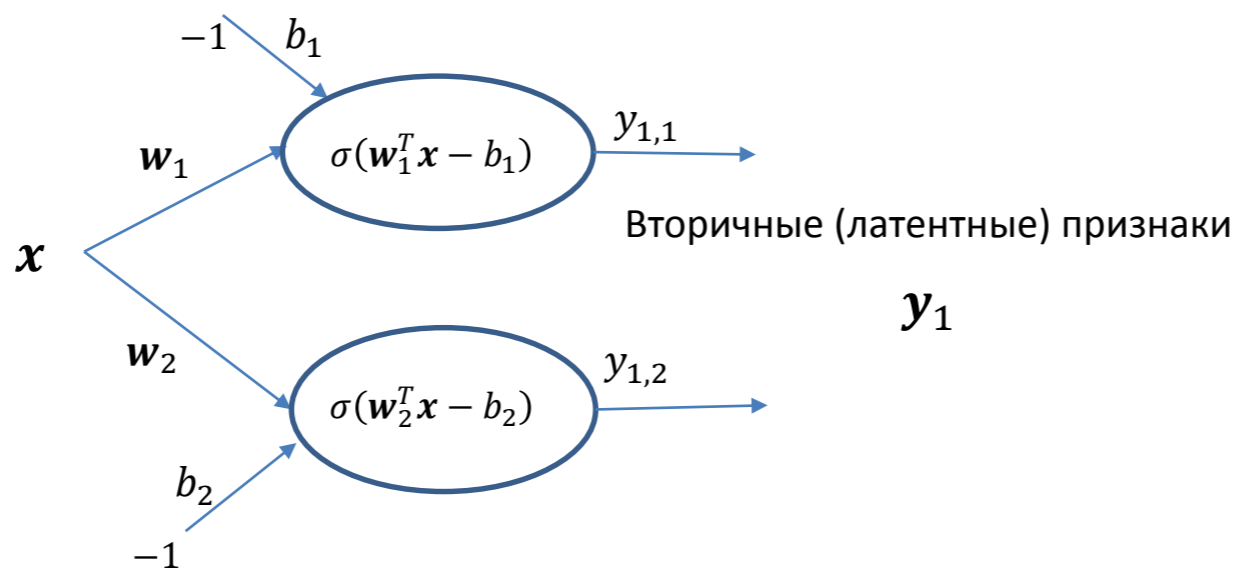
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации



Для разделимости сложной конфигурации признаков классов требуется дополнительные разделяющие прямые, а значит и новые нейроны.

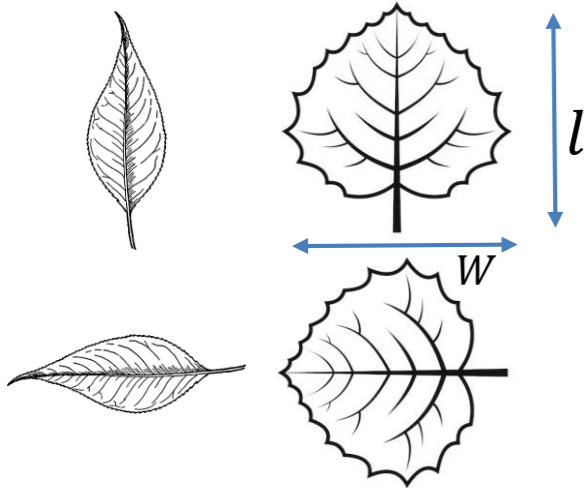
$$\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) = (\sigma(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} - b_1), \sigma(\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} - b_2))$$



# Модель классификации

## Классы

Ива + Осина ⊙



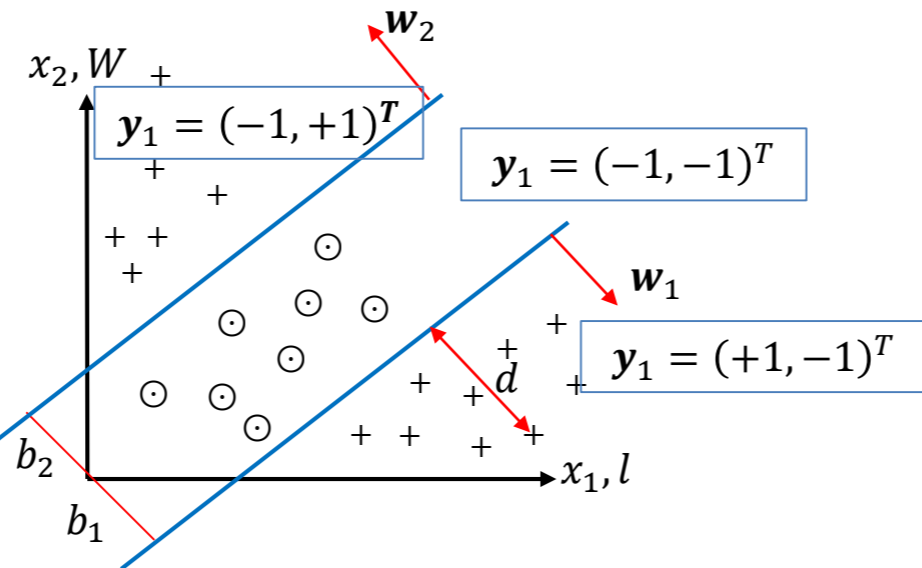
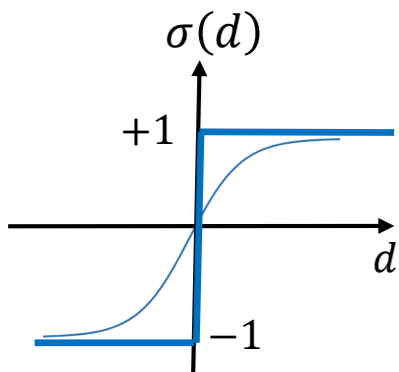
2 признака:

$$x_1 = l$$

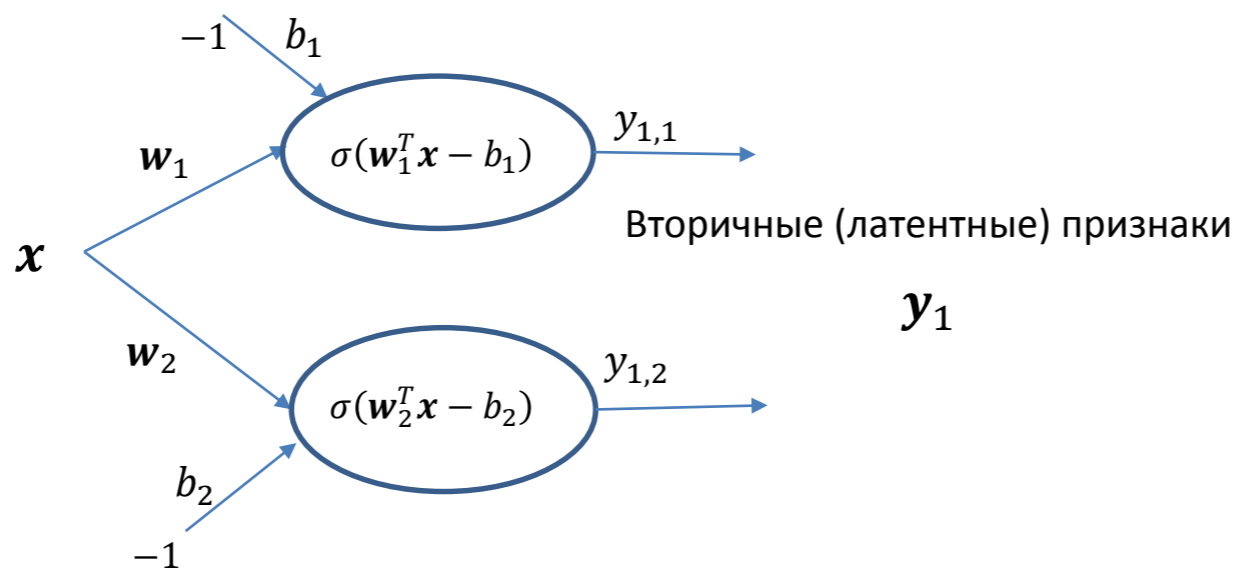
$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации



$$\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) = (\sigma(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} - b_1), \sigma(\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} - b_2))$$

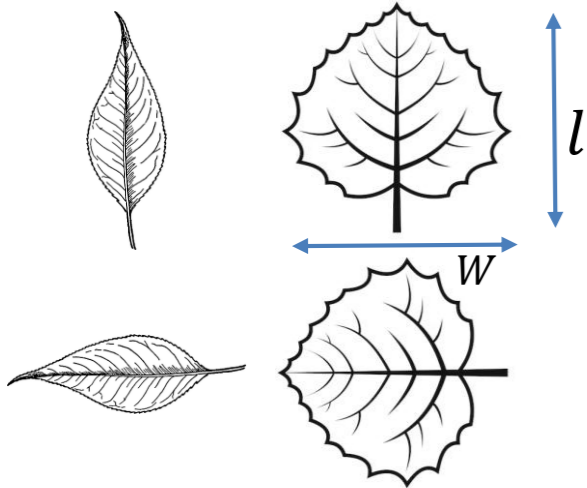


При добавлении новых нейронов, их выходы образуют латентное пространство вторичных признаков, которые требуется так же классифицировать.

# Модель классификации

## Классы

Ива + Осина ⊙



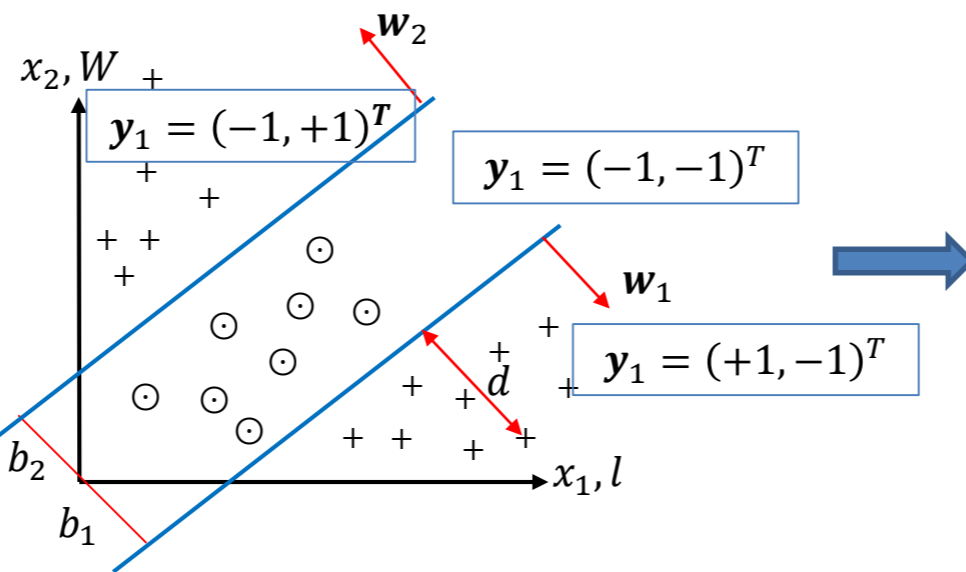
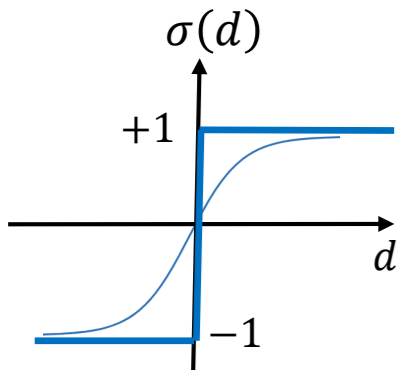
2 признака:

$$x_1 = l$$

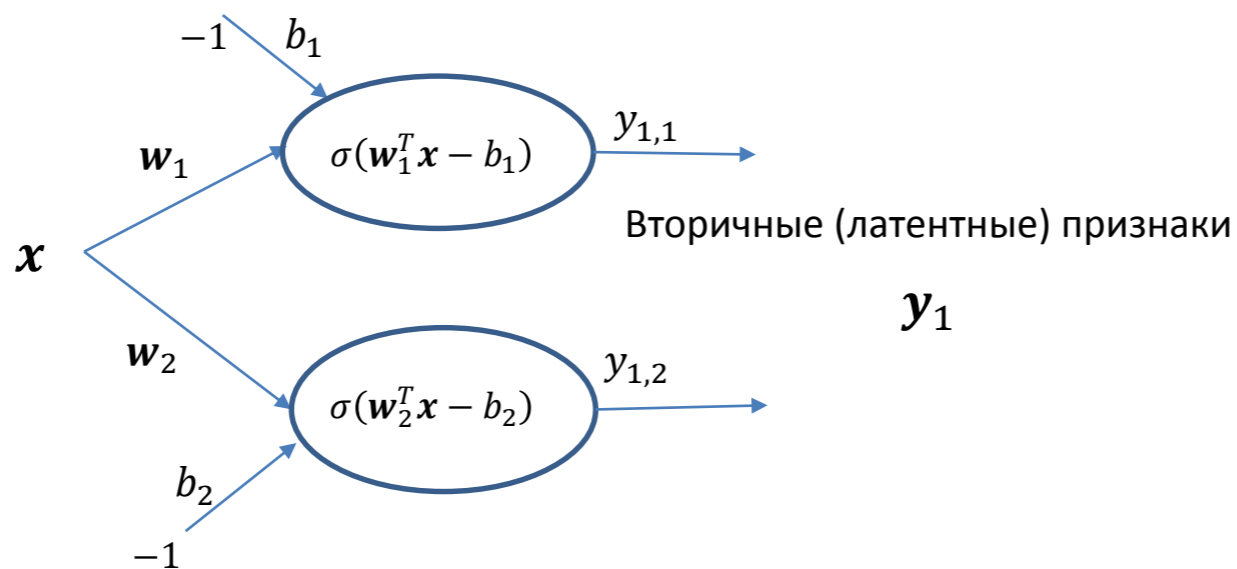
$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации



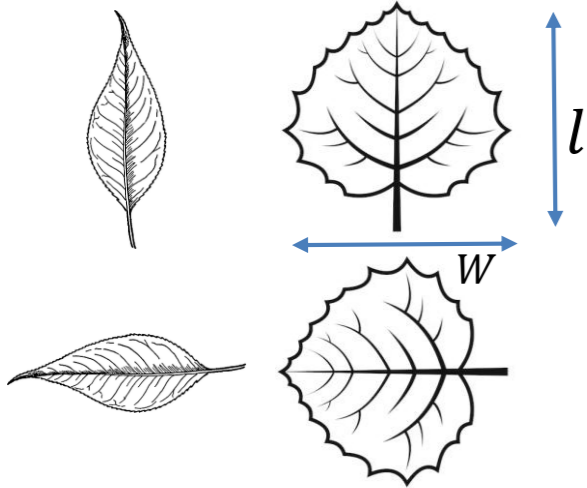
$$\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) = (\sigma(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} - b_1), \sigma(\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} - b_2))$$



# Модель классификации

## Классы

Ива + Осина ⊙



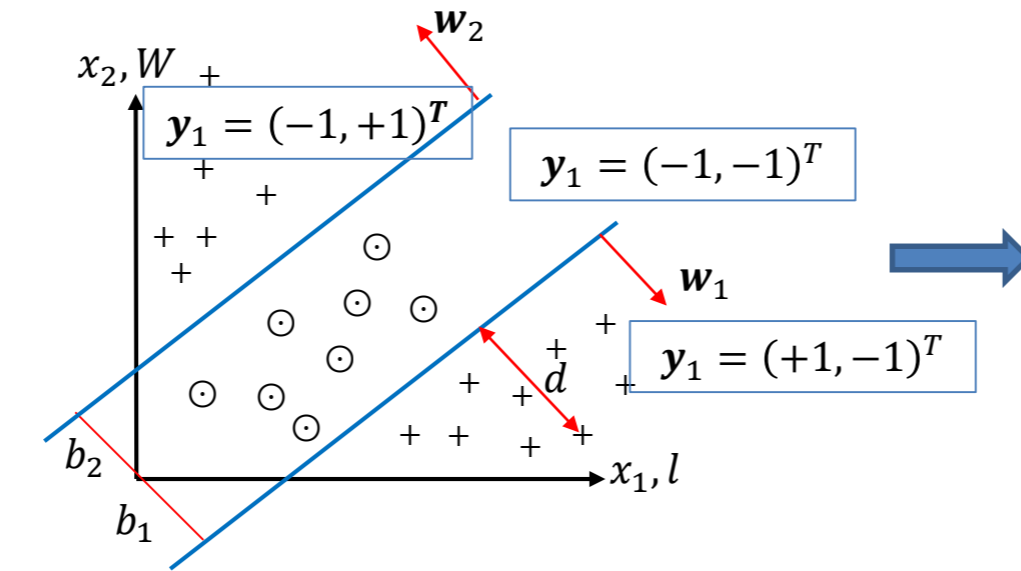
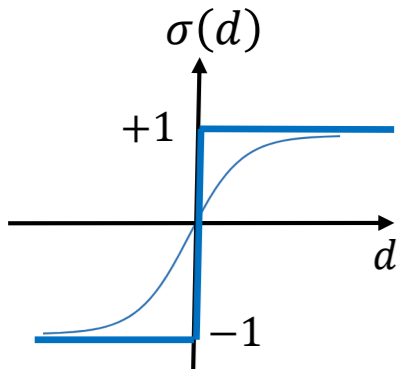
2 признака:

$$x_1 = l$$

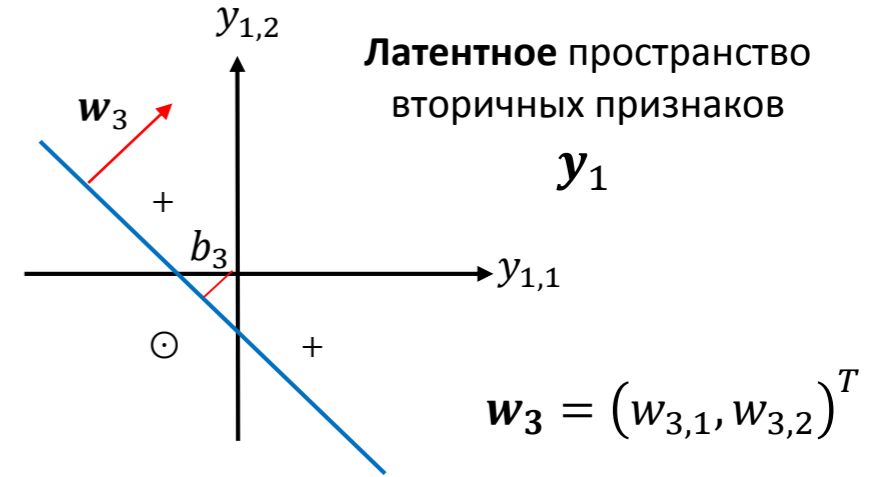
$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

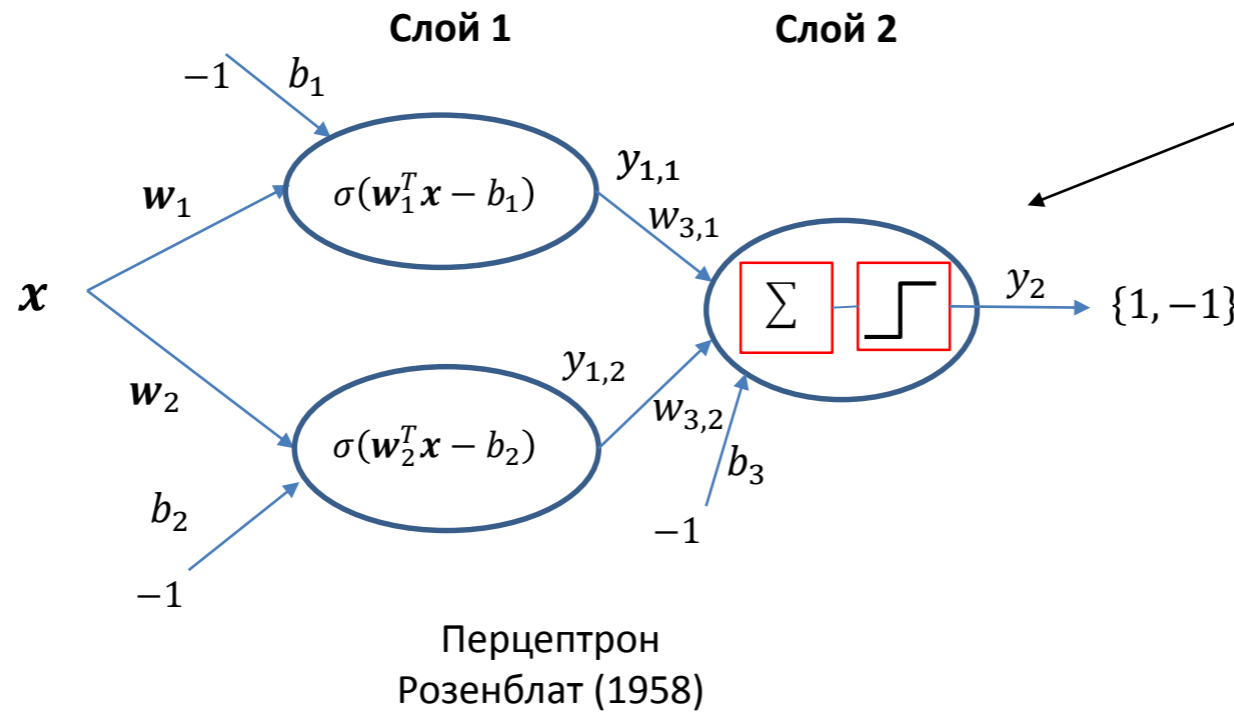
Функция активации



$$\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) = (\sigma(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} - b_1), \sigma(\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} - b_2))$$



$$y_2 = \sigma(\mathbf{w}_3^T \mathbf{y}_1 - b_3)$$



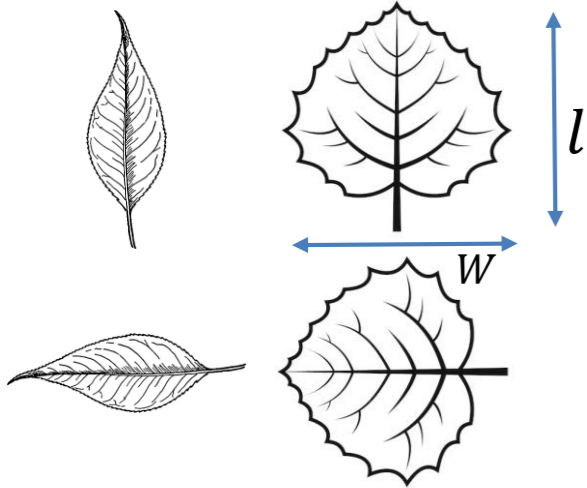
Перцептрон  
Розенблат (1958)

Вторичные признаки в латентном пространстве классифицируются на два класса путем построения в нем разделяющей прямой и, соответственно, добавления классифицирующего нейрона вторым слоем в сеть.

# Модель классификации

Классы

Ива + Осина ⊖



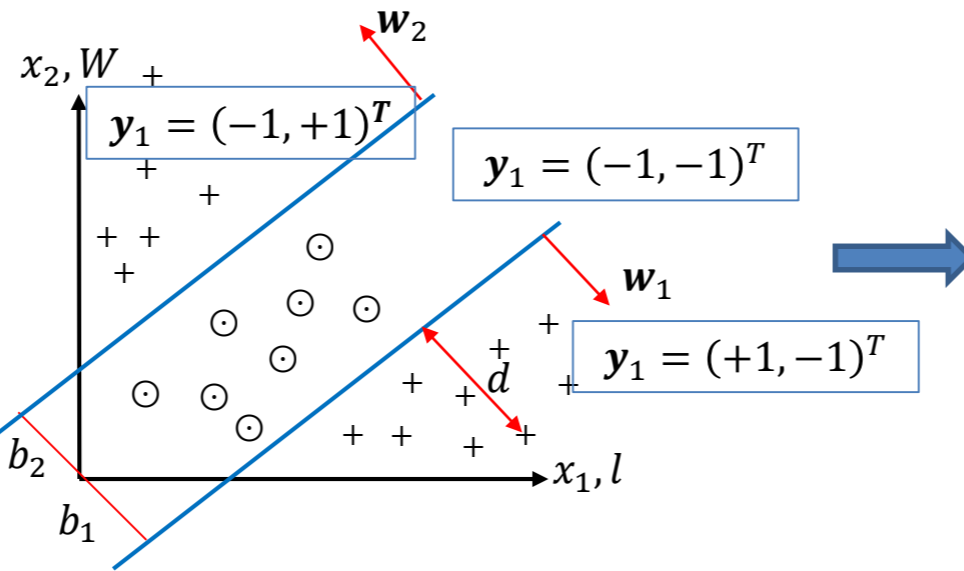
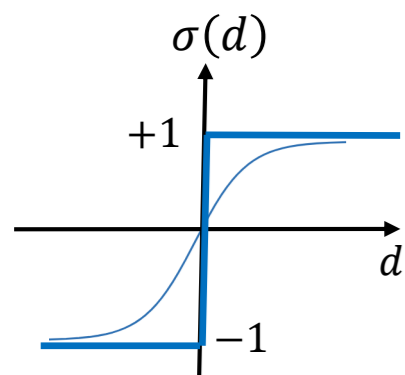
2 признака:

$$x_1 = l$$

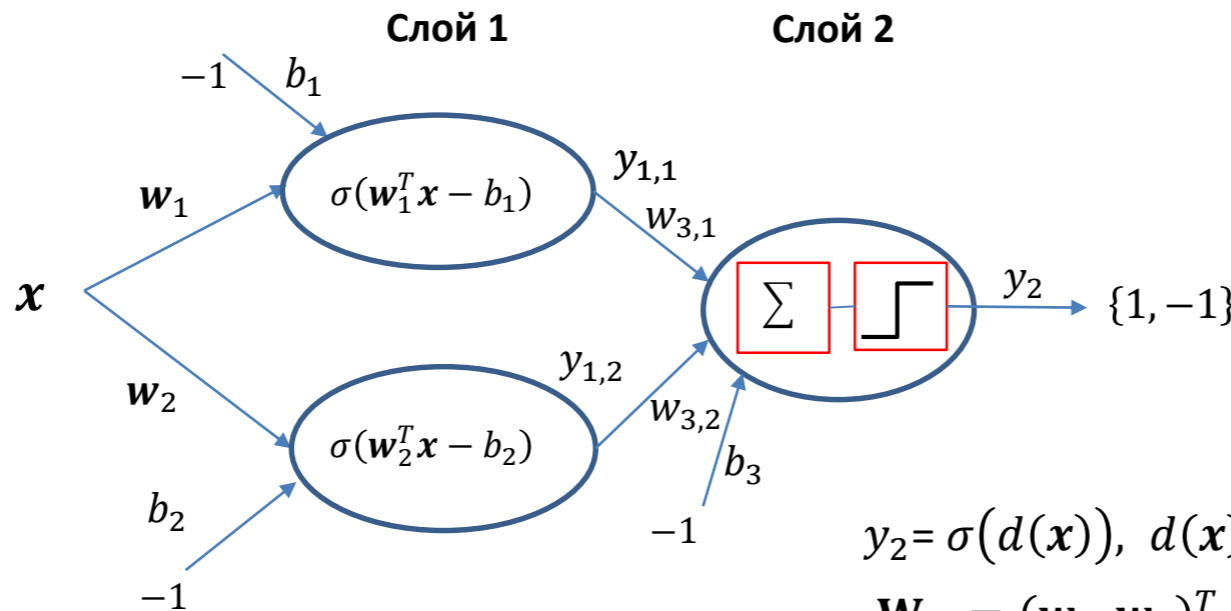
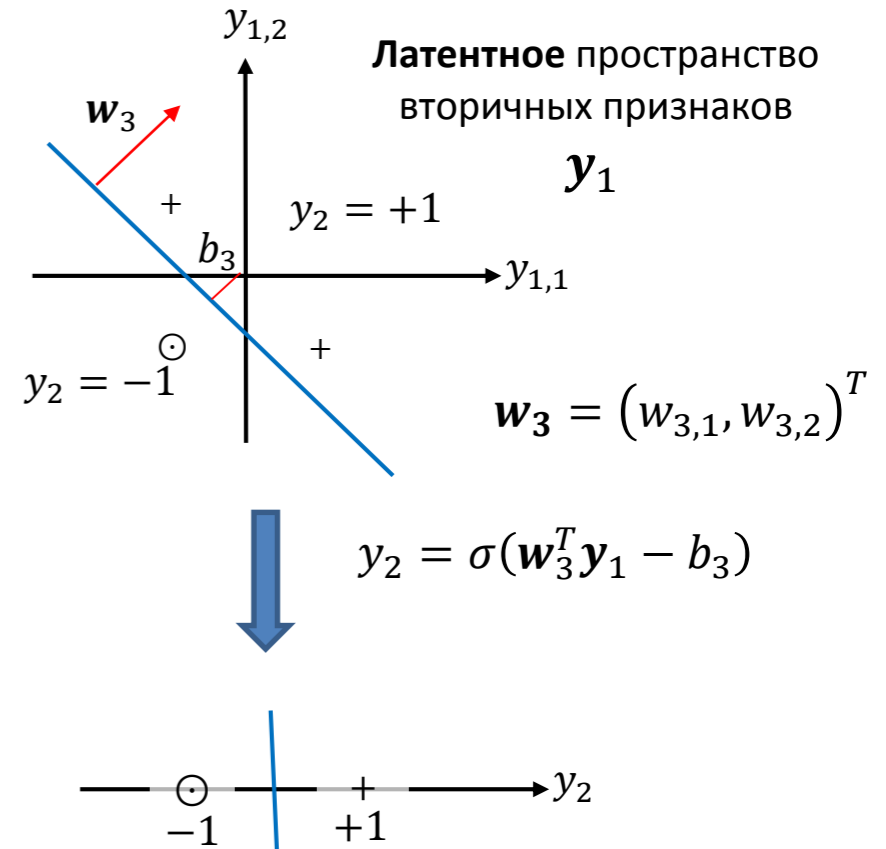
$$x_2 = W$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Функция активации



$$\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) = (\sigma(\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} - b_1), \sigma(\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} - b_2))$$



Перцептрон  
Розенблат (1958)

$$y_2 = \sigma(d(x)), \quad d(x) = \mathbf{w}_3^T \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) - b_3$$

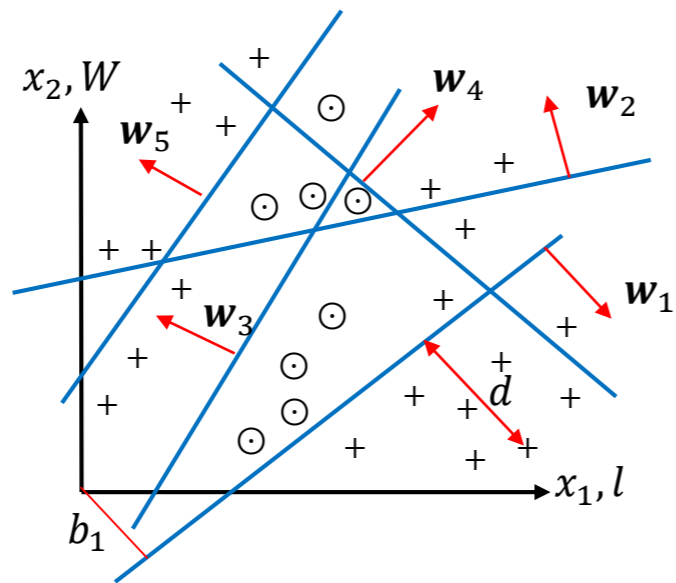
$$\mathbf{W}_1 = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (-b_1, -b_2)^T$$

Двухслойная нейронная сеть для двухклассовой классификации

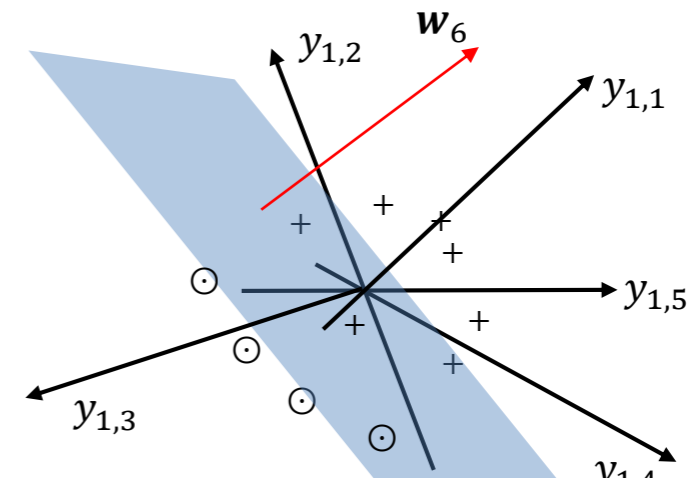


# Модель классификации

**Сложное пространство признаков** требует использования нескольких разделяющих прямых, а значит и дополнительных нейронов в первом слое. Чем сложнее признаковое пространство, тем больше нейронов требуется для их разделения, и, значит, **размерность латентного пространства возрастает**.

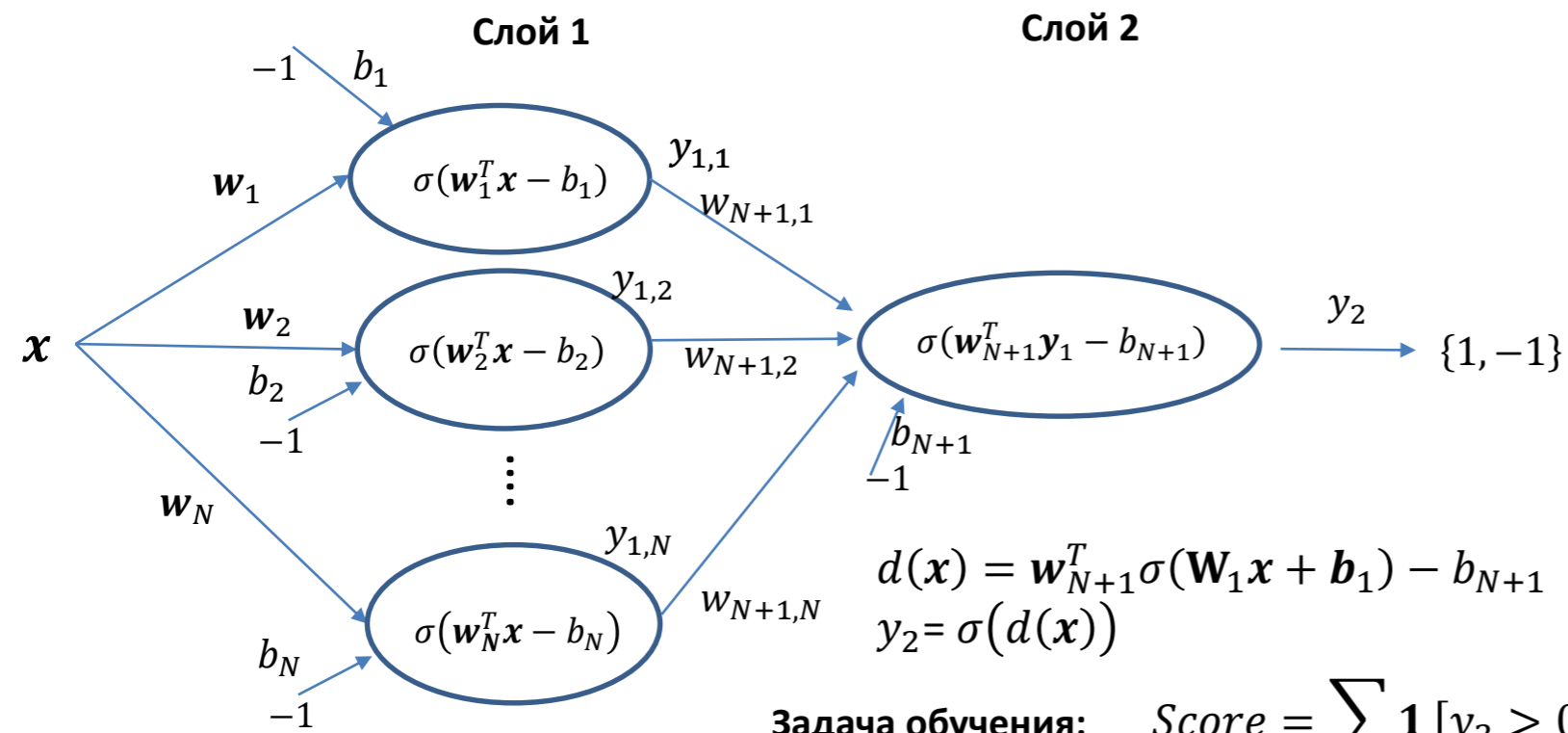
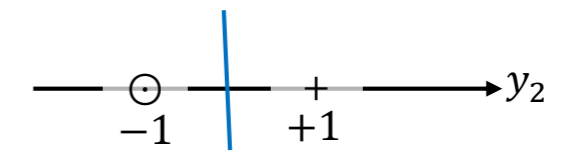


$$y_1 = (\sigma(w_1^T x - b_1), \sigma(w_2^T x - b_2), \dots)$$



Разделяющая гиперплоскость в **многомерном латентном пространстве** вторичных признаков

$$y_2 = \sigma(w_6^T y_1 - b_6)$$



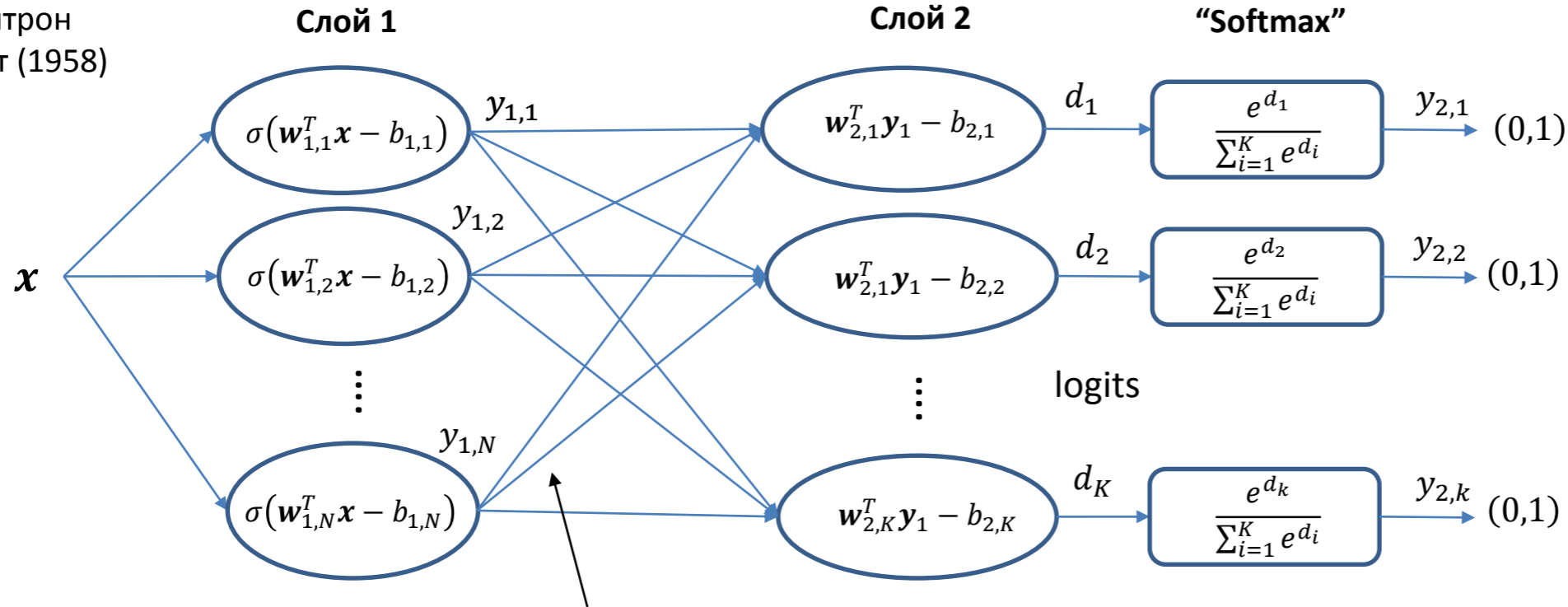
“Простота” (линейная разделимость) пространства признаков достигается усложнением модуля их выделения, что позволяет использовать “простой” классификатор. Таким образом, существует обратная связь между сложностью модуля выделения признаков и сложностью классификатора.

**Задача обучения:**  $Score = \sum_i \mathbf{1}[y_2 > 0 | x = '+' ] + \sum_i \mathbf{1}[y_2 < 0 | x = ' \odot ' ] \rightarrow \max_W$  42

# Модель классификации

## Многоклассовая классификация

Перцептрон  
Розенблат (1958)



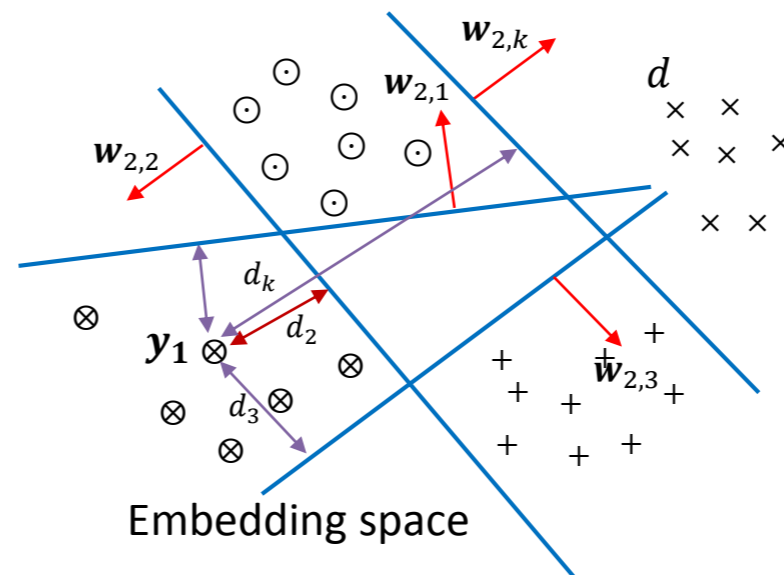
Вероятности для K-классов

Logits:  $d(x) = W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2$  Embedding space

$W_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,N})^T, b_1 = (-b_{1,1}, -b_{1,2}, \dots, -b_{1,N})^T$

$W_2 = (w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,K})^T, b_2 = (-b_{2,1}, -b_{2,2}, \dots, -b_{2,K})^T$

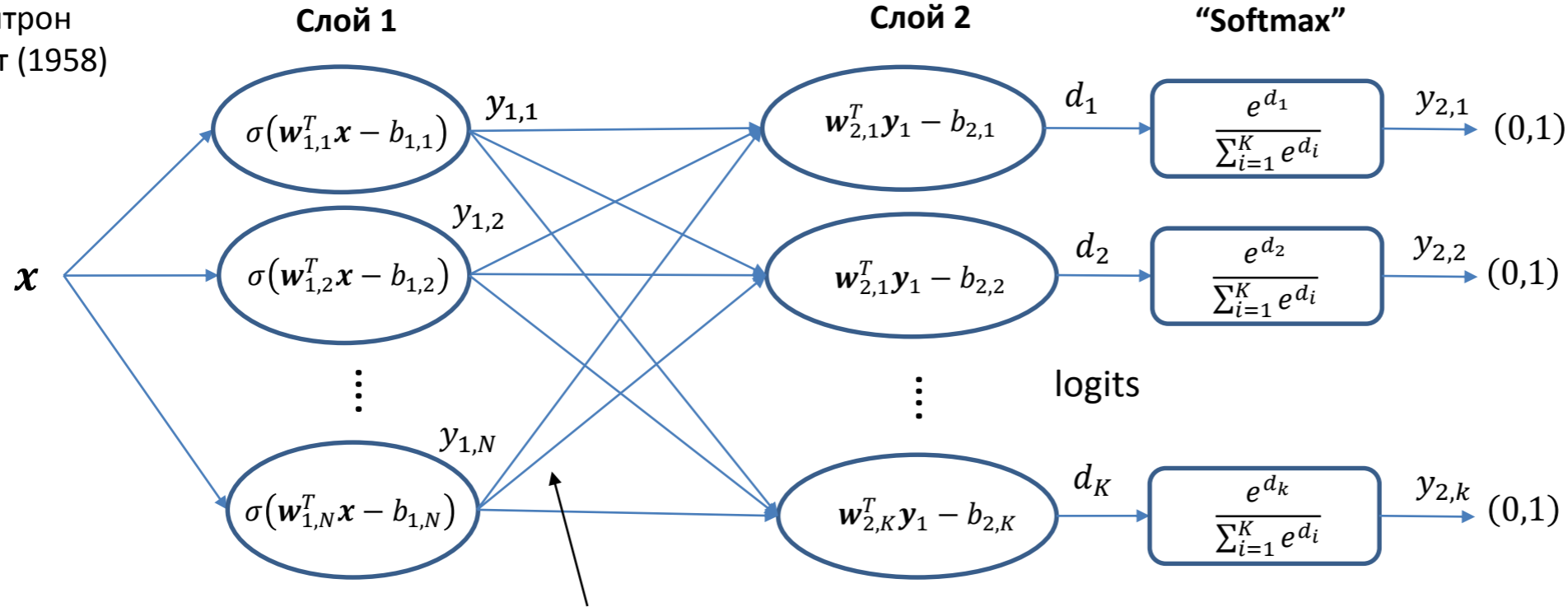
$y_2(x) = \text{softmax}(W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2)$



# Модель классификации

## Многоклассовая классификация

Перцептрон  
Розенблат (1958)



Вероятности для K-классов

Logits:  $d(x) = W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2$  Embedding space

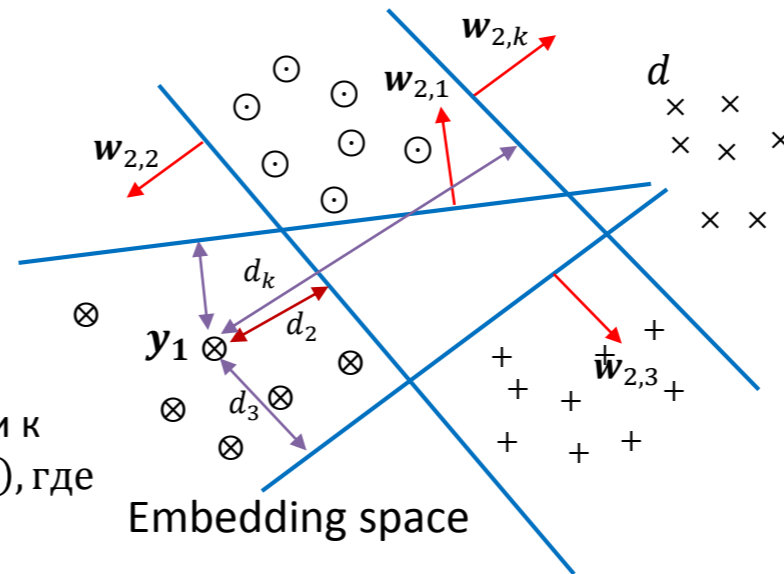
$$W_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,N})^T, b_1 = (-b_{1,1}, -b_{1,2}, \dots, -b_{1,N})^T$$

$$W_2 = (w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,K})^T, b_2 = (-b_{2,1}, -b_{2,2}, \dots, -b_{2,K})^T$$

$$y_2(x) = \text{softmax}(W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2)$$

$$CE: L = - \sum_{i=1}^I \tilde{y}_i^T \log(y_2(x_i; W_1, b_1, W_2, b_2)) \rightarrow \min_{W_1, b_1, W_2, b_2}$$

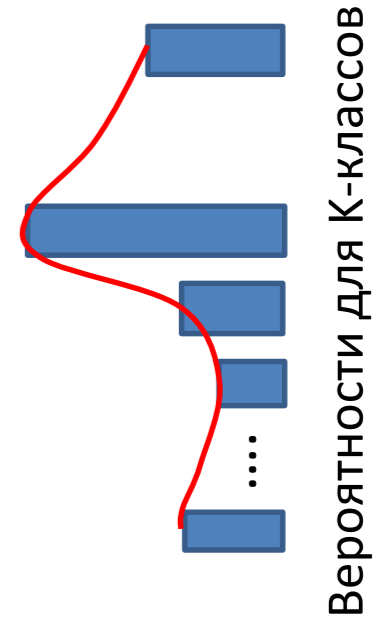
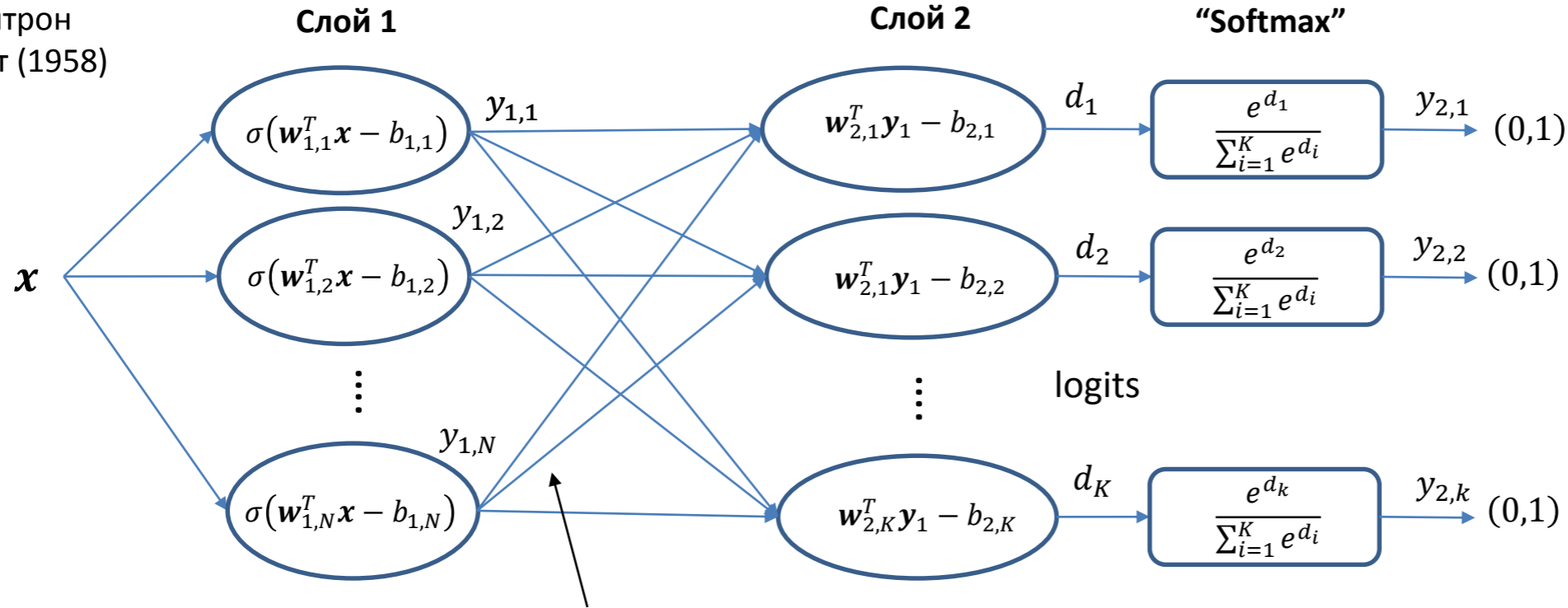
- **кросс-энтропия**, мера схожести распределения  $\tilde{y}_i$  принадлежности к истинному классу с предсказанной моделью распределением  $y_2(x_i)$ , где  $\tilde{y}_i$  – one-hot вектор для примера  $i$ , где метка класса – индекс с ненулевым элементом, остальные элементы нулевые.



# Модель классификации

## Многоклассовая классификация

Перцептрон  
Розенблат (1958)



Logits:  $d(x) = W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2$  Embedding space

$$W_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,N})^T, b_1 = (-b_{1,1}, -b_{1,2}, \dots, -b_{1,N})^T$$

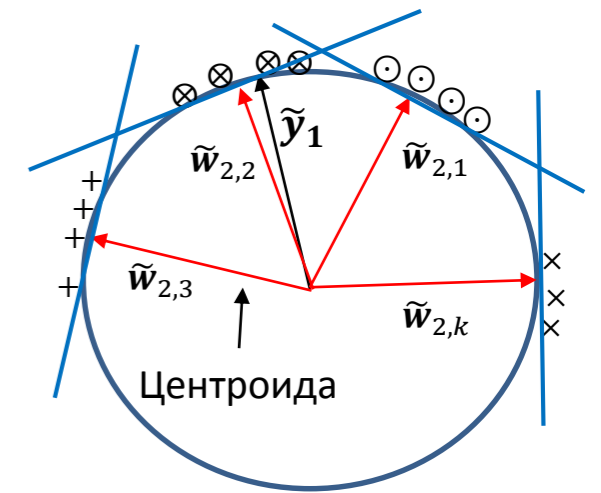
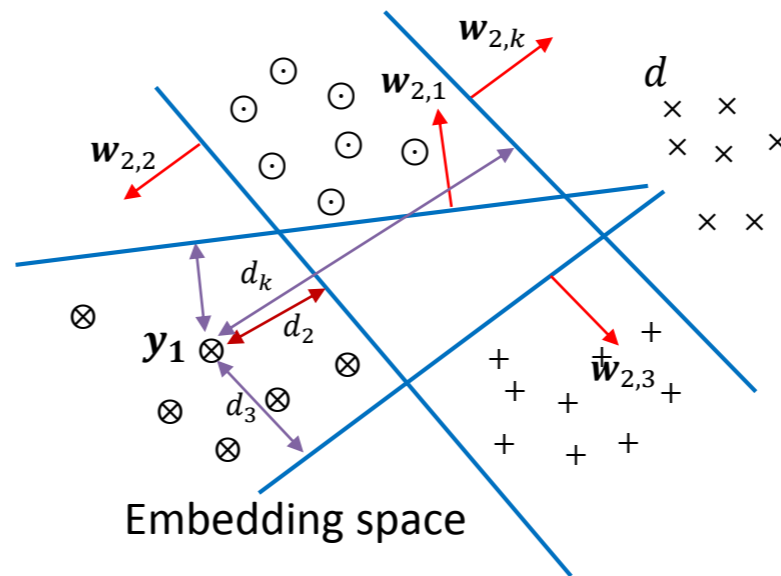
$$W_2 = (w_{2,1}, w_{2,2}, \dots, w_{2,K})^T, b_2 = (-b_{2,1}, -b_{2,2}, \dots, -b_{2,K})^T$$

$$y_2(x) = \mathit{softmax}(W_2 \sigma(W_1 x + b_1) - b_2)$$

$$CE: L = - \sum_{i=1}^I \tilde{y}_i^T \log(y_2(x_i; W_1, b_1, W_2, b_2)) \rightarrow \min_{W_1, b_1, W_2, b_2}$$

Normalized:

$$\tilde{y}_2(x) = \mathit{softmax}\left(\tilde{W}_2 \frac{y_1}{\|y_1\|}\right) = \mathit{softmax}(\cos(\tilde{W}_2, \tilde{y}_1))$$



Normalized Embedding space

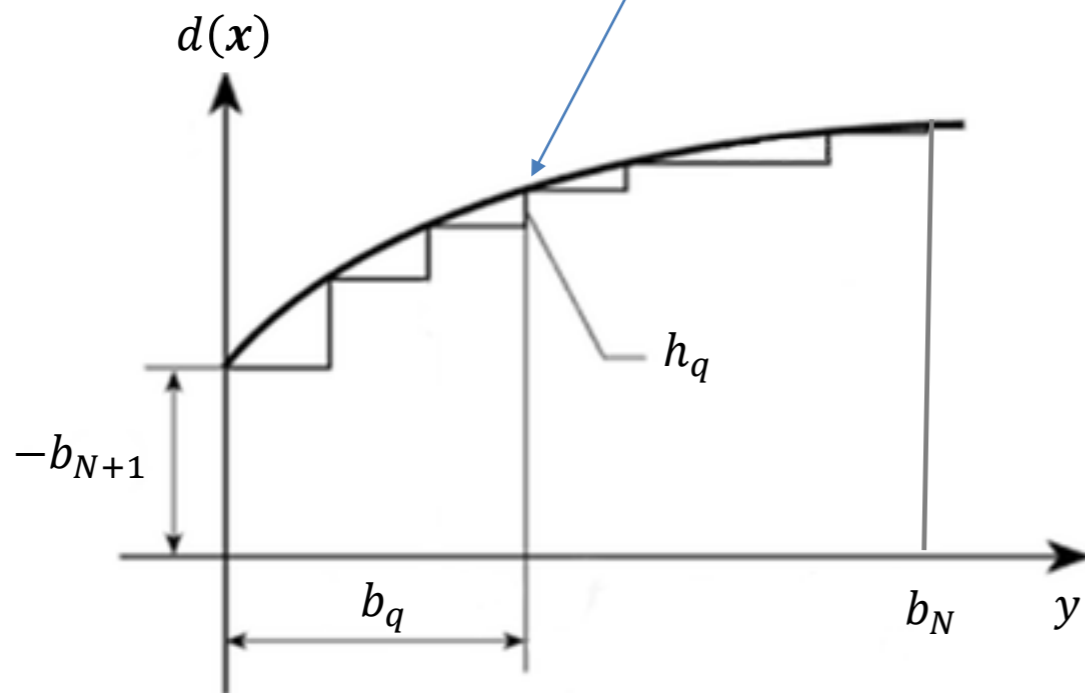
# Нейросетевая модель – аппроксимация решающей функции

Структура модели решающей функции:

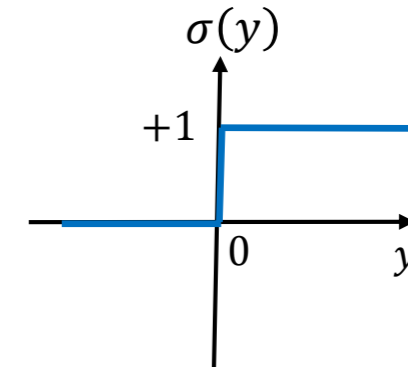
$$d(\mathbf{x}) = d(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbf{w}_{N+1}^T \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) - b_{N+1} = \sum_{q=1}^N \underbrace{w_{N+1,q}}_{h_q} \underbrace{\sigma(\mathbf{w}_q^T \mathbf{x} - b_q)}_{y_q(\mathbf{x})} - b_{N+1} = -b_{N+1} + \sum_{q=1}^N h_q \sigma(y_q(\mathbf{x}) - b_q)$$

Разложение функции  $d(\mathbf{x})$  на взвешенную сумму “неравномерных”  $N$  “ступенек”, при этом веса  $h_q$  играют роль аддитивных поправок в значение  $d(\mathbf{x})$ , которые выбираются из фиксированного множества  $\{h_q\}$  в зависимости от значения  $y_q(\mathbf{x})$ .

Функция Хэвисайда с коэффициентом  $h_q$  имеет вклад в значение  $d(\mathbf{x})$  при  $y_q(\mathbf{x}) \geq b_q$ , иначе поправка  $h_q$  игнорируется.



Пороговая функция активации – функция Хэвисайда (“ступенька”)



## Теоремы об аппроксимации

Обобщение:

$$d(\mathbf{x}) = d(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbf{w}_{N+1}^T \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) - b_{N+1} = \sum_{q=1}^N w_{N+1,q} \sigma(\mathbf{w}_q^T \mathbf{x} - b_q) - b_{N+1} =$$
$$= \sum_{q=1}^N \underbrace{w_{N+1,q} \sigma}_{\tilde{\Phi}_q, \tilde{\Phi}_0 = -b_{N+1}} \left( \sum_{p=1}^n w_{q,p} x_p - b_q \right) - b_{N+1} = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \underbrace{w_{q,p} x_p}_{\tilde{\Phi}_{q,p}(x_p)} \right) = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \tilde{\Phi}_{q,p}(x_p) \right)$$

# Теоремы об аппроксимации

Обобщение: 
$$d(\mathbf{x}) = d(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbf{w}_{N+1}^T \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) - b_{N+1} = \sum_{q=1}^N w_{N+1,q} \sigma(\mathbf{w}_q^T \mathbf{x} - b_q) - b_{N+1} =$$

$$= \sum_{q=1}^N \underbrace{w_{N+1,q} \sigma}_{\tilde{\Phi}_q, \tilde{\Phi}_0 = -b_{N+1}} \left( \sum_{p=1}^n w_{q,p} x_p - b_q \right) - b_{N+1} = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \underbrace{w_{q,p} x_p}_{\tilde{\phi}_{q,p}(x_p)} \right) = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \tilde{\phi}_{q,p}(x_p) \right)$$

## Теорема Колмогорова-Арнольда (1957, 1961):

Для  $\forall f: [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная,  $\exists \phi_{q,p}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная и не зависит от  $f$ ,  $\Phi_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная и **зависит** от  $f \Rightarrow$

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right)$$

**Лоренц (1962):**  $\Phi_q \rightarrow \Phi$ ; **Шпрехер (1965):**  $\Phi_q = \Phi(\cdot + q)$ ,  $\phi_{q,p}(x_p) = \lambda_p \phi(x_p + \eta q)$ , где  $\phi: [0,1] \rightarrow [0,1]$  – **возрастающая** непрерывная функция,  $\lambda_p, \eta \in \mathbb{R}$ .

- Теоремы не дают информации о структуре функций  $\Phi, \phi$ .
- Теоремы не дают рецепта как найти или построить функции  $\Phi, \phi$ .
- KAN – в качестве функций  $\Phi, \phi$  используют одномерные сплайны с обучаемыми параметрами.

## Теоремы об аппроксимации

Обобщение:

$$d(\mathbf{x}) = d(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbf{w}_{N+1}^T \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) - b_{N+1} = \sum_{q=1}^N w_{N+1,q} \sigma(\mathbf{w}_q^T \mathbf{x} - b_q) - b_{N+1} =$$

$$= \sum_{q=1}^N \underbrace{w_{N+1,q}}_{\tilde{\Phi}_q, \tilde{\Phi}_0 = -b_{N+1}} \left( \sum_{p=1}^n w_{q,p} x_p - b_q \right) - b_{N+1} = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \underbrace{w_{q,p} x_p}_{\tilde{\Phi}_{q,p}(x_p)} \right) = \sum_{q=0}^N \tilde{\Phi}_q \left( \sum_{p=1}^n \tilde{\Phi}_{q,p}(x_p) \right)$$

### Теорема Цыбенко (1989) - (Универсальная теорема аппроксимации)

Для  $\forall f: [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \mathbf{w}_q \in \mathbb{R}^n, \alpha_q, \theta_q \in \mathbb{R}, G(\cdot, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}): [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 где  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N)^T, \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T, \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T$ ,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{q=1}^N \alpha_q \varphi(\mathbf{w}_q^T \mathbf{x} + \theta_q), \quad \varphi(z) \text{ – любая сигмоидная непрерывная функция, например, } \varphi(z) = \frac{1}{1+e^{-z}},$$

(“гладкая ступенька”)

выполняется:  $|G(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$  для  $\forall \mathbf{x} \in [0,1]^n$ .

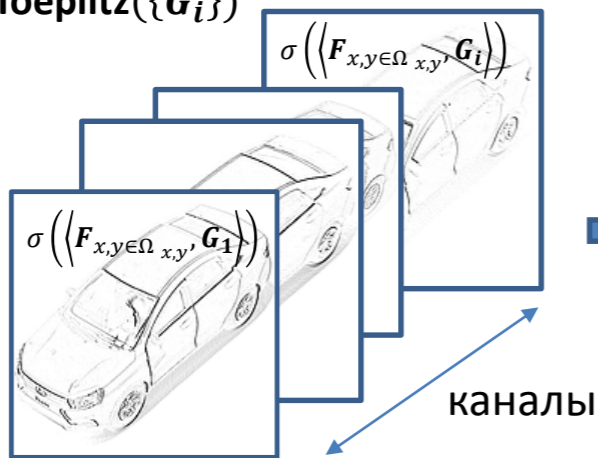
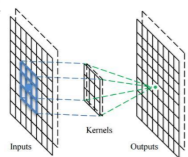
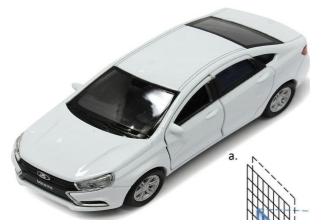
- Любая непрерывная функция на единичном кубе равномерно приближается **двуслойной нейронной сетью** с сигмоидной функцией активации.
- Теорема не указывает чему равно число нейронов  $N$  в первом слое и как оно зависит от структуры функции  $f$  и значения точности  $\varepsilon$ .

# Сверточная нейросетевая модель

$$V_i = \sigma \left( \langle F_{x,y \in \Omega_{x,y}}, G_i \rangle \right) = \sigma(W_0 f)$$

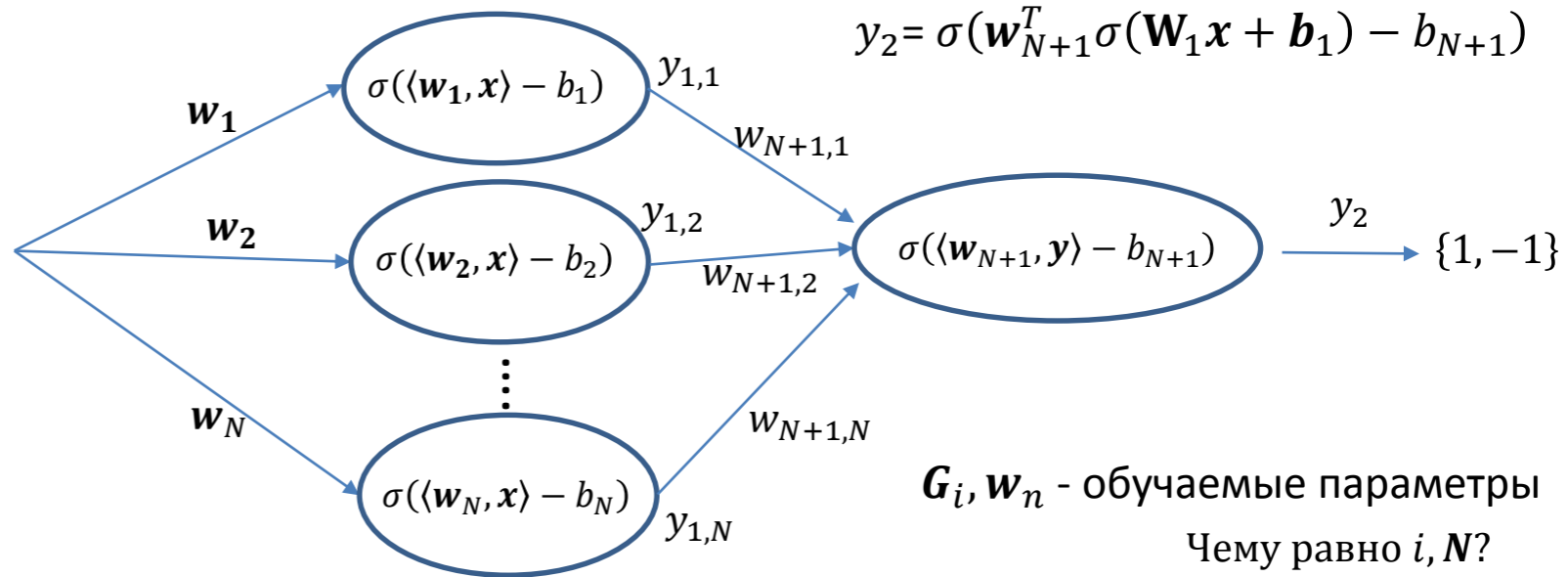
$$f = \text{mat2vec}(f), W_0 = \text{Toeplitz}(\{G_i\})$$

$$x = \text{mat2vec}(\{V_i\})$$



каналы

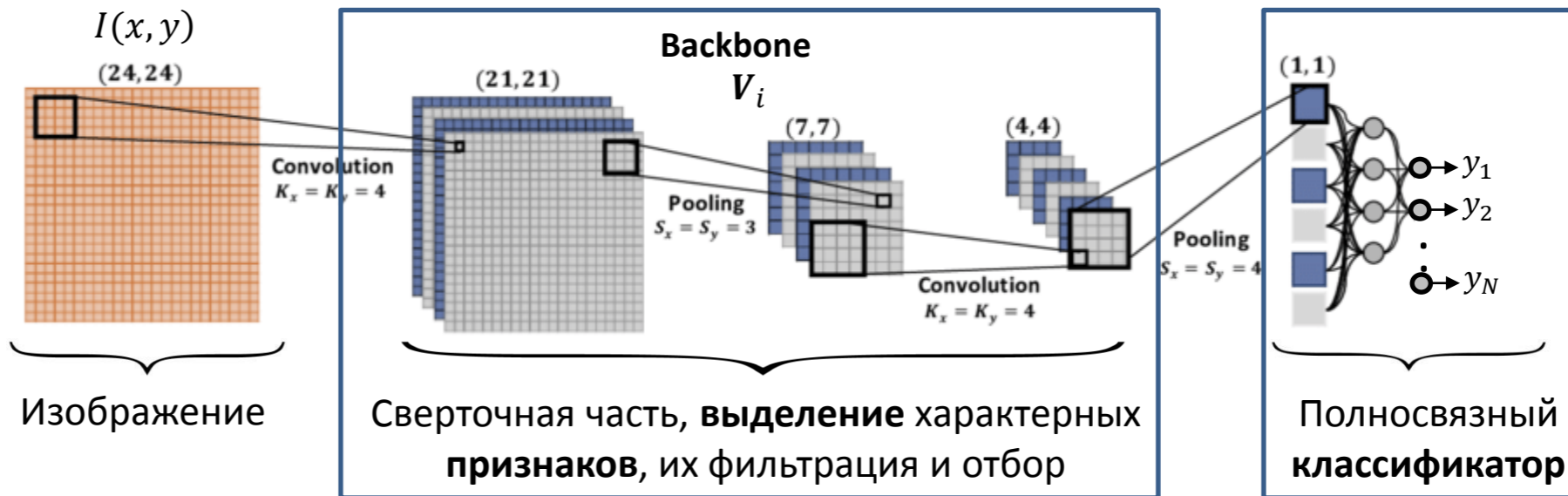
$x$



$G_i, w_n$  - обучаемые параметры  
Чему равно  $i, N$ ?

Как выделение признаков  $\langle F, G_i \rangle$ , так и их нейросетевая классификация производится путем **линейного проецирования входа на латентные пространства** с последующей нелинейной (пороговой) фильтрацией результата и получения активаций  $\sigma(W_0 f)$ .

**Выделение признаков реализуется как нейросетевая классификация** по множеству латентных локальных паттернов, которые определяются обучаемыми сверточными ядрами  $G_i$ . В общем случае, сверточная часть модели может содержать несколько слоев.



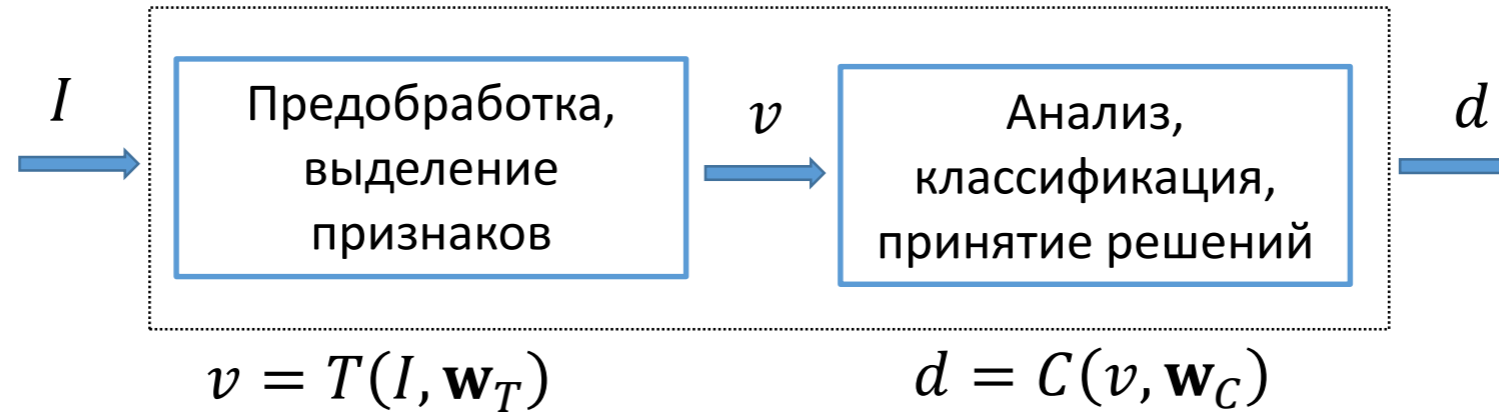
Сверточная часть, **выделение** характерных признаков, их фильтрация и отбор

Полносвязный классификатор

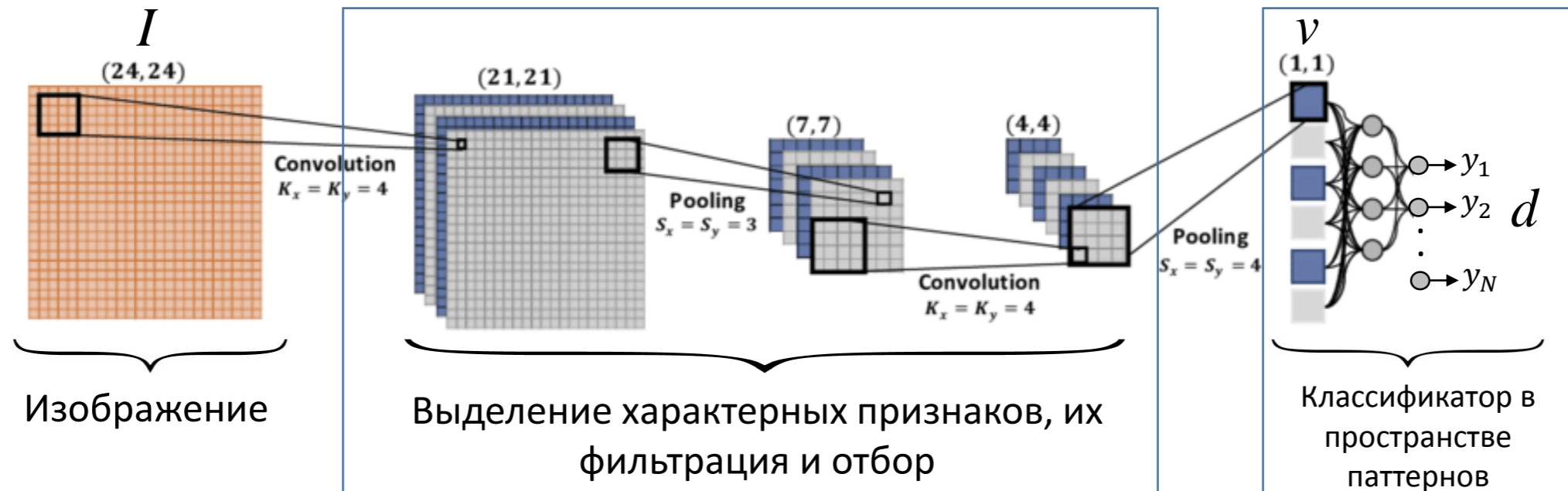
Набор из  $G_i$  фильтров

$W_{11}$	$W_{21}$	$W_{31}$
$W_{12}$	$W_{22}$	$W_{32}$
$W_{13}$	$W_{23}$	$W_{33}$

# Обучаемая интеллектуальная система

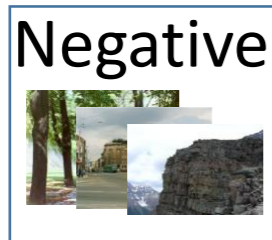


## Нейросетевая модель интеллектуальной системы

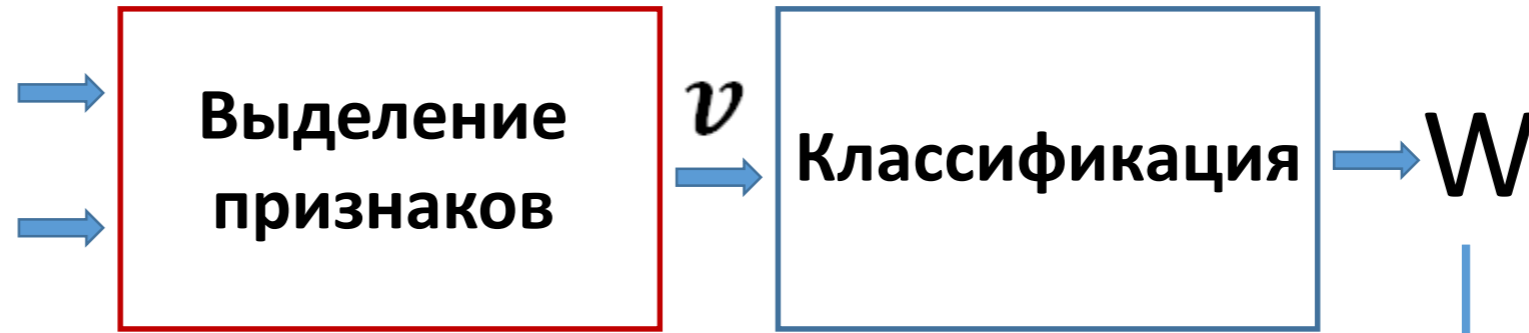


# Общая схема построения интеллектуальной системы двухклассовой классификации

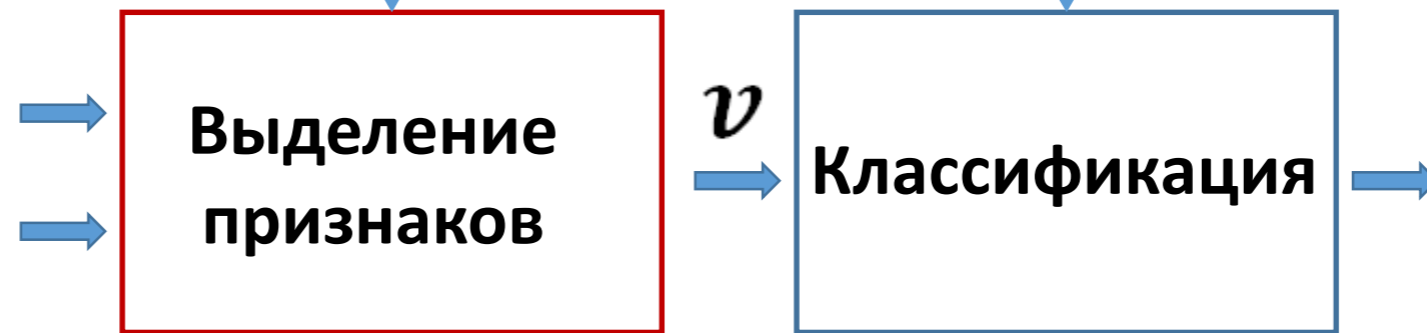
Обучающая выборка



Обучение



Тестовая выборка



Распознавание, анализ, тест

DET (FRR-FAR)/  
ROC (TPR-FPR)

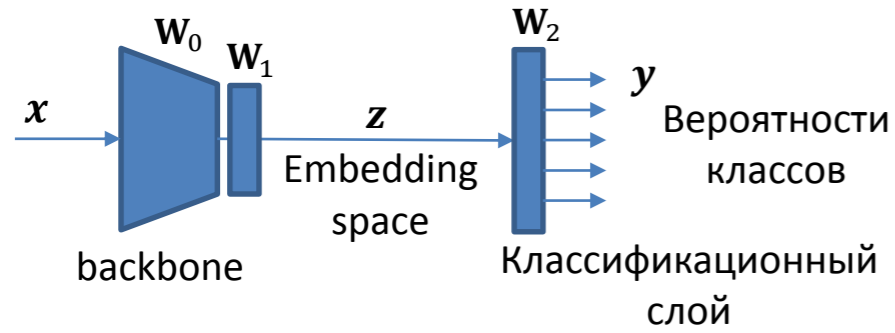
$$\text{Recall} = \text{TPR} = \frac{TP}{P}$$

$$\text{FAR} = \text{FPR} = \frac{FP}{N}$$

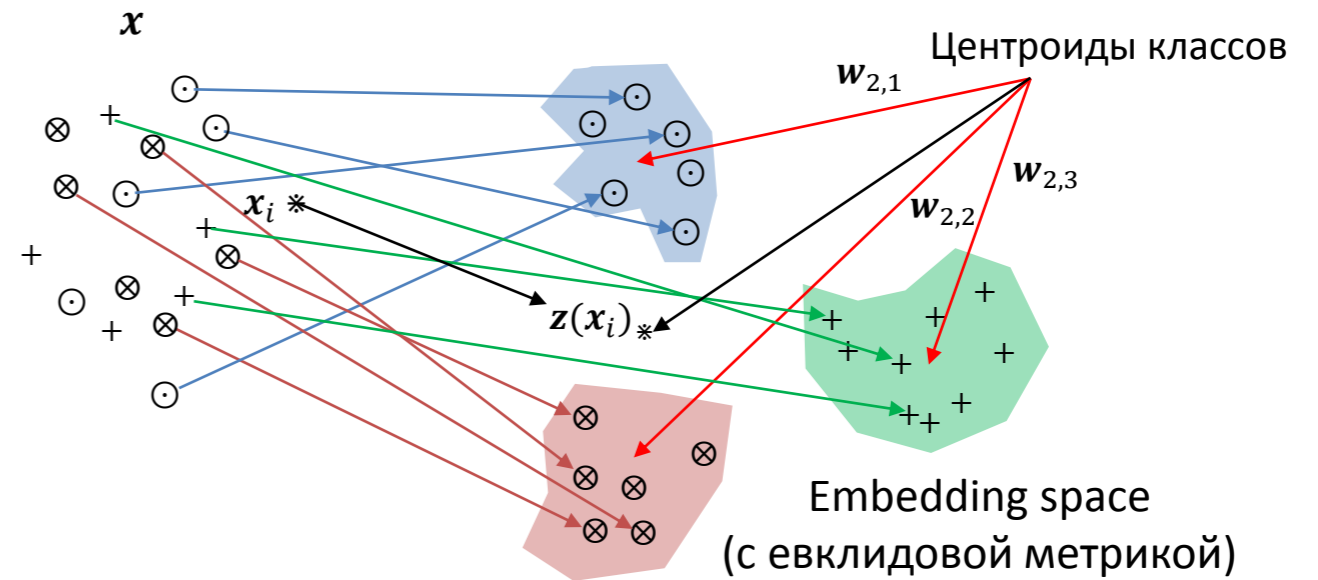
$$\text{FRR} = \text{FNR} = \frac{FN}{P}$$

# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

## Классификатор

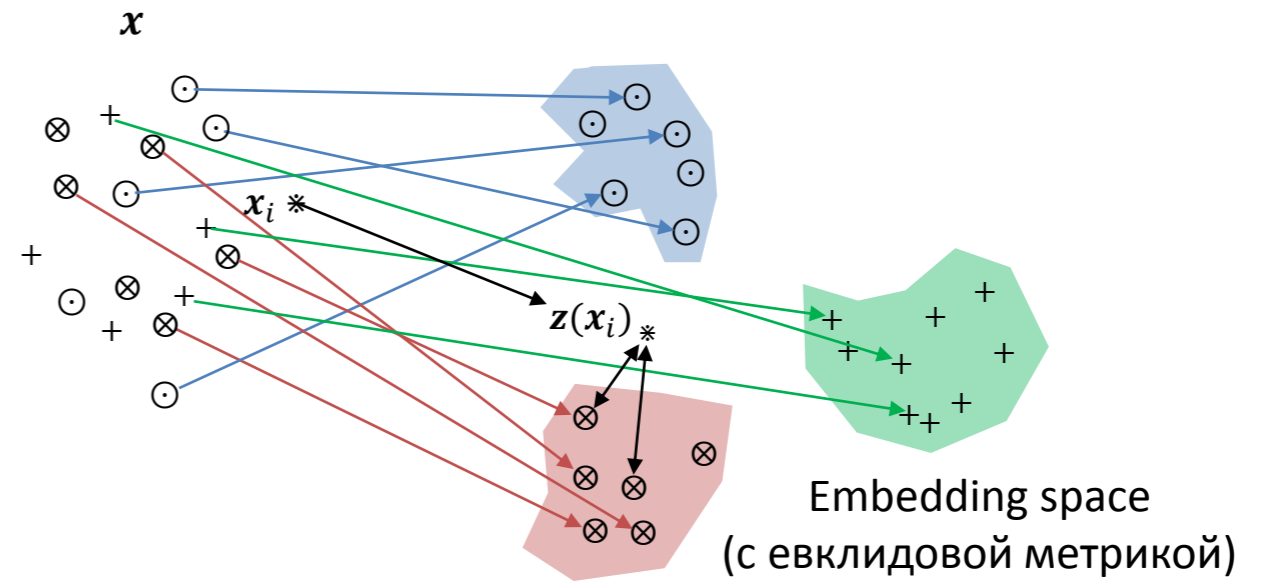
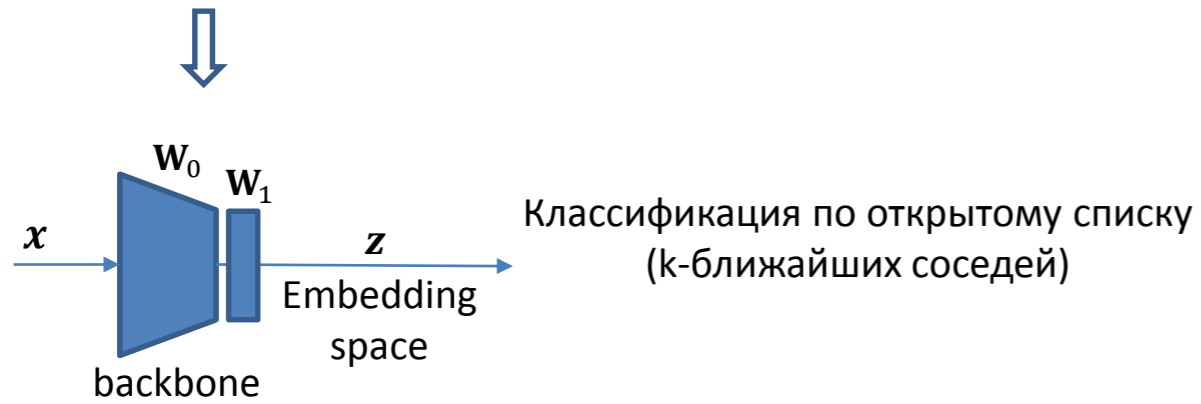
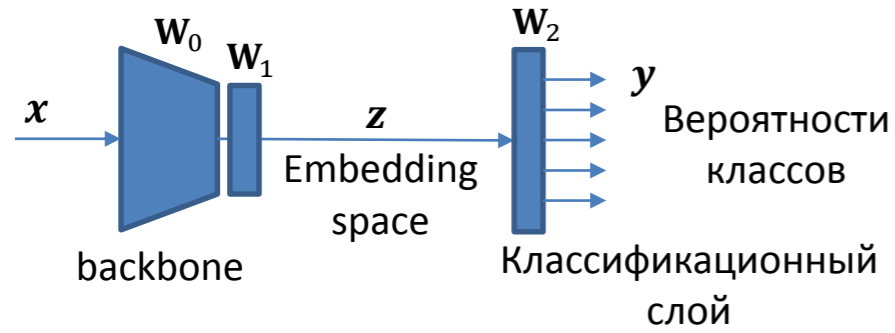


$$\text{CE: } L = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \tilde{y}_{i,k} \log \frac{e^{w_{2,k}^T z(x_i)}}{\sum_{j=1}^K e^{w_{2,j}^T z(x_i)}} \rightarrow \max_{W_0, W_1, b_1, W_2}$$



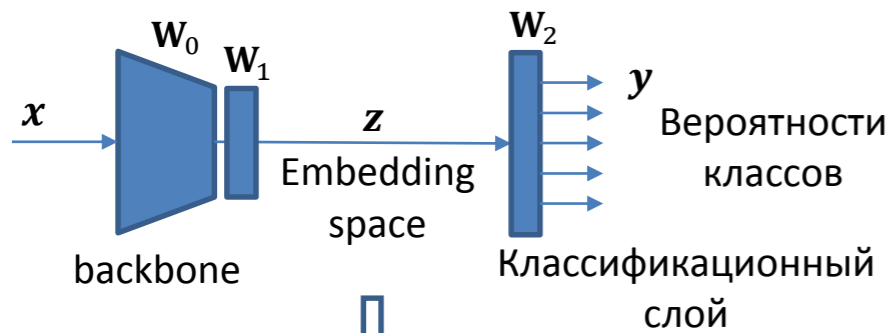
# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

## Классификатор

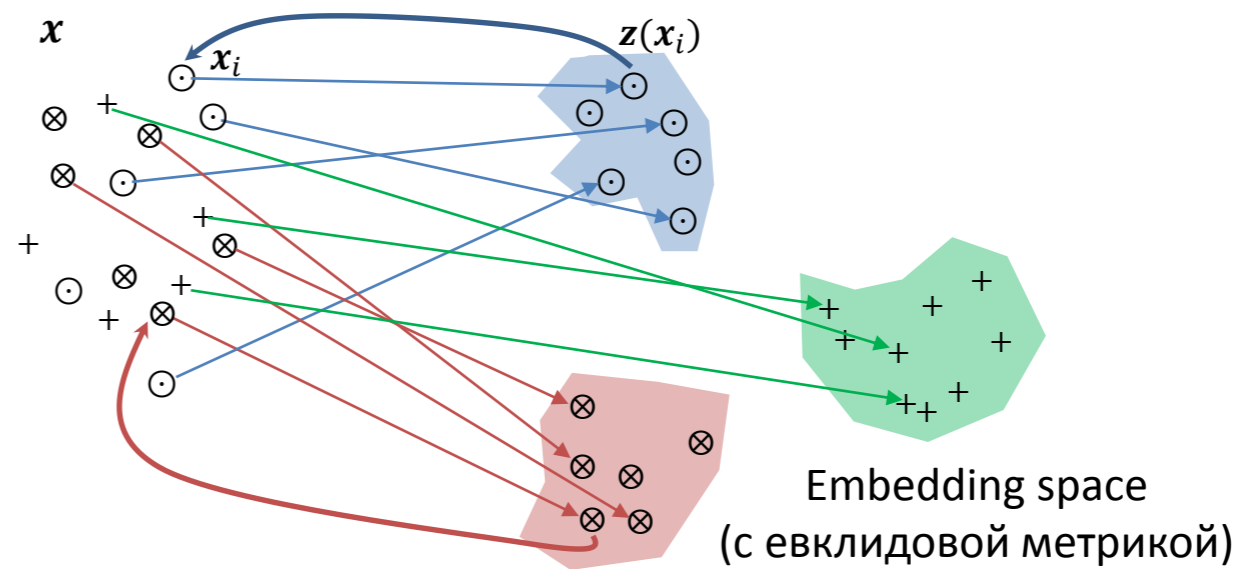
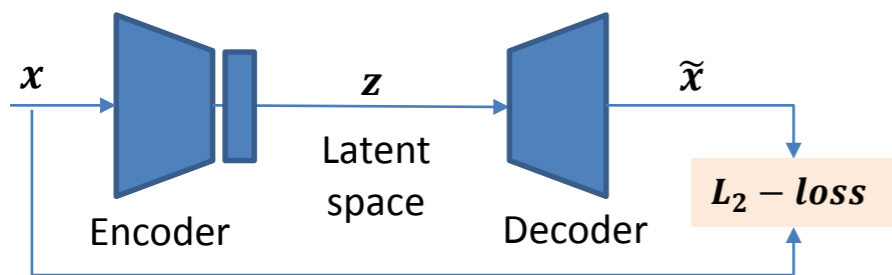


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

## Классификатор

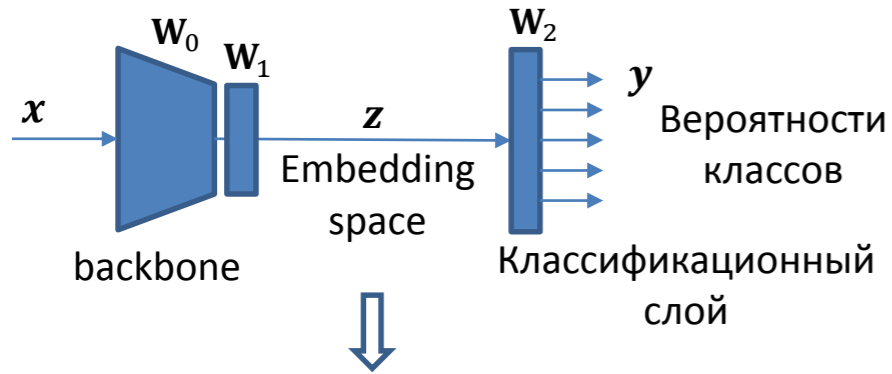


## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)

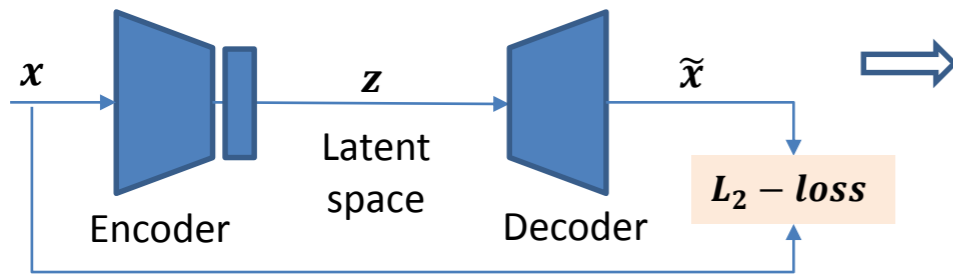


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

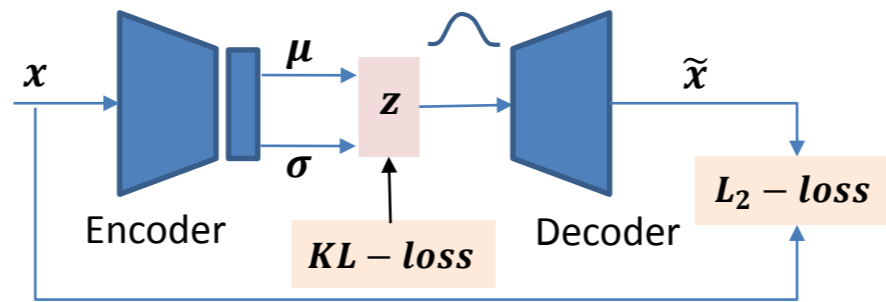
## Классификатор



## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)

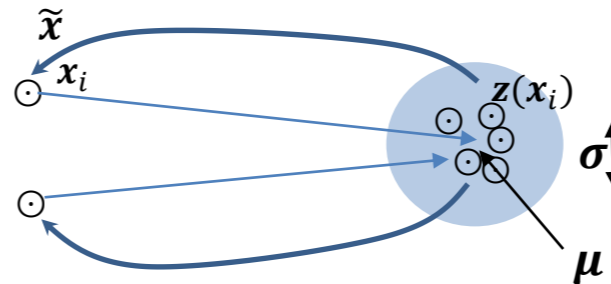


$$z = \mu + \sigma \odot \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$$

Регуляризация в латентном пространстве:

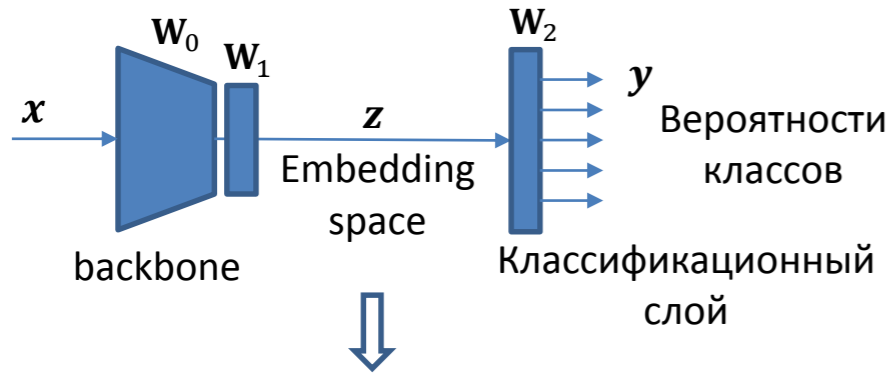
$$KL(\mathcal{N}(\mu(z), \sigma(z)) \parallel \mathcal{N}(0, I)) = \frac{1}{2} (\|\mu(z)\|_2^2 + \|\sigma(z)\|_2^2 - N - \log \det(\sigma(z))) \rightarrow \min$$

$x$

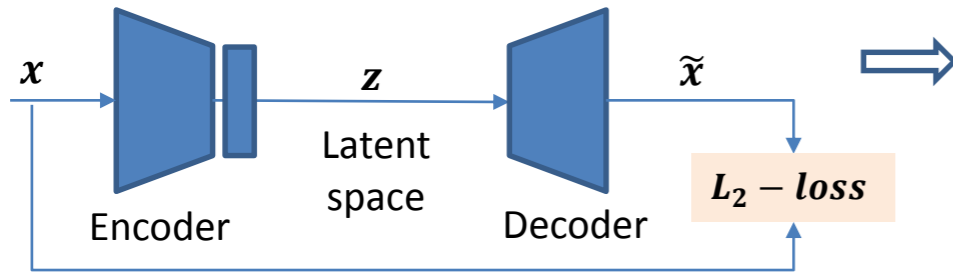


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

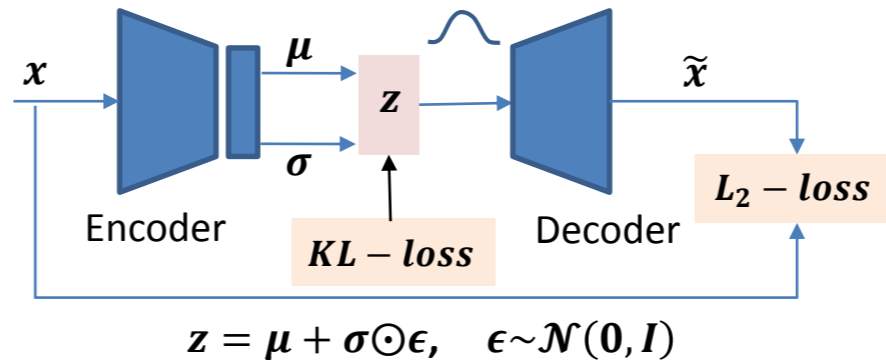
## Классификатор



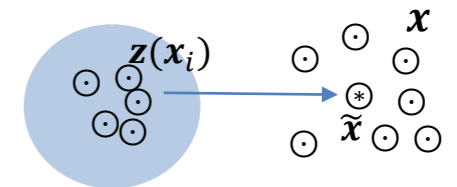
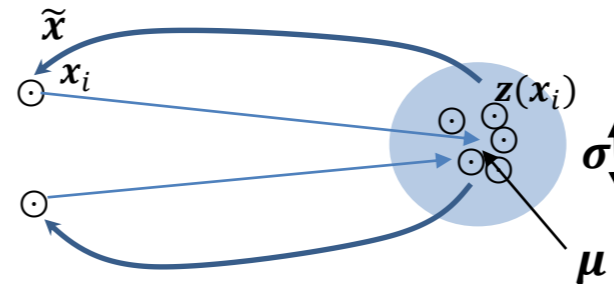
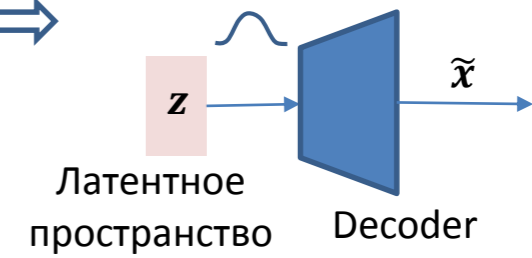
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)

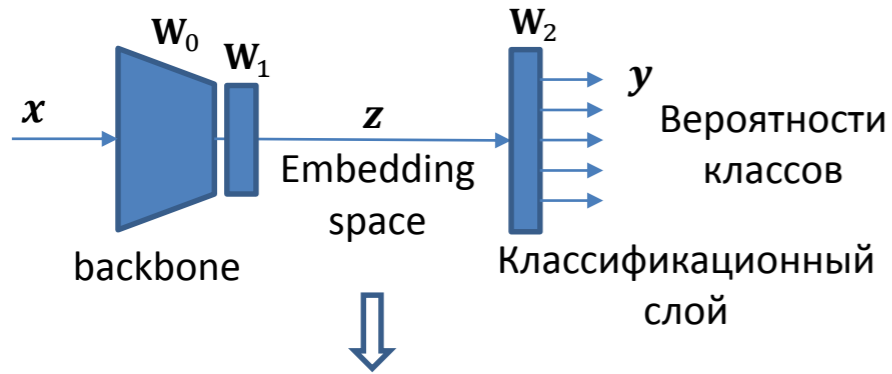


## Генерация

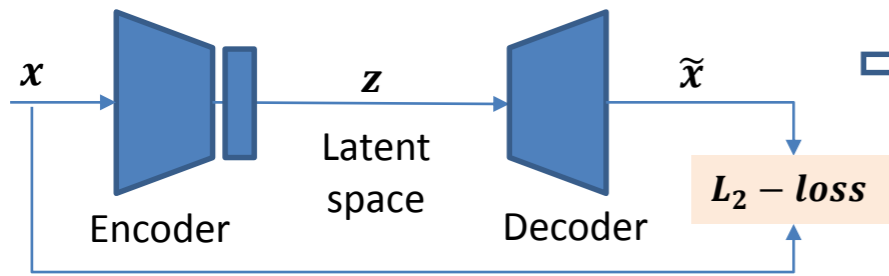


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

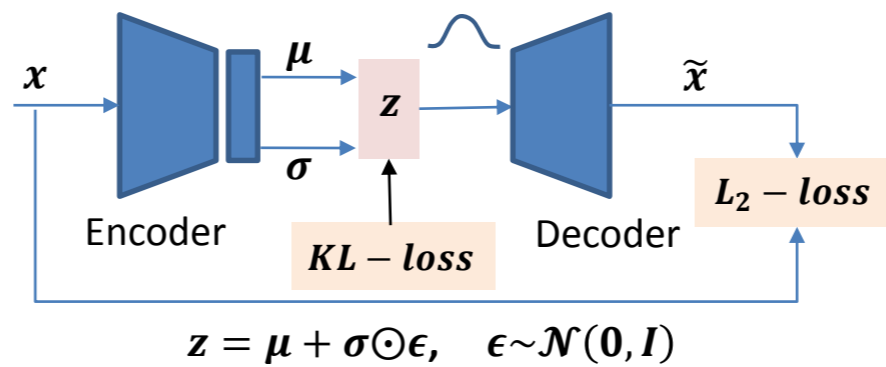
## Классификатор



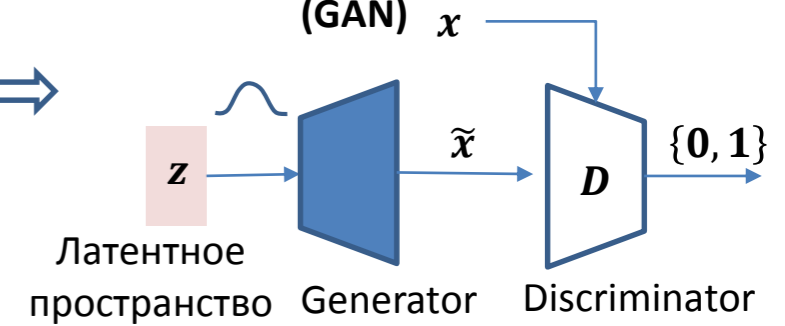
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



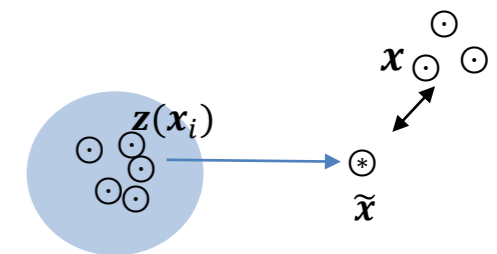
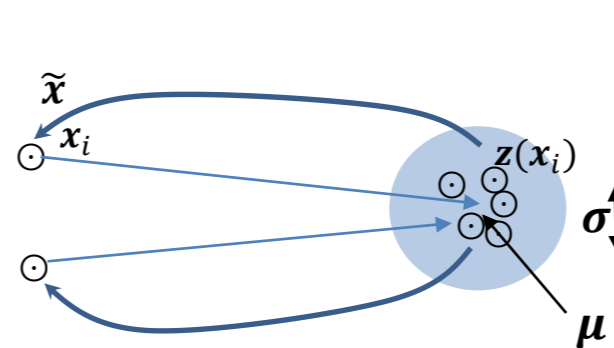
## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)



## Генерация (GAN)

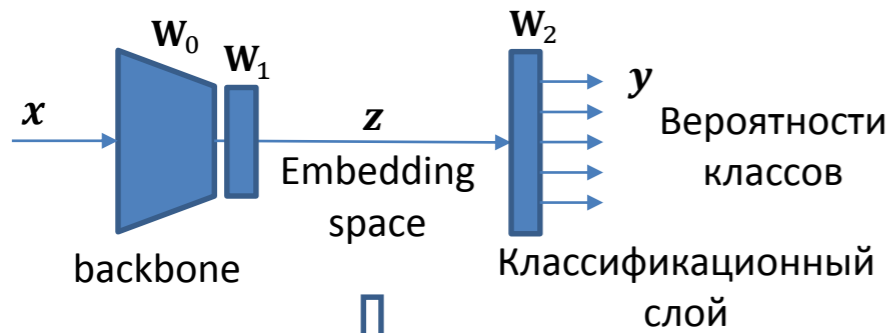


## Generative Adversarial Network

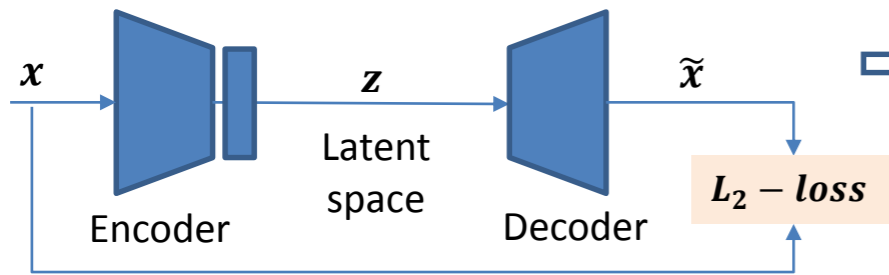


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

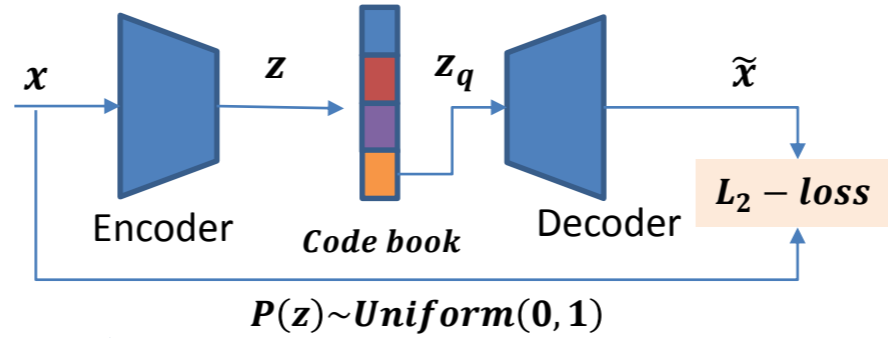
## Классификатор



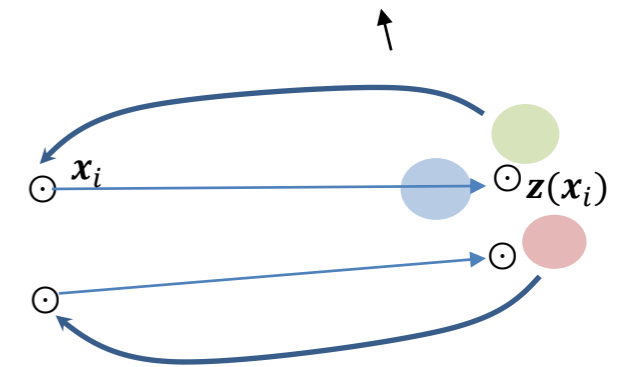
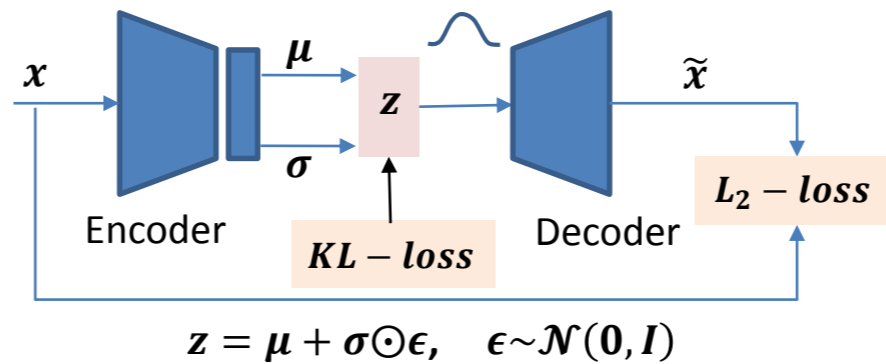
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



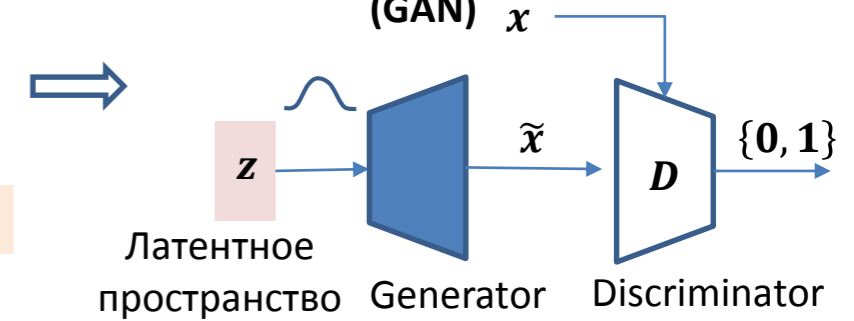
## Реконструкция (VQ-VAE)



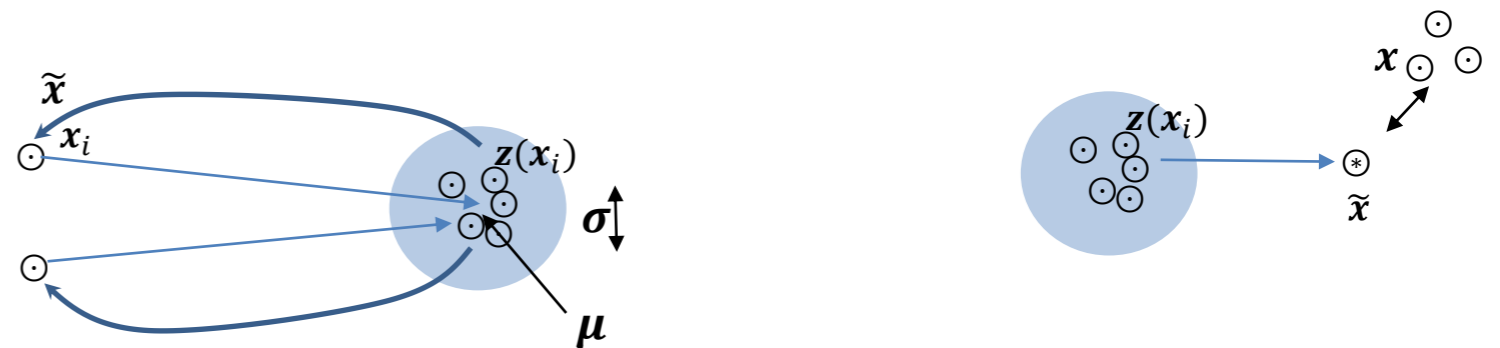
## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)



## Генерация (GAN)

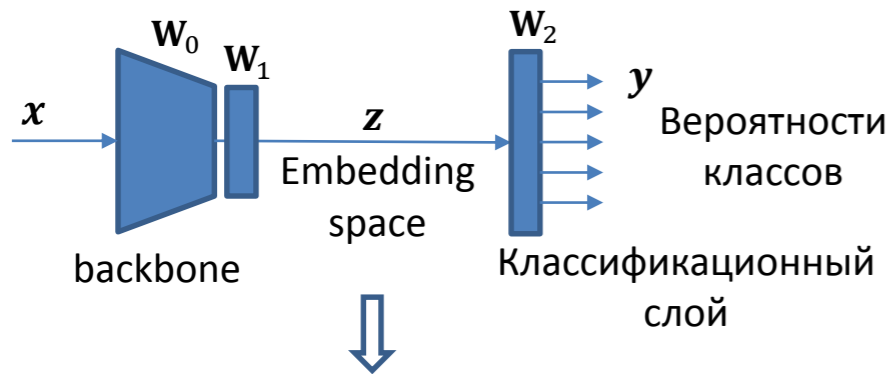


## Generative Adversarial Network

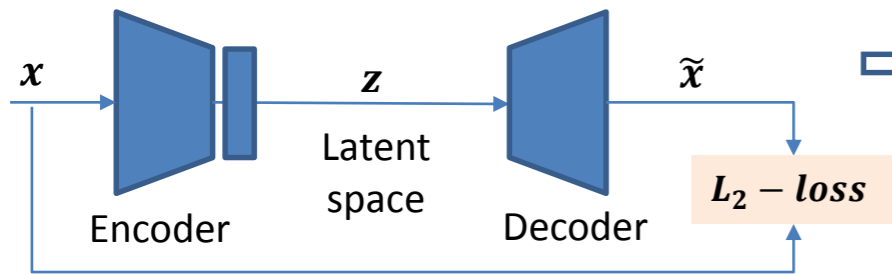


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

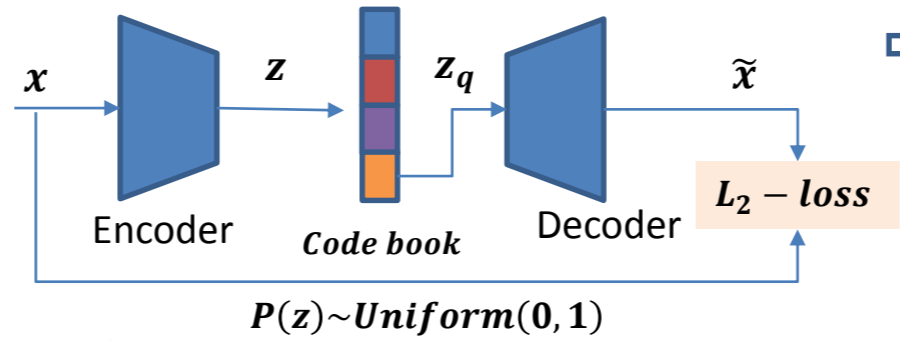
## Классификатор



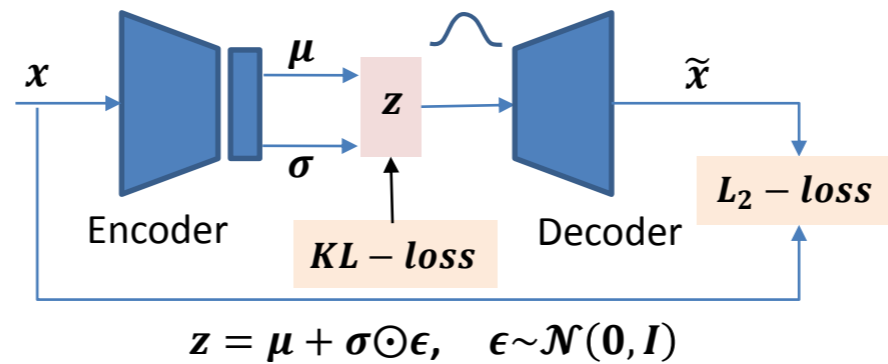
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



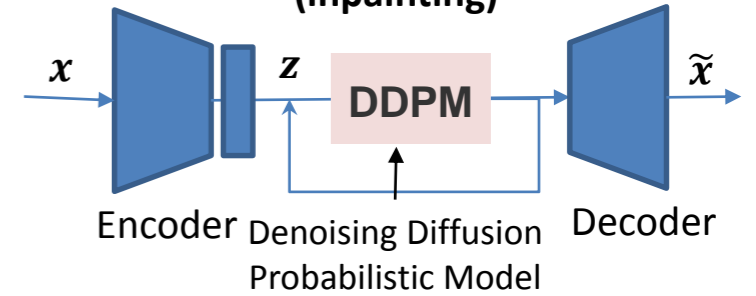
## Реконструкция (VQ-VAE)



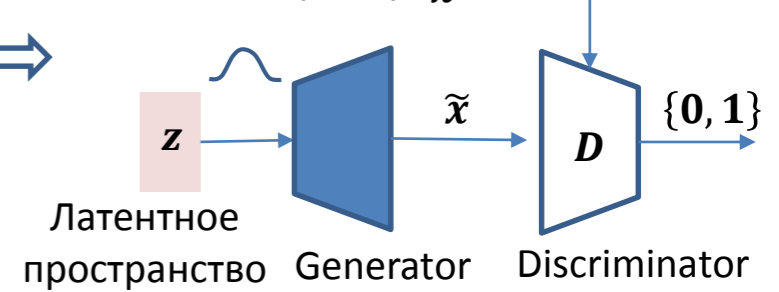
## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)



## Генерация Латентной моделью (inpainting)

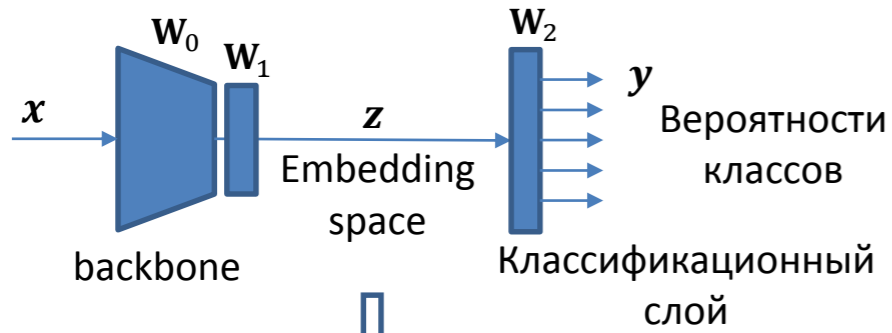


## Генерация (GAN)

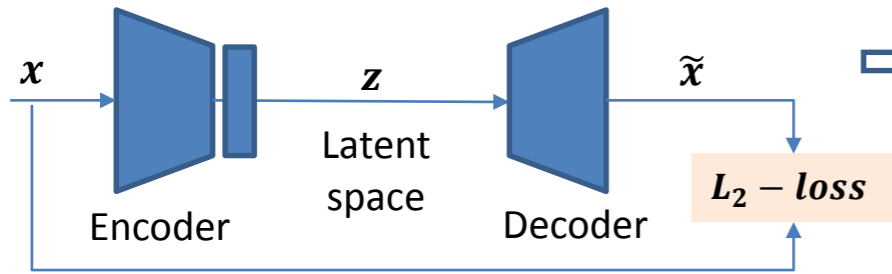


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

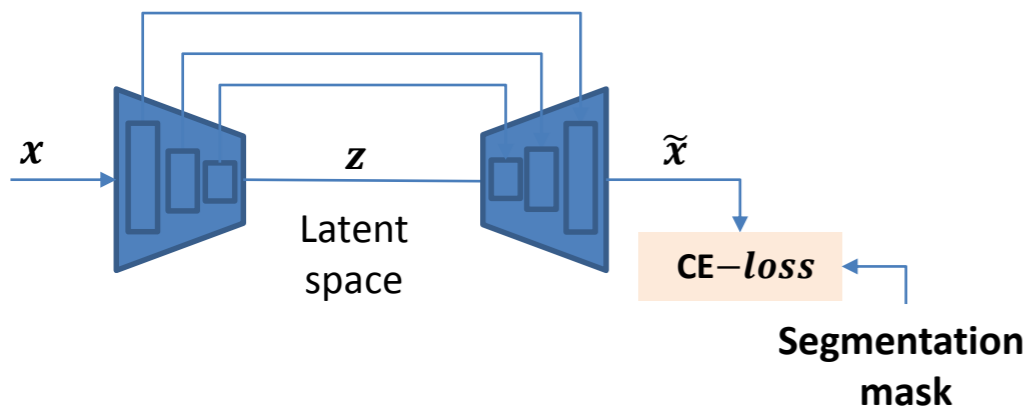
## Классификатор



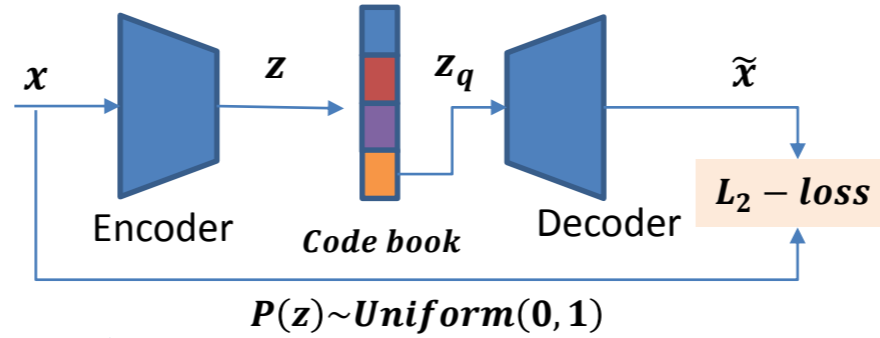
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



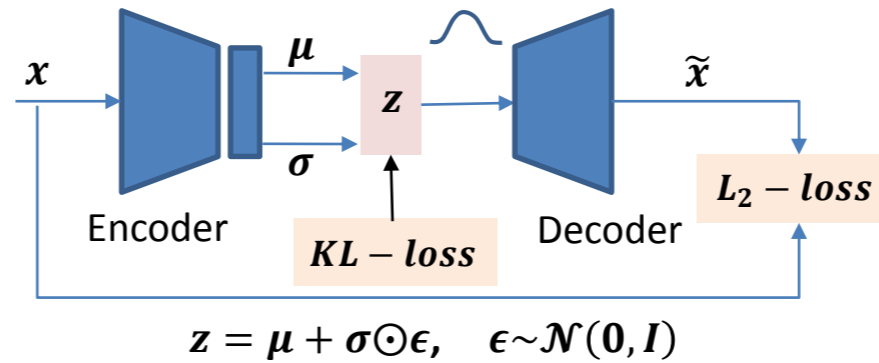
## Сегментация (UNET)



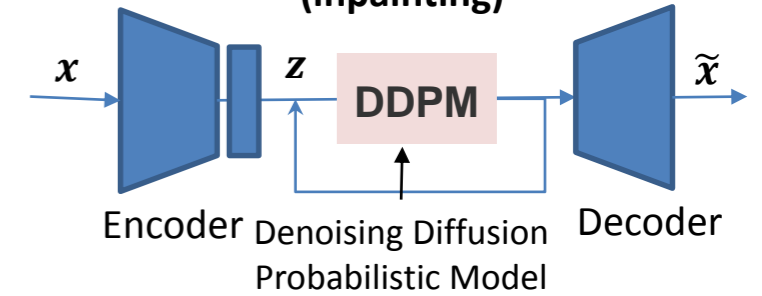
## Реконструкция (VQ-VAE)



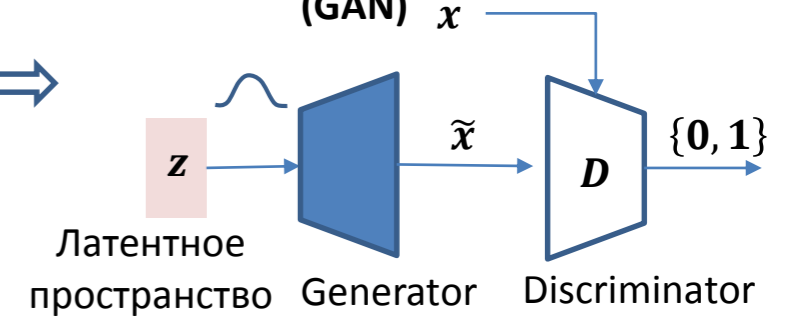
## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)



## Генерация Латентной моделью (inpainting)

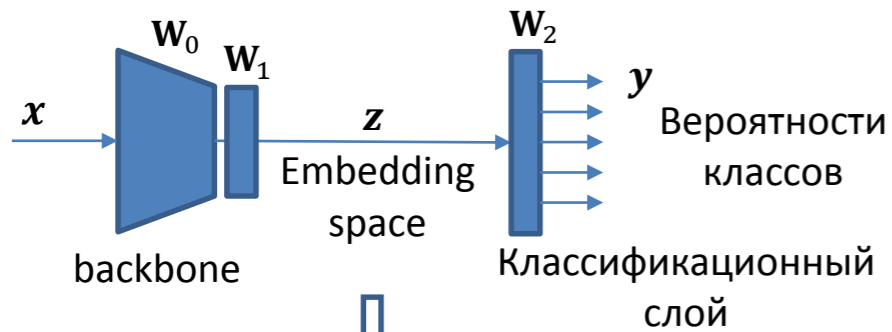


## Генерация (GAN)

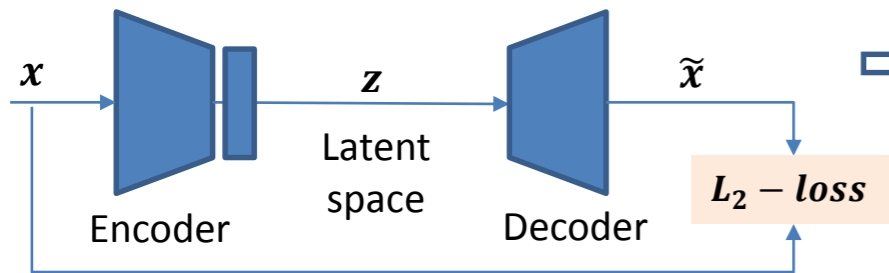


# Базовые архитектуры нейросетевых моделей

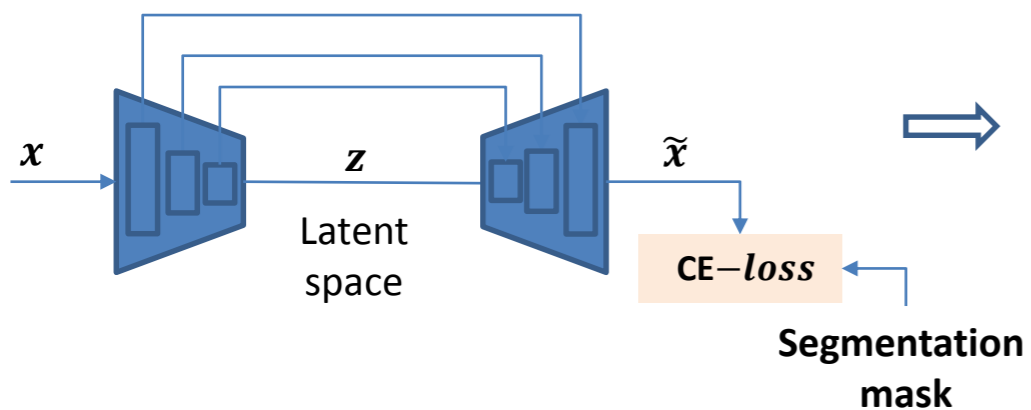
## Классификатор



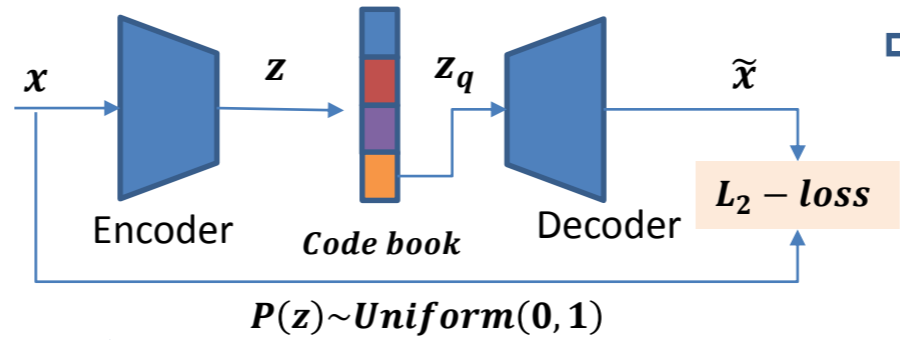
## Реконструкция Автоэнкодер (АЕ)



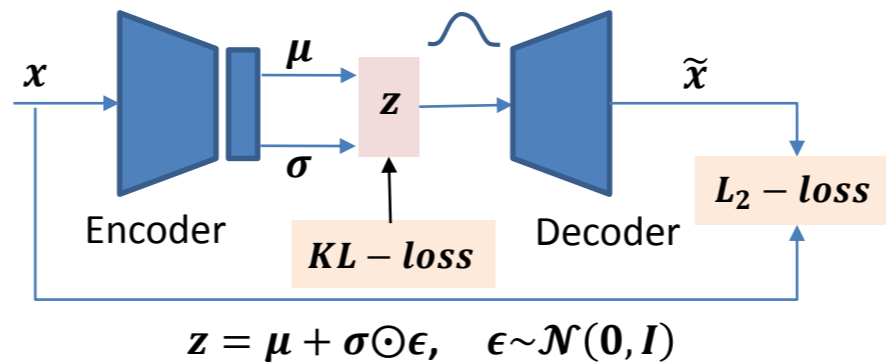
## Сегментация (UNET)



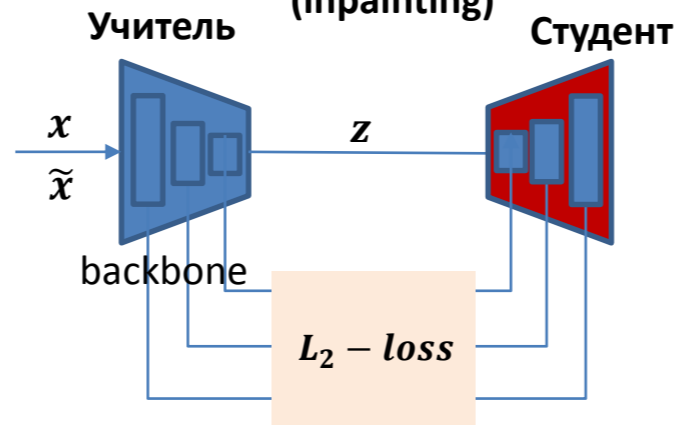
## Реконструкция (VQ-VAE)



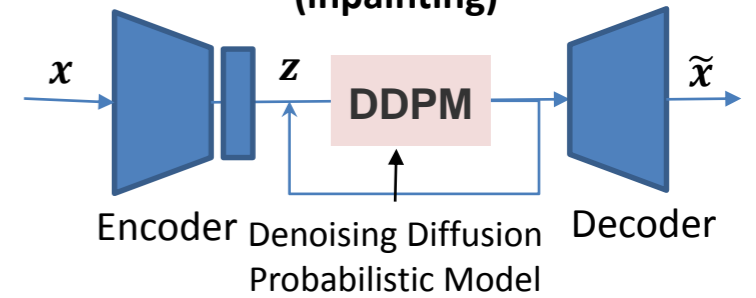
## Реконструкция Вариационный Автоэнкодер (VAE)



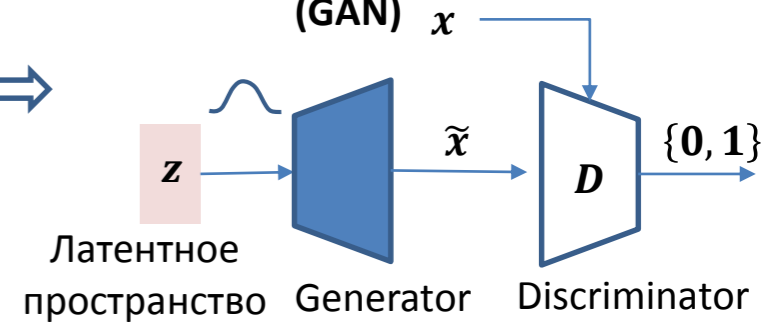
## Одноклассовая классификация (inpainting)



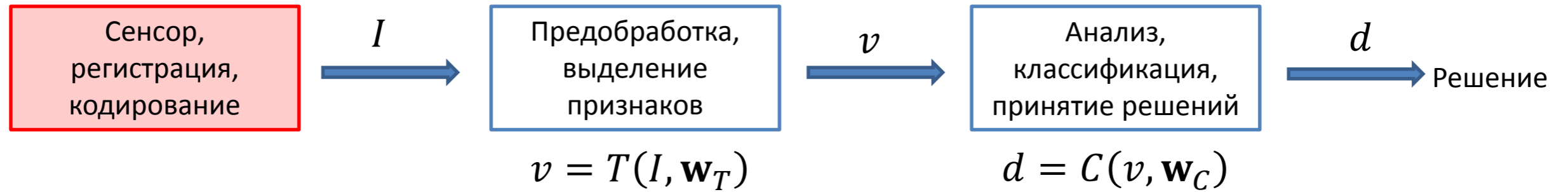
## Генерация Латентной моделью (inpainting)



## Генерация (GAN)



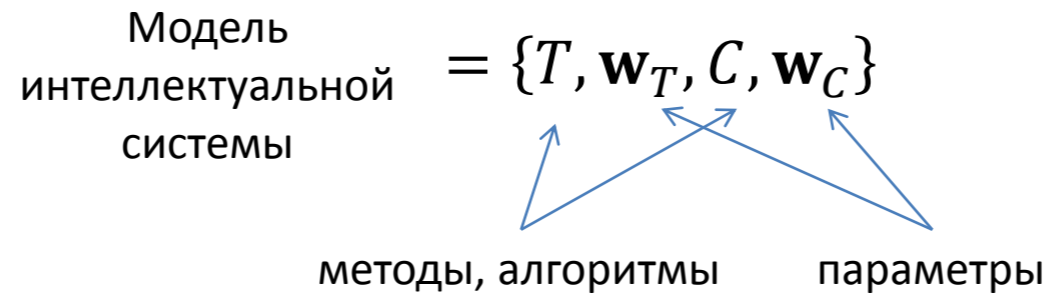
# Модель интеллектуальной системы



- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

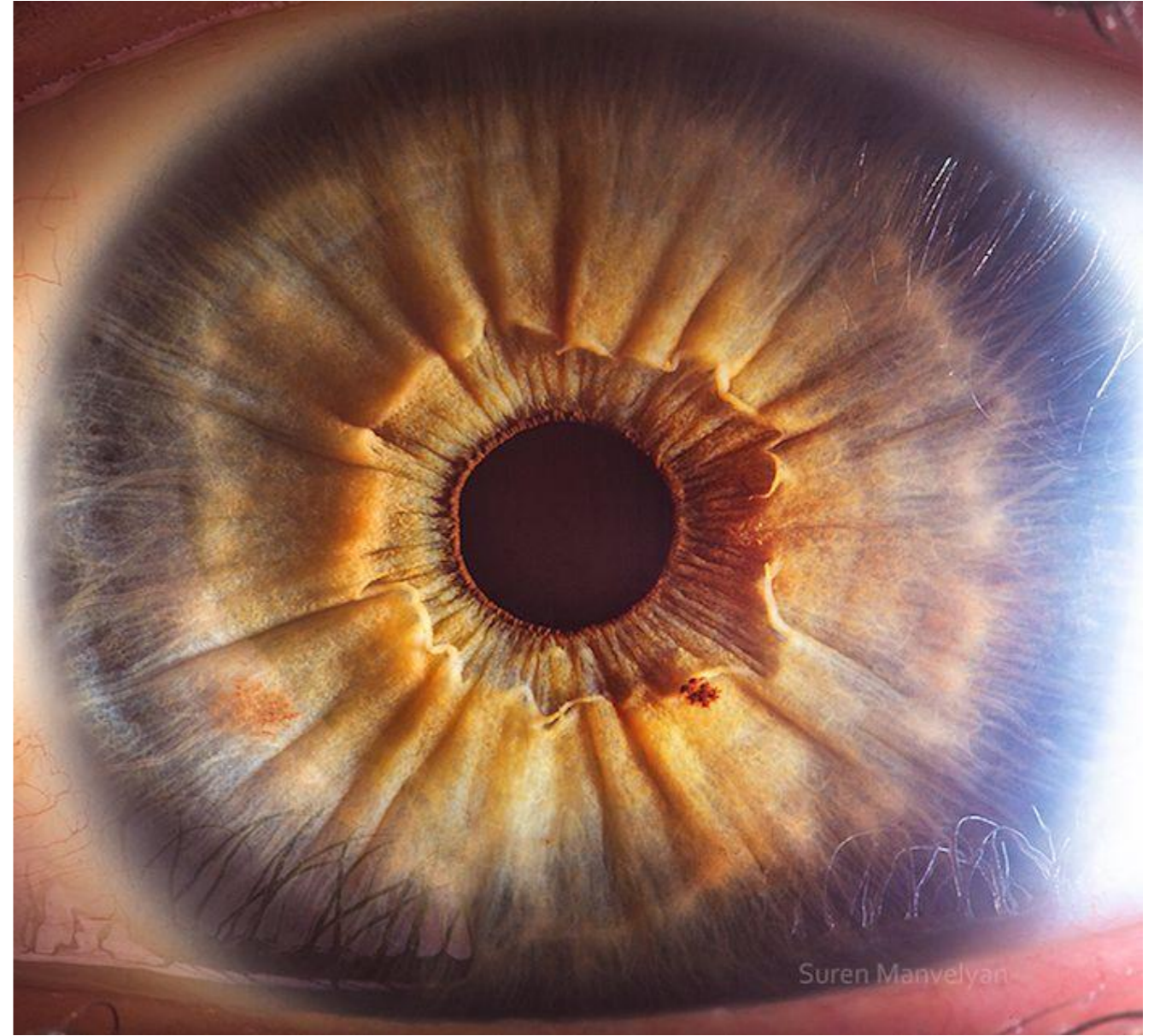
$$F(I, \mathbf{W}) = (C \circ T)(I, \mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T) = C(T(I, \mathbf{w}_T), \mathbf{w}_C)$$

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T\}$$



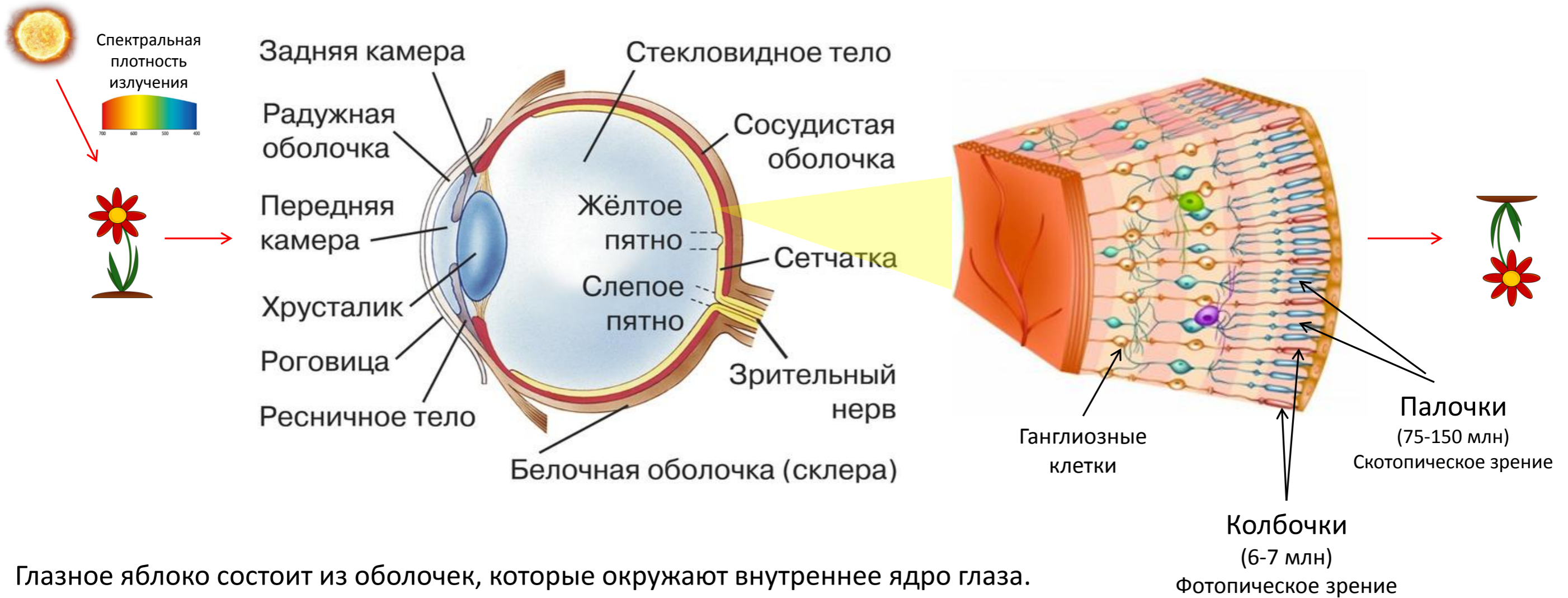
## Глаз

Через глаз поступает около 70-90 % информации из окружающего мира.



d=20 мм, масса: 7—8 г

# Глаз и сетчатка

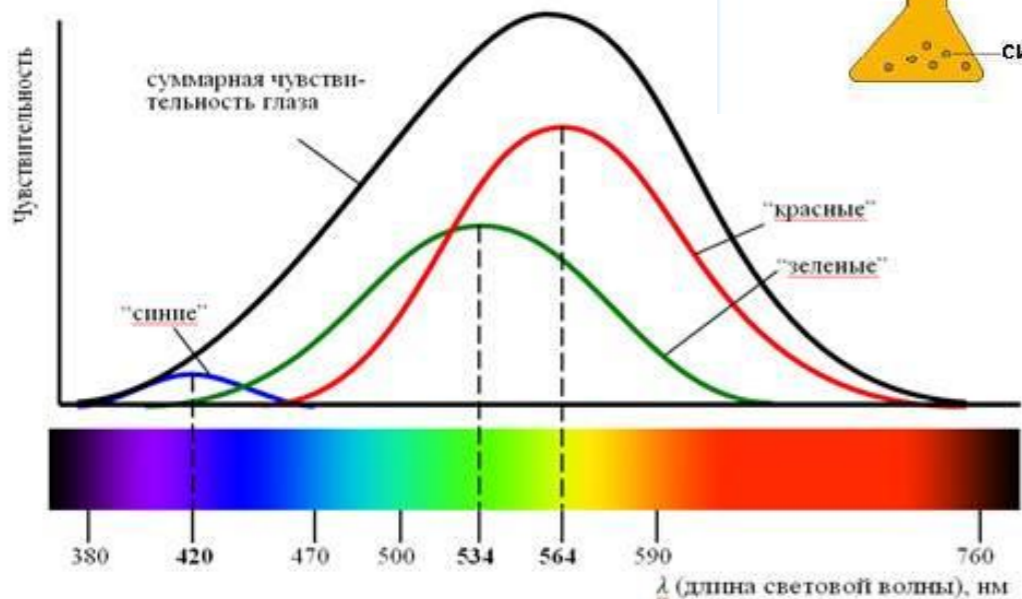
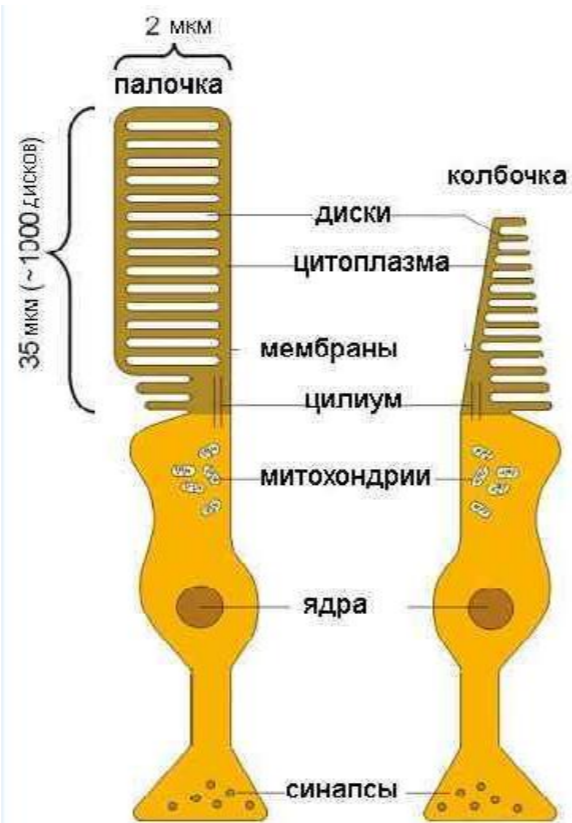
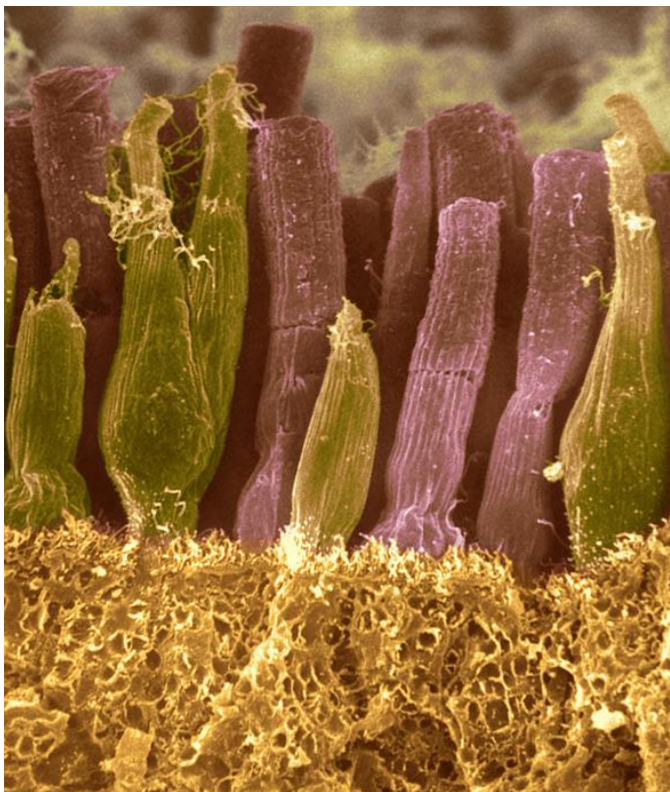


Глазное яблоко состоит из оболочек, которые окружают внутреннее ядро глаза.

Зрачок:  $d=2..8$  мм, управляется радужкой

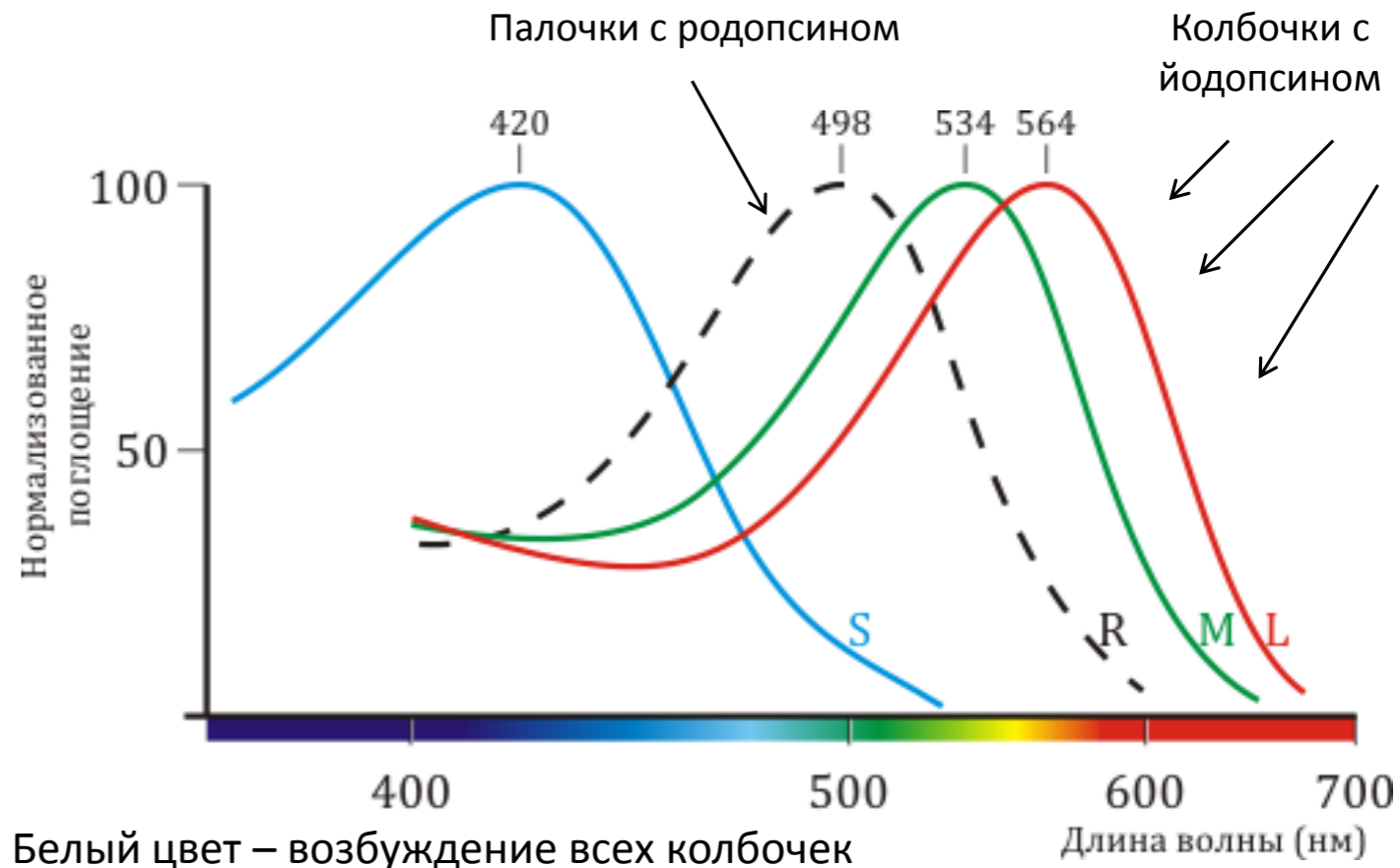
Хрусталик – линза,  $f = 14 .. 17$  мм, 60-70% из воды, ~6% из жиров, управляется ресничной мышцей, поглощает 8% света в видимом диапазоне, не пропускает коротковолновое излучение.

# Палочки и колбочки



**Ненормированная спектральная чувствительность рецепторов**

Земная атмосфера имеет окно прозрачности в диапазоне длин волн 300—1500 нм.



**Нормированная спектральная чувствительность рецепторов с различными пигментами**

Тип колбочек	Название	Диапазон	Максимум чувствительности <sup>[1][2]</sup>
S (OPN1SW) - "тритан", "цианолаб"	$\beta$	400–500 нм	420–440 нм
M (OPN1MW) - "дейтан", "хлоролаб"	$\gamma$	450–630 нм	534–545 нм
L (OPN1LW) - "протан", "эритролаб"	$\rho$	500–700 нм	564–580 нм

Палочки – свето-высокочувствительные, ночное зрение

Колбочки - цвето-высокочувствительные, дневное зрение

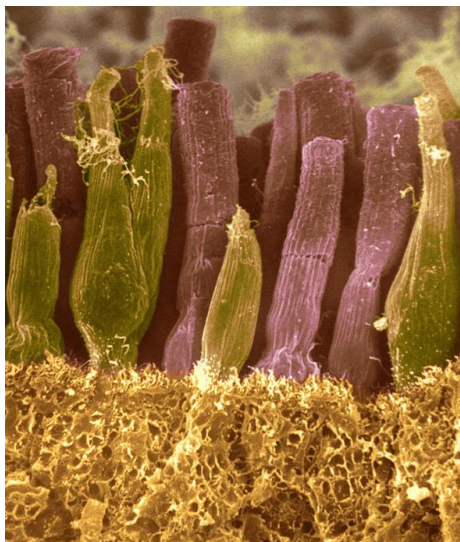
Порог зрительного ощущения составляет 100—200 фотонов в 1 секунду

# Палочки и колбочки

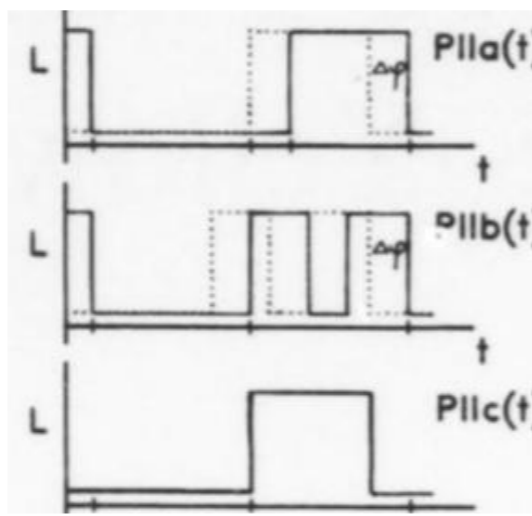
Динамический цветовой эффект Фехнера (1838 г.).

Иллюзия цвета, наблюдаемая **при мерцании яркости** падающего света, или при взгляде на быстро меняющиеся или движущиеся чёрно-белые области, вследствие различного времени реакции/адаптации различных типов колбочек на вспышки света. Длительность темного/светлого полей при их чередовании влияет на степень активации-восстановления различных типов колбочек по-разному.

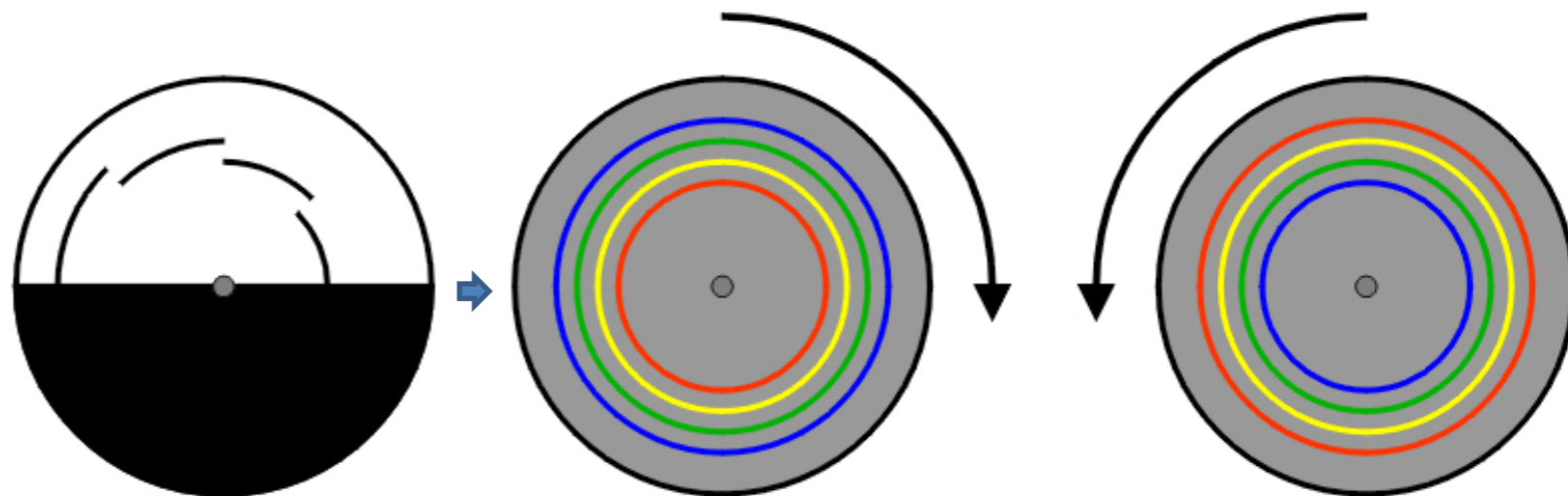
При вращении диска Бенхема против часовой стрелки, со скоростью 5-10 об./с внешнее кольцо кажется **красным**, среднее – **зеленым**, внутреннее **синим**. При вращении в противоположную сторону цвета меняются местами.



Изменение яркостных стимулов диска по времени



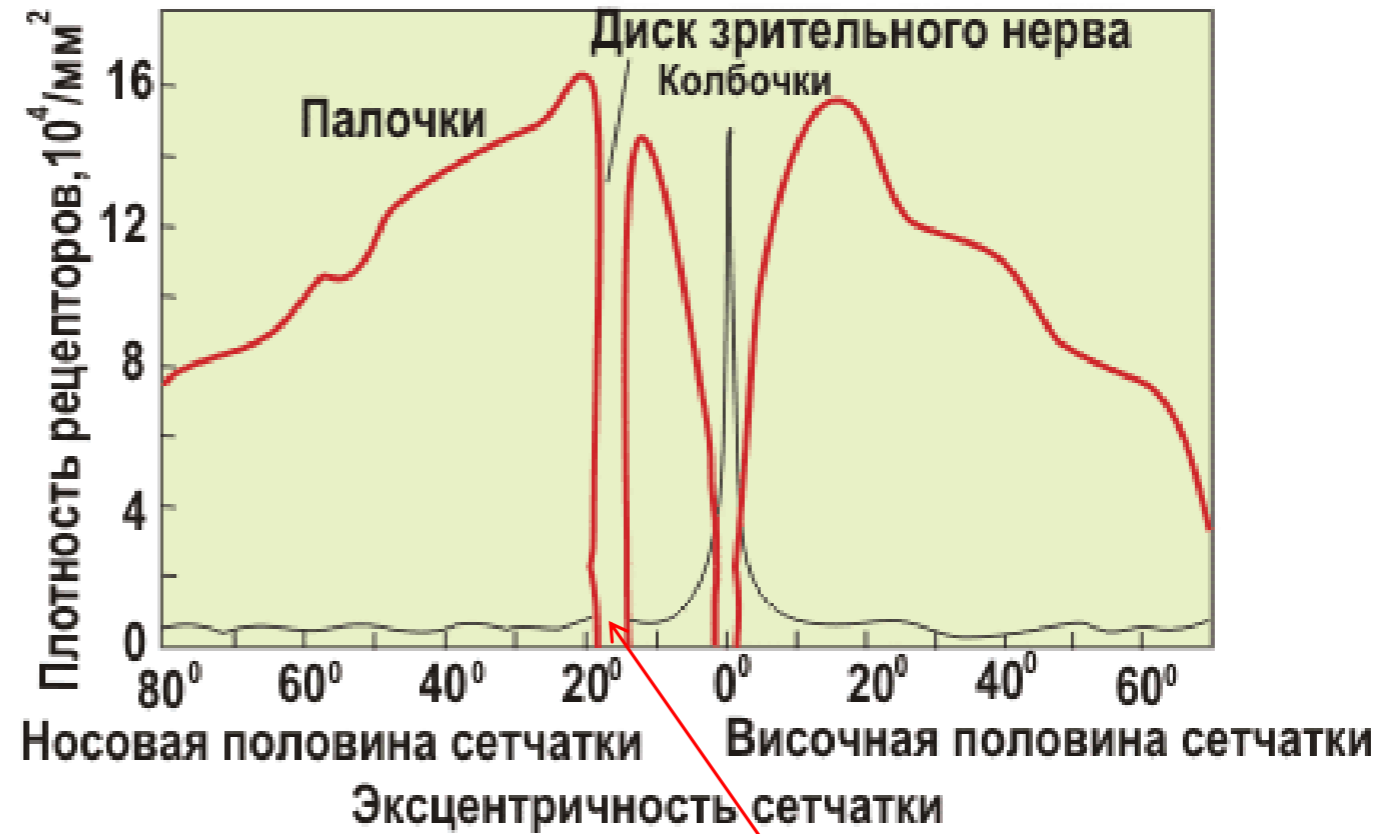
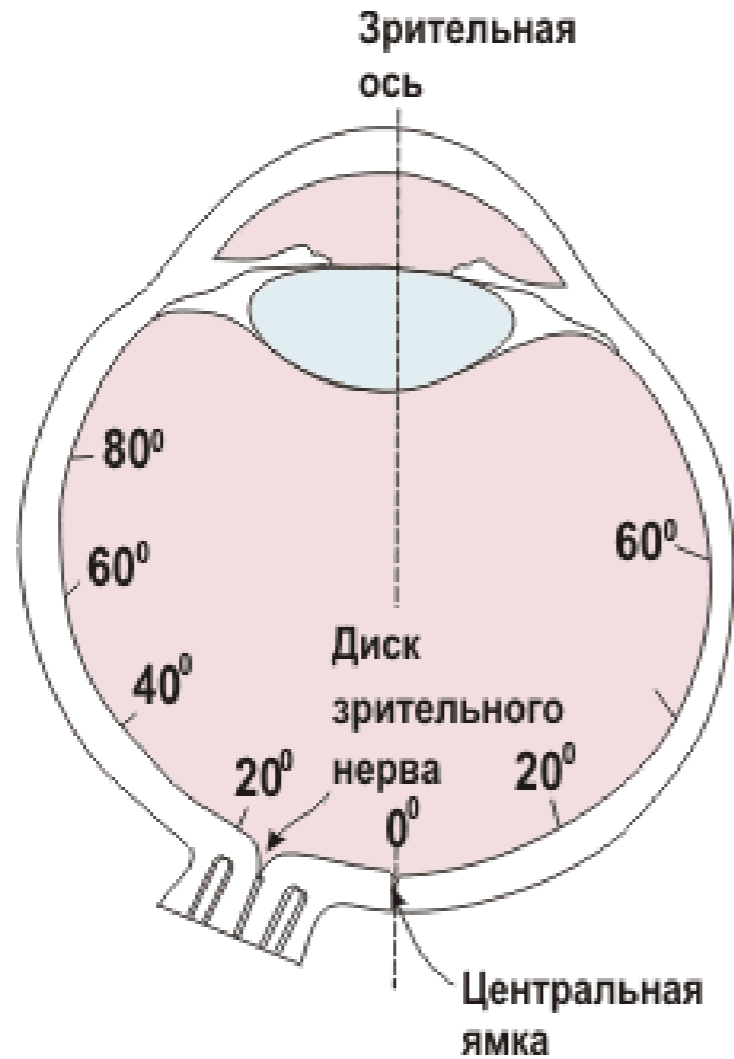
Диск Бенхема (1894 г.)



Schramme J. Changes in pattern induced flicker colors are mediated by the blue/yellow opponent process // Vision Research, 1992. 32 (11): 2129–2134.

<https://www.psy.ritsumei.ac.jp/akitaoka/benhamtop.jpg>

# Палочки и колбочки



# Динамический диапазон чувствительности глаза

Реакция глаза на изменение освещение является нелинейной.

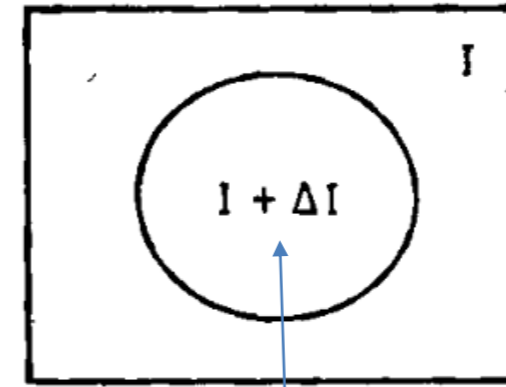
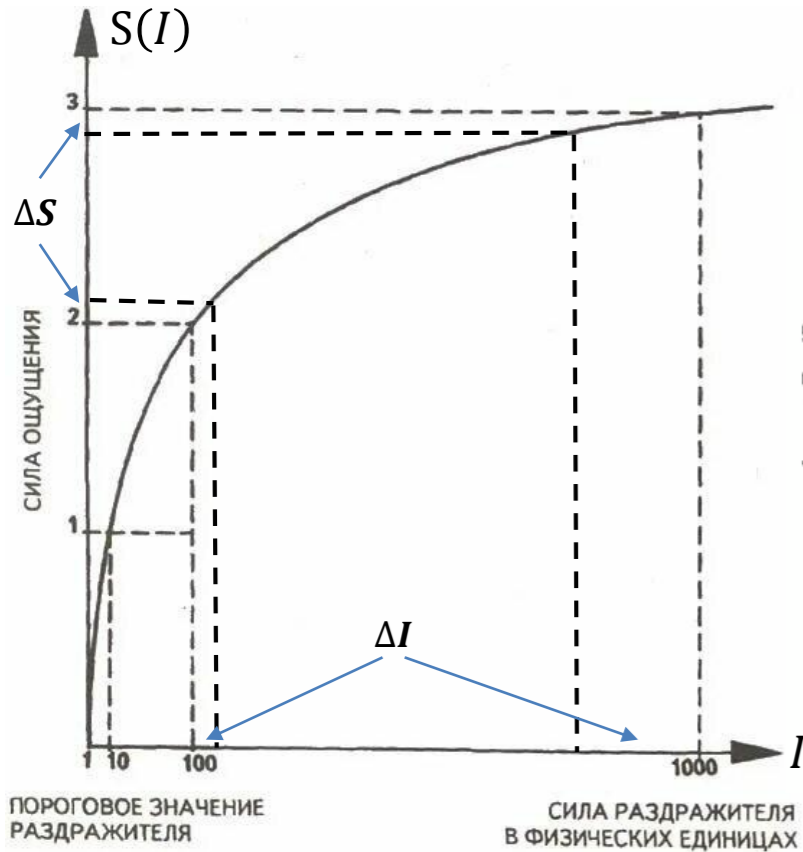
Минимально субъективно ощущаемое приращение  $\Delta S$  к фону яркости  $I$  достигается при некотором пороговом значении  $\Delta I$ . При увеличении  $I$  значение  $\Delta I$  растет пропорционально, так что отношение  $\frac{\Delta I}{I} \sim 0.02$  — **отношение Вебера** — константа в среднем диапазоне яркостей.

Пороговое минимально различимое ощущение яркости:  $dS(I) \sim \frac{dI}{I}$ .

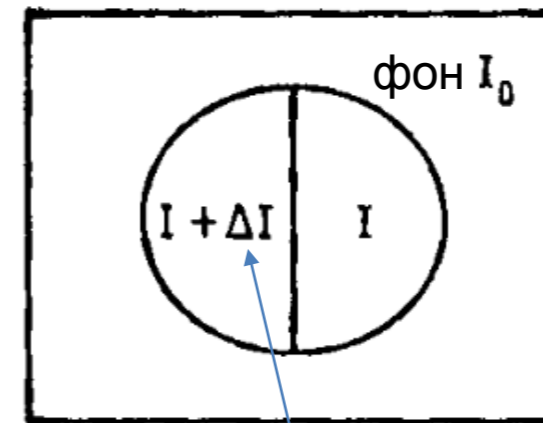
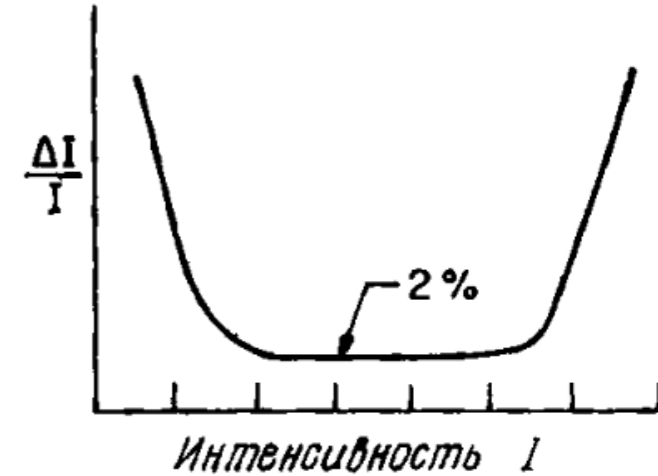
Субъективно-воспринимаемый уровень яркости

(**Закон Вебера — Фехнера**, 1860 г.):  $S(I) \sim \int \frac{dI}{I} \sim K \log(I) + C \Rightarrow \Delta S = K \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$ .

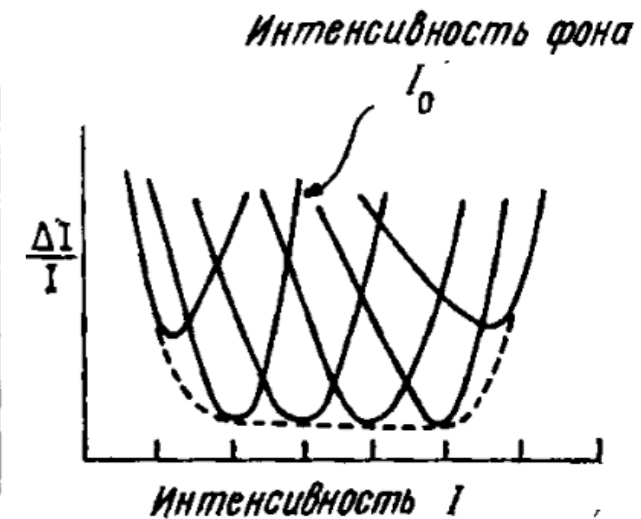
**Динамический диапазон** — максимальная величина  $\Delta S = S_{max} - S_{min}$  в логарифмическом масштабе, **контрастность Вебера**:  $\frac{I_{max} - I_0}{I_0}$  — в исходном.



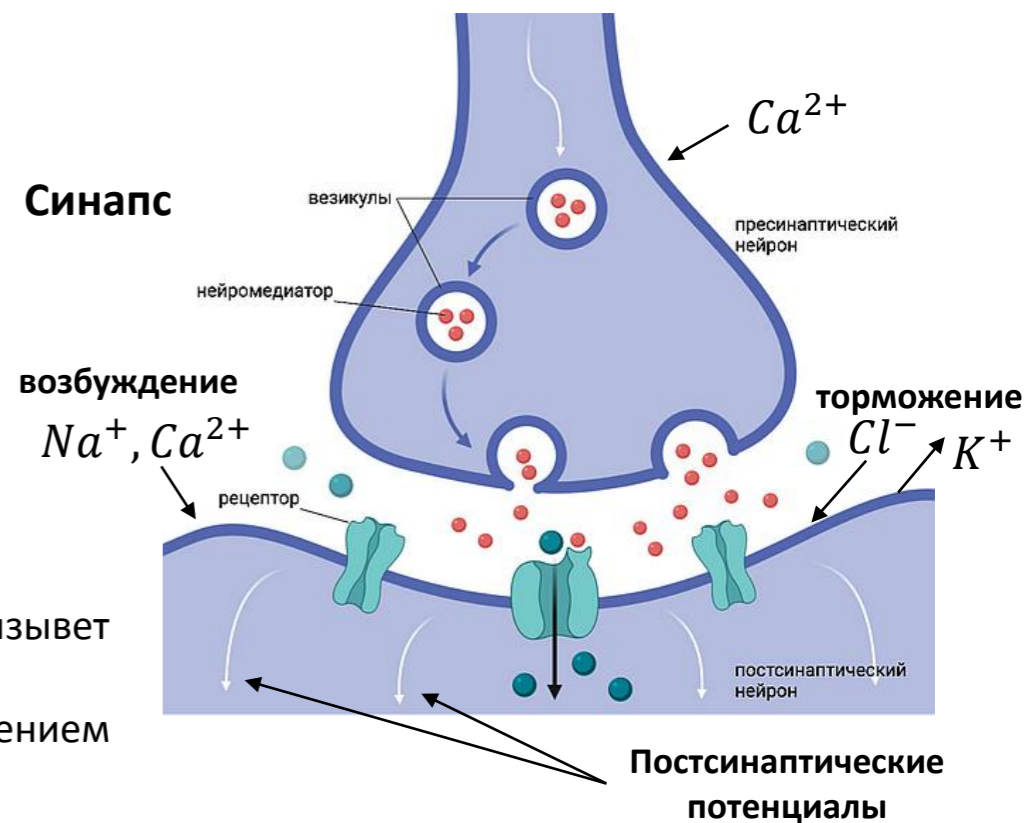
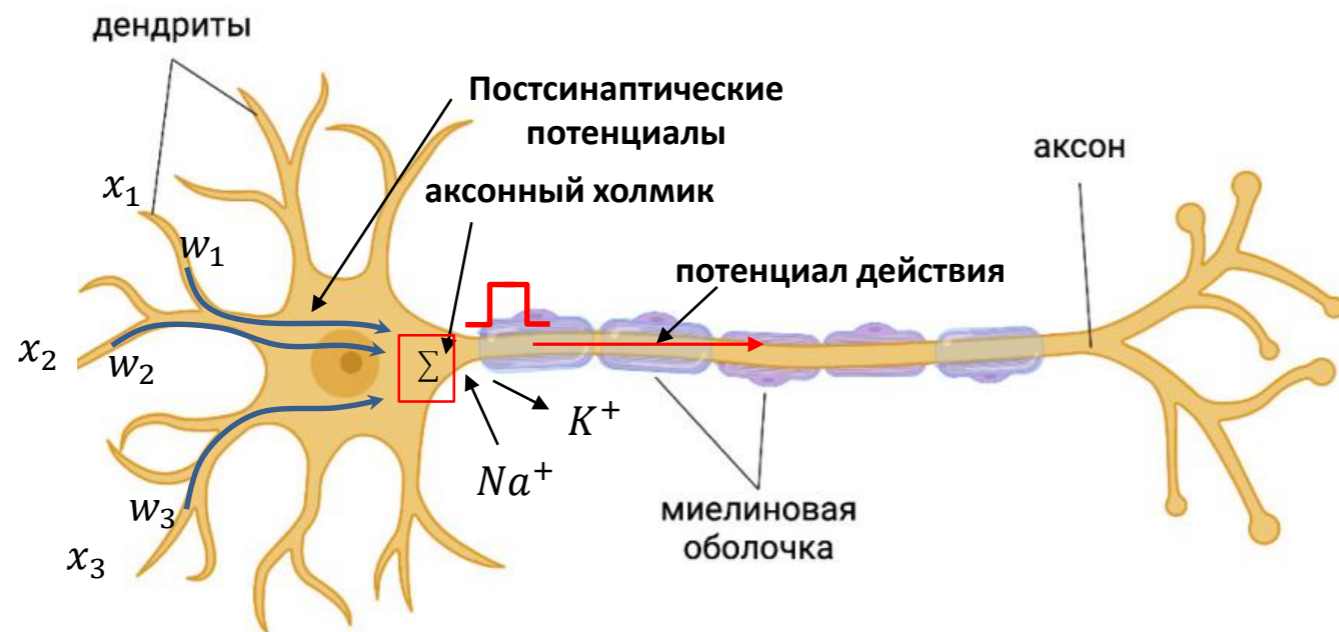
Минимально субъективно ощущаемая яркость



Минимально субъективно ощущаемая разность

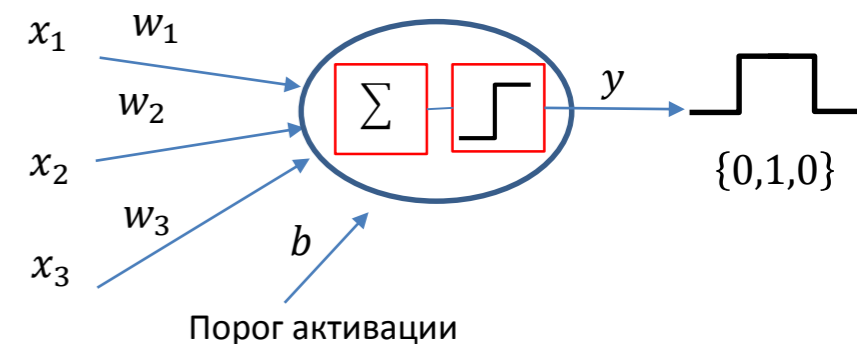


# Нейронная клетка и синапс



- **Потенциал действия** по аксону достигает пресинаптического окончания нейрона и вызывает деполяризацию мембраны:  $Ca^{2+}$  входит в клетку.
- $Ca^{2+}$  стимулирует слияние и открытие везикул в **синаптическую щель** с высвобождением **нейромедиаторов**.
- **Нейромедиаторы** диффундируют через щель (20-40 нм) к постсинаптическому нейрону и связываются с **рецептором**. Это открывает ионные каналы в мембране в зависимости от типа нейромедиаторов.
- Если нейромедиатор – **возбуждающий**, открываются каналы для входа в клетку  $Na^+$ ,  $Ca^{2+}$ , которые увеличивают локальный потенциал мембраны (деполяризация).
- Если нейромедиатор – **тормозной**, открываются каналы для входа  $Cl^-$  / выхода  $K^+$ , которые сильнее уменьшают локальный потенциал мембраны (гиперполяризация).
- В **аксонном холмике** интегрируются сигналы с мембраны от дендритов по времени. Если сумма сигналов выше порога, то генерируется **потенциал действия** (массовый вход  $Na^+$  с последующим массовым выходом  $K^+$  - импульс), который распространяется по **аксону**.
- Диффузия или обратный захват нейромедиатора пресинаптическим нейроном **останавливает активацию** нейрона и генерацию **потенциала действия**.

## Модель нейрона





яркий точечный свет  
(точечный стимул)

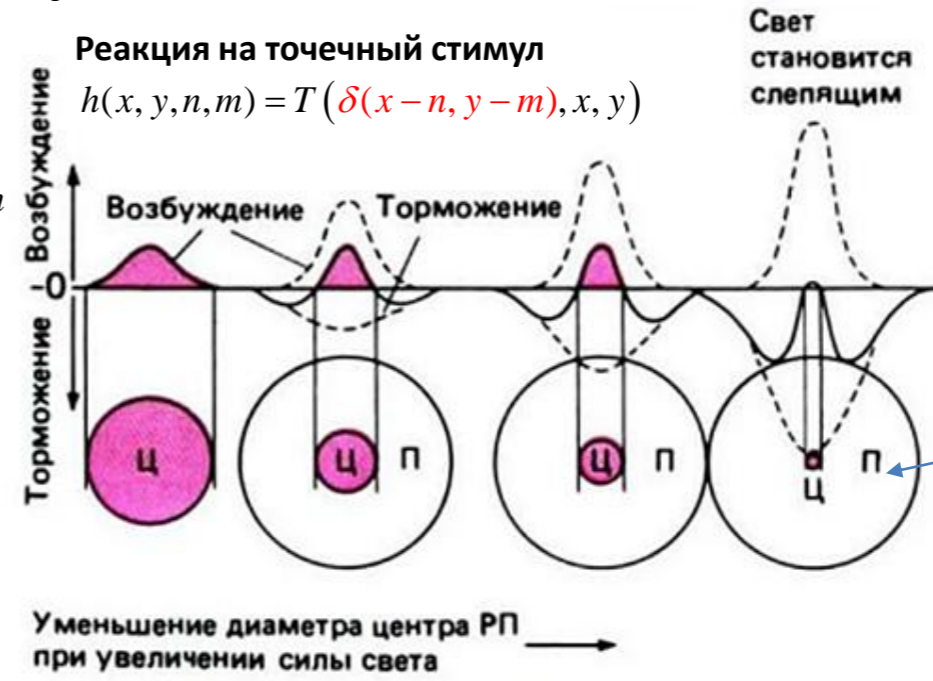
$$\delta(x, y)$$

## Первичная обработка изображения в сетчатке

Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dn dm$$

(яркий точечный свет)



Реакции от рецептивного поля ганглиозных клеток (пространственное распределение мембранного потенциала)

Зрительный нерв

Нейроны 3-го порядка:  
ганглиозные клетки

Нейроны 2-го порядка:  
биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка:  
палочки и колбочки

Пигментный эпителий

Возбуждение

Направление световых лучей

Центральная ямка      Периферия

яркий точечный свет  
(точечный стимул)

$$\delta(x, y)$$

# Первичная обработка изображения в сетчатке

Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dn dm$$

(яркий точечный свет)

Зрительный нерв

Нейроны 3-го порядка:  
ганглиозные клетки

Нейроны 2-го порядка:  
биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка:  
палочки и колбочки

Пигментный эпителий

Центральная ямка

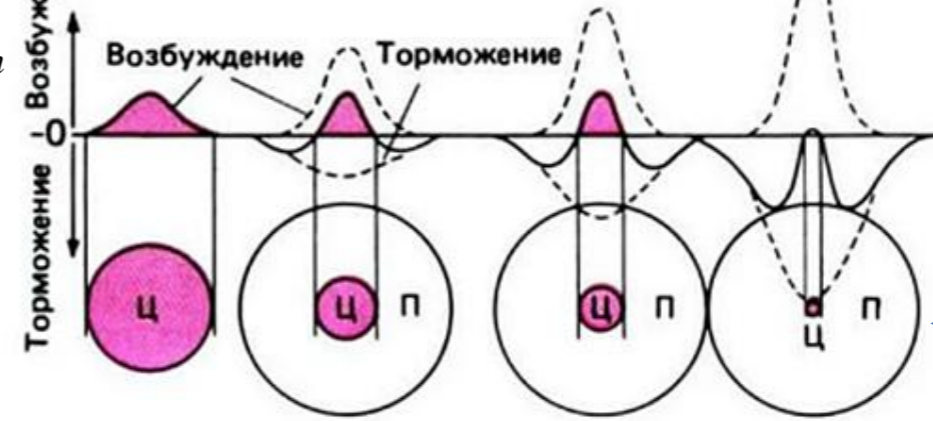
Периферия

Возбуждение

Направление световых лучей

Реакция на точечный стимул

$$h(x, y, n, m) = T(\delta(x-n, y-m), x, y)$$

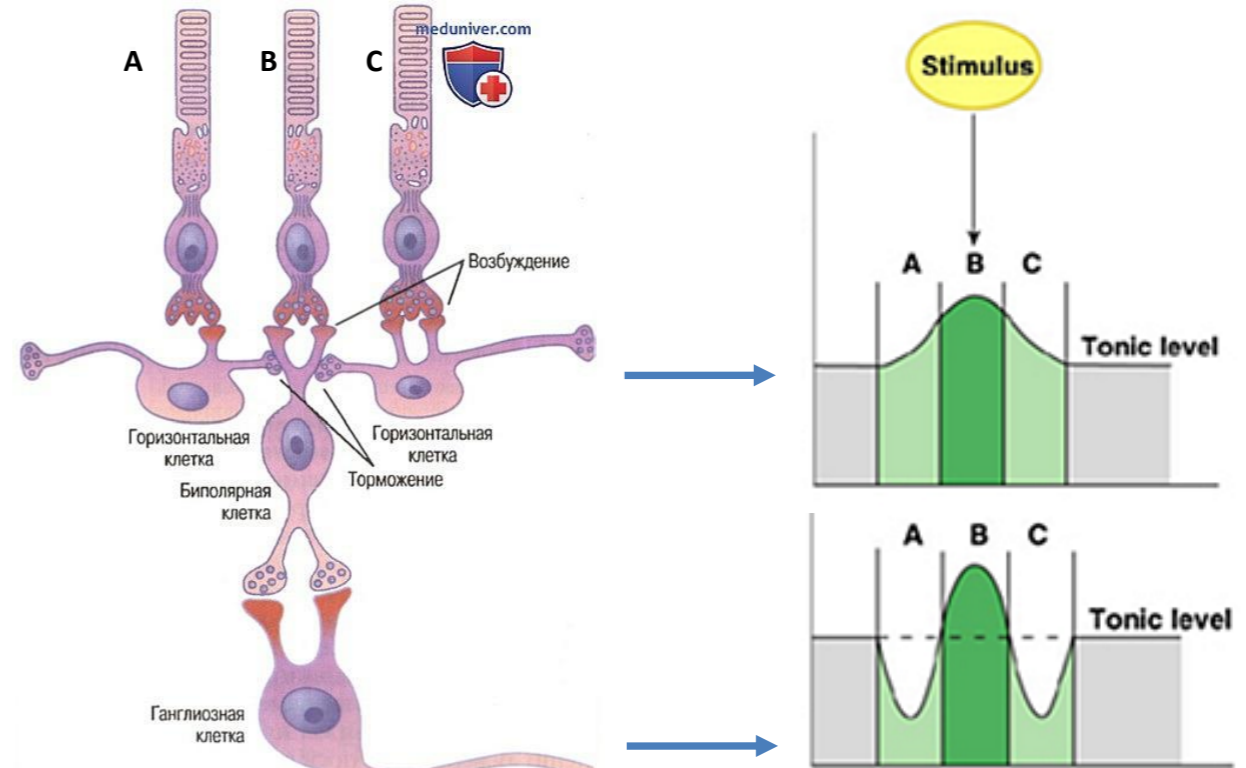


Свет становится слепящим

Активации рецептивного поля ганглиозных клеток

Уменьшение диаметра центра РП при увеличении силы света

## Схема латерального торможения



яркий точечный свет  
(точечный стимул)  $\delta(x, y)$

# Первичная обработка изображения в сетчатке

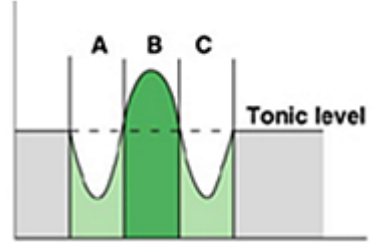
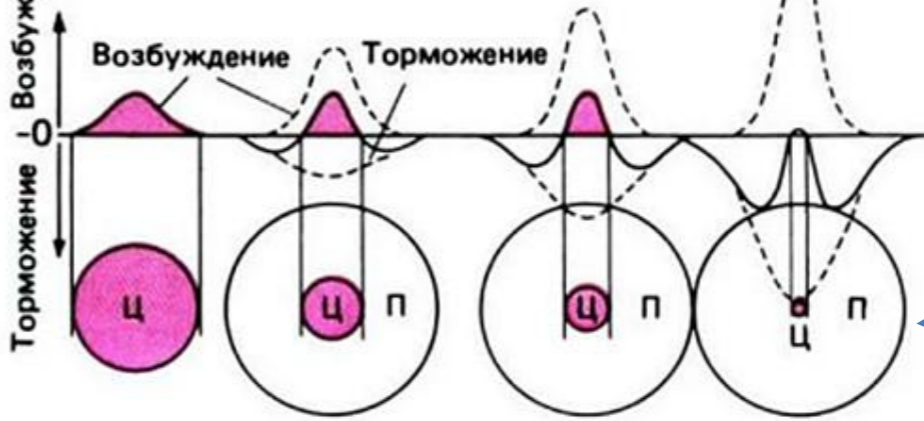
Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dn dm$$

(яркий точечный свет)

Реакция на точечный стимул

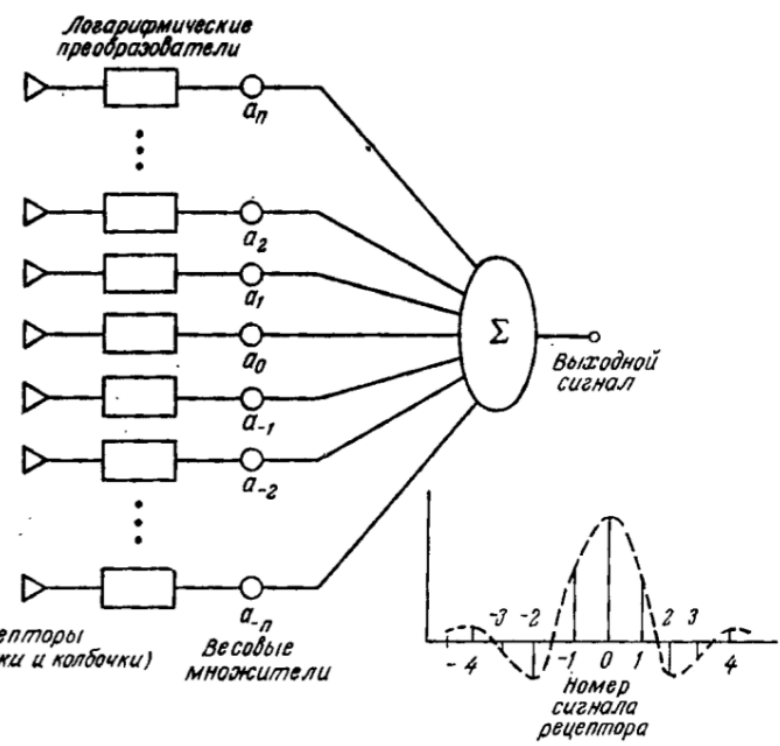
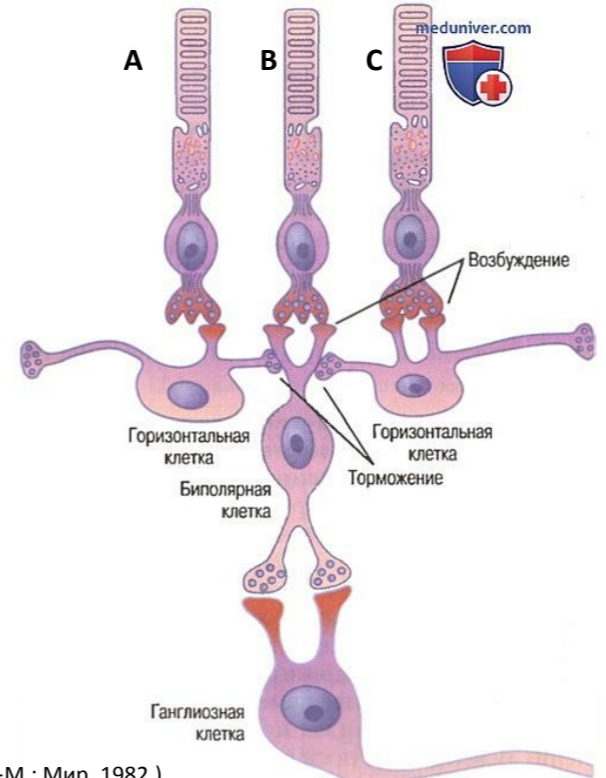
$$h(x, y, n, m) = T(\delta(x-n, y-m), x, y)$$



Активации рецептивного поля ганглиозных клеток

Уменьшение диаметра центра РП при увеличении силы света

## Модель латерального торможения



Нейроны 3-го порядка: ганглиозные клетки

Нейроны 2-го порядка: биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка: палочки и колбочки

Пигментный эпителий

Центральная ямка      Периферия

Возбуждение

Направление световых лучей

Зрительный нерв

яркий точечный свет  
(точечный стимул)

$$\delta(x, y)$$

# Первичная обработка изображения в сетчатке

Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dn dm$$

(яркий точечный свет)

Зрительный нерв

Нейроны 3-го порядка:  
ганглиозные клетки

Нейроны 2-го порядка:  
биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка:  
палочки и колбочки

Пигментный эпителий

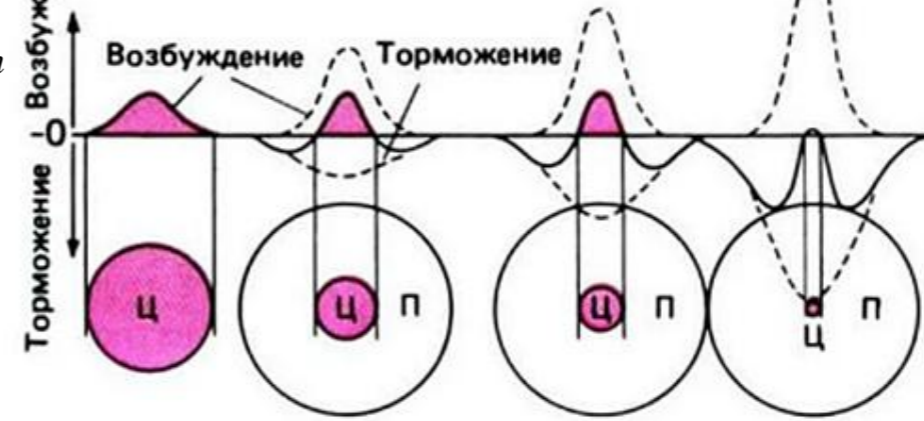
Центральная ямка

Периферия

Возбуждение

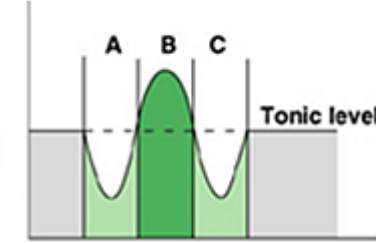
Направление световых лучей

Реакция на точечный стимул  
 $h(x, y, n, m) = T(\delta(x-n, y-m), x, y)$

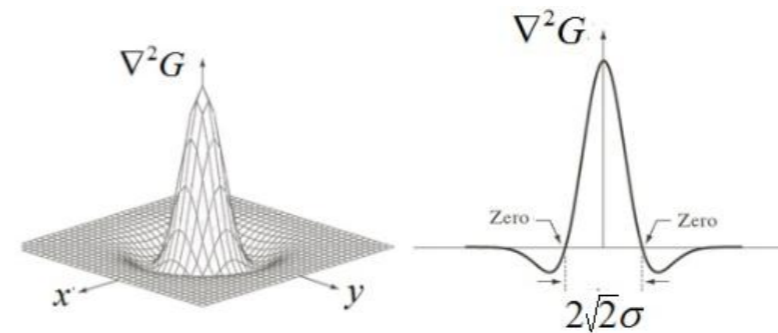
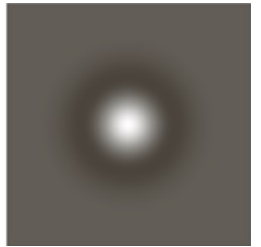


Свет становится слепящим

Уменьшение диаметра центра РП при увеличении силы света



Активации рецептивного поля ганглиозных клеток



$$h(x, y) = \nabla^2 G(x, y) = \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \right] e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

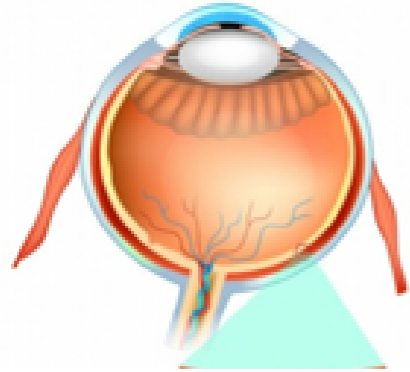
0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Внимание на границы

Модель рецептивного поля ганглиозных клеток

яркий точечный свет  
(точечный стимул)

$$\delta(x, y)$$



# Первичная обработка изображения в сетчатке

Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dn dm$$

(яркий точечный свет)

Зрительный нерв

Нейроны 3-го порядка:  
ганглиозные клетки

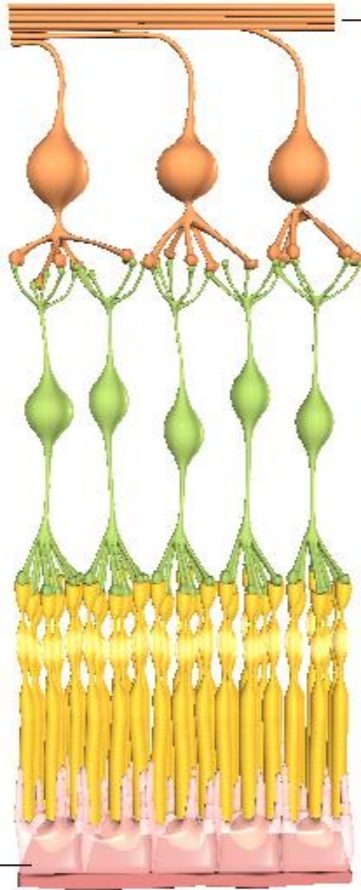
Нейроны 2-го порядка:  
биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка:  
палочки и колбочки

Пигментный эпителий

Центральная ямка

Периферия

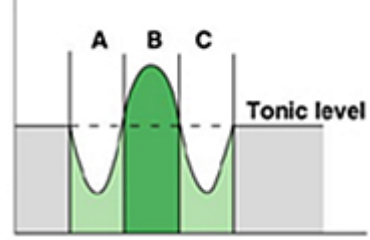
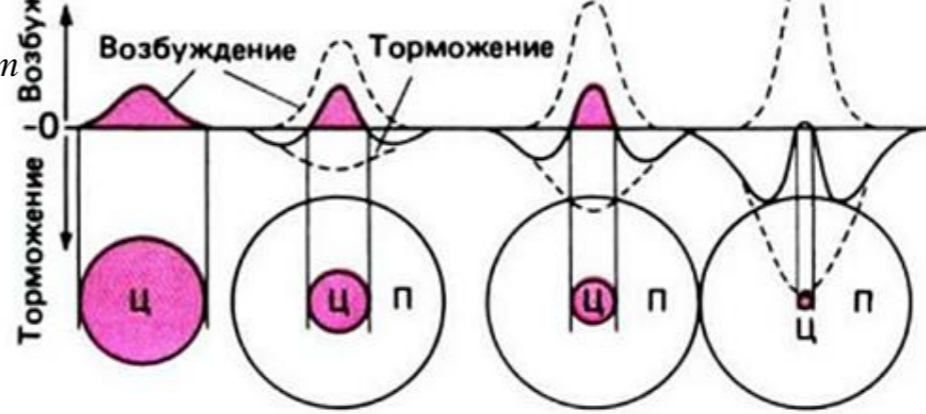


Возбуждение

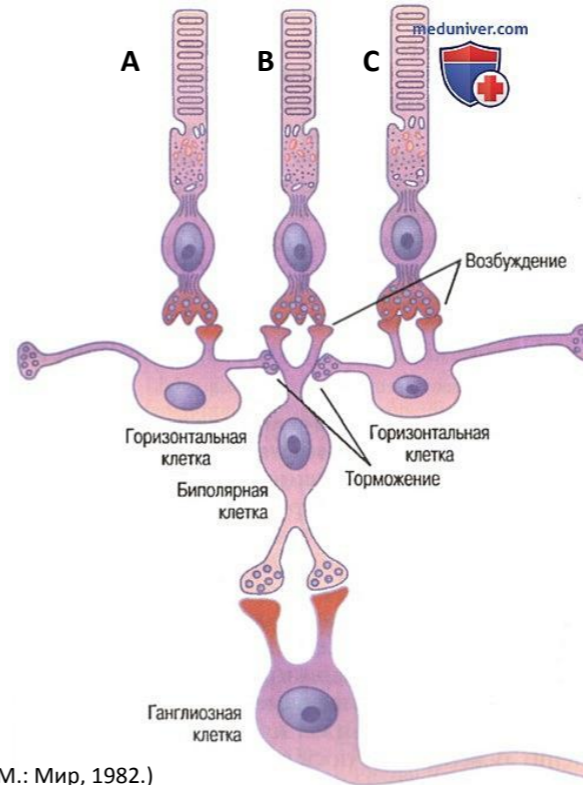
Направление световых лучей

Реакция на точечный стимул

$$h(x, y, n, m) = T(\delta(x-n, y-m), x, y)$$



Уменьшение диаметра центра РП при увеличении силы света

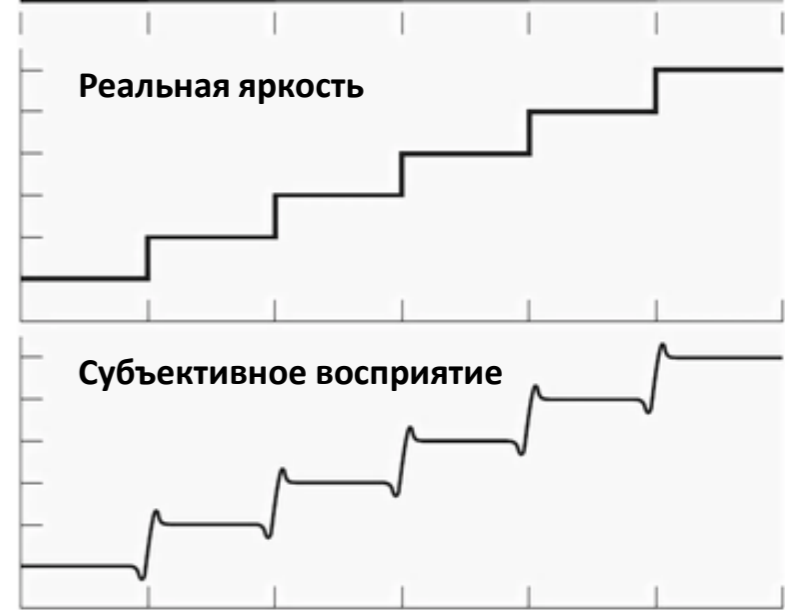


Полосы Маха



Реальная яркость

Субъективное восприятие



Внимание на границы

яркий точечный свет  
(точечный стимул)

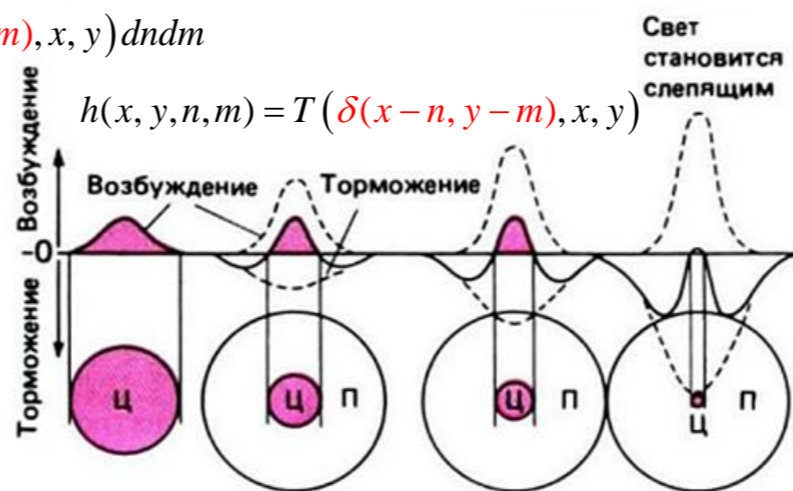
$$\delta(x, y)$$

# Первичная обработка изображения в сетчатке и зрительной коре мозга

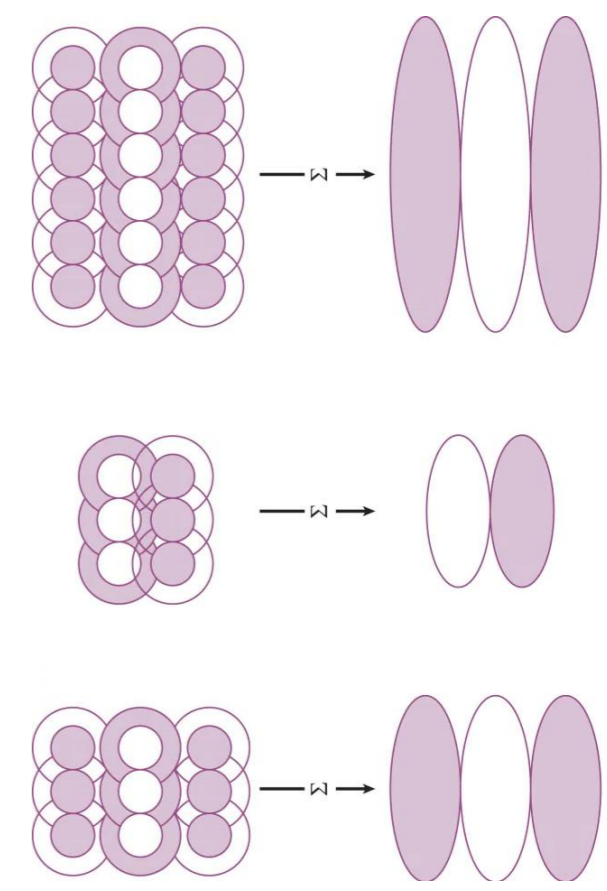
Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dndm$$

Реакция на точечный стимул



Композиция активаций полей ганглиозных клеток - полосовидное рецептивное поле клетки зрительной коры



Нейроны 3-го порядка: ганглиозные клетки

Зрительный нерв

Нейроны 2-го порядка: биполярные клетки

Возбуждение

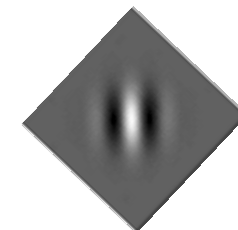
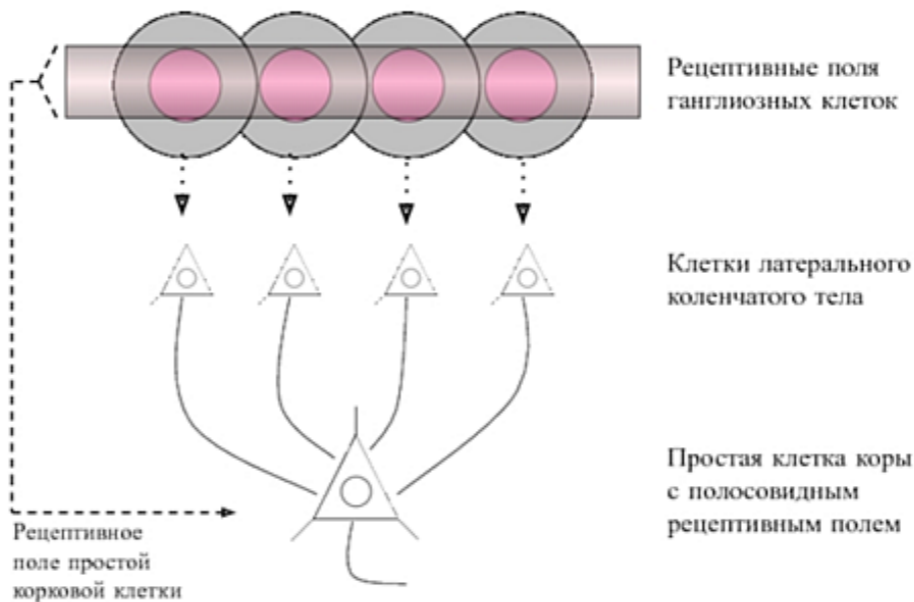
Нейроны 1-го порядка: палочки и колбочки

Направление световых лучей

Пигментный эпителий

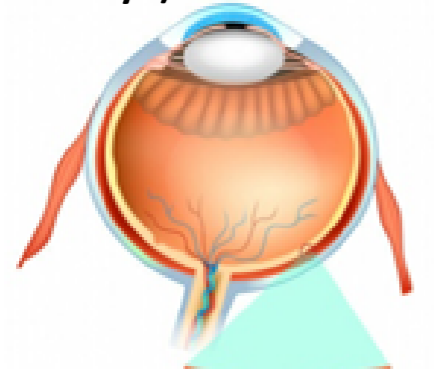
Центральная ямка

Периферия



# Первичная обработка изображения в сетчатке и зрительной коре мозга

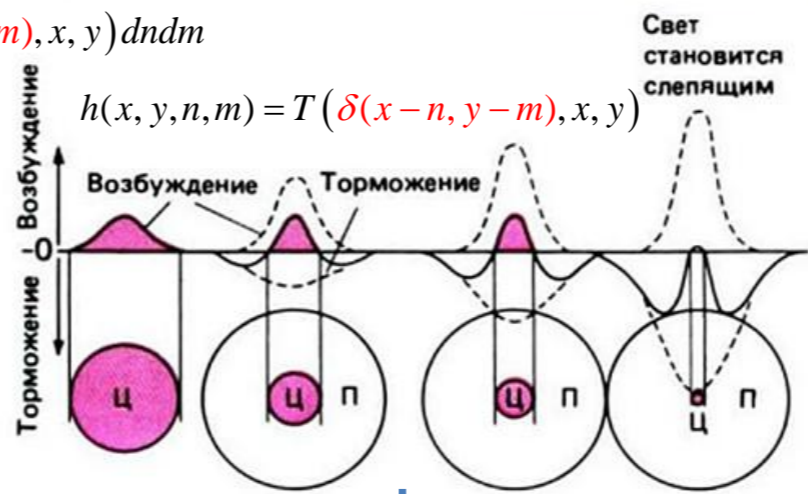
яркий точечный свет  
(точечный стимул)  $\delta(x, y)$



Изображение на сетчатке – комбинация активаций рецептивных полей

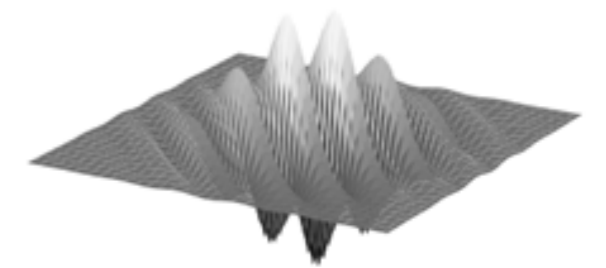
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T(\delta(x-n, y-m), x, y) dndm$$

Реакция на точечный стимул



Модель рецептивного полосовидного поля клетки зрительной коры  
Оконное преобразования Фурье (функция Габора)

$$h(x, y) = e^{-\pi[a^2(x-x_0)^2 + b^2(y-y_0)^2]} * e^{-2\pi i[k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0)]}$$



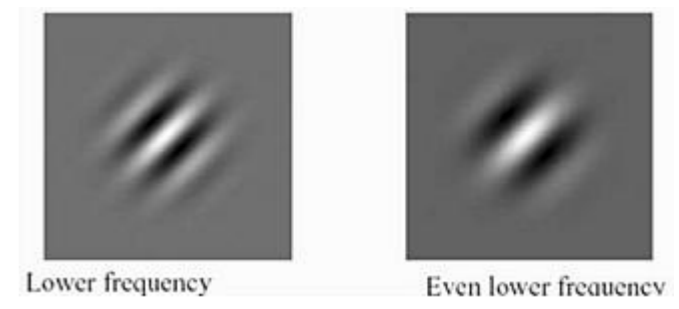
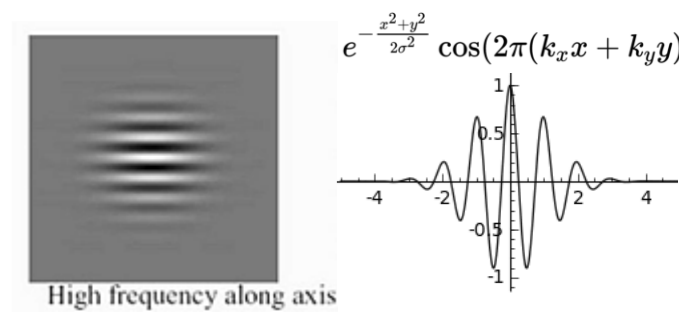
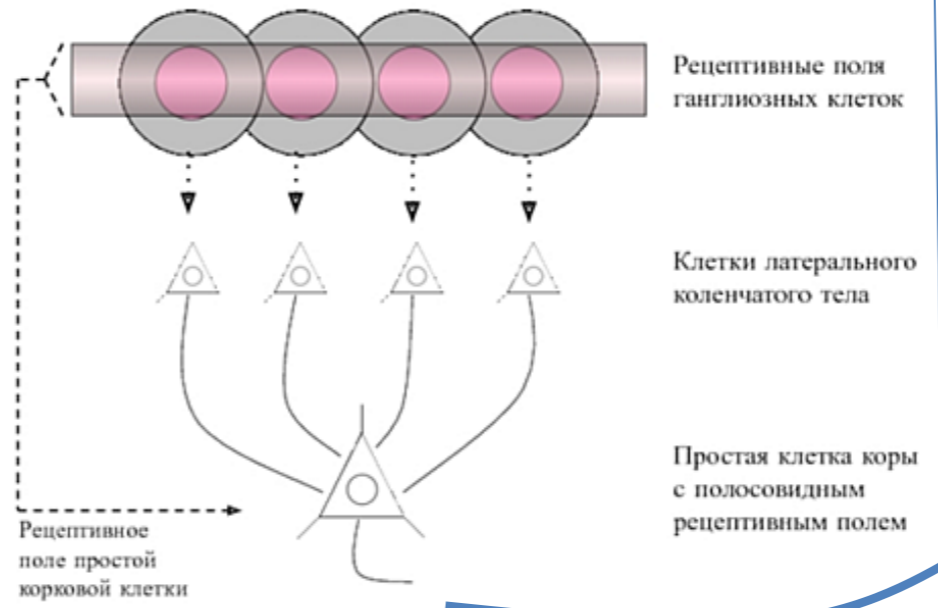
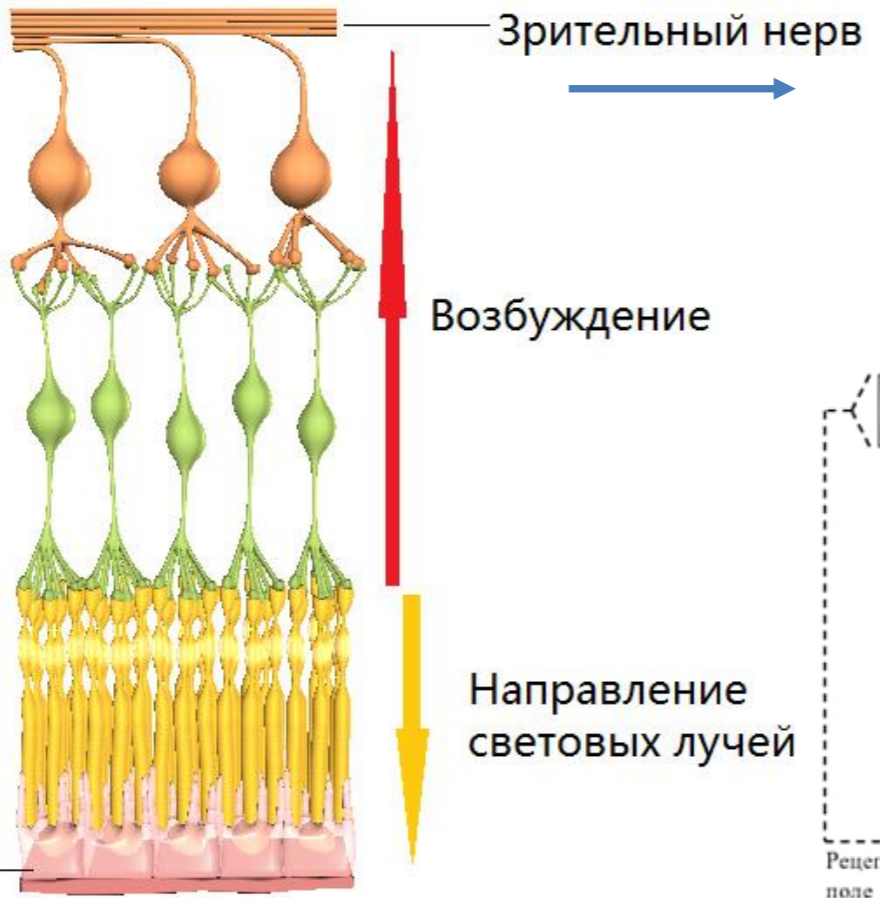
Нейроны 3-го порядка: ганглиозные клетки

Нейроны 2-го порядка: биполярные клетки

Нейроны 1-го порядка: палочки и колбочки

Пигментный эпителий

Центральная ямка      Периферия

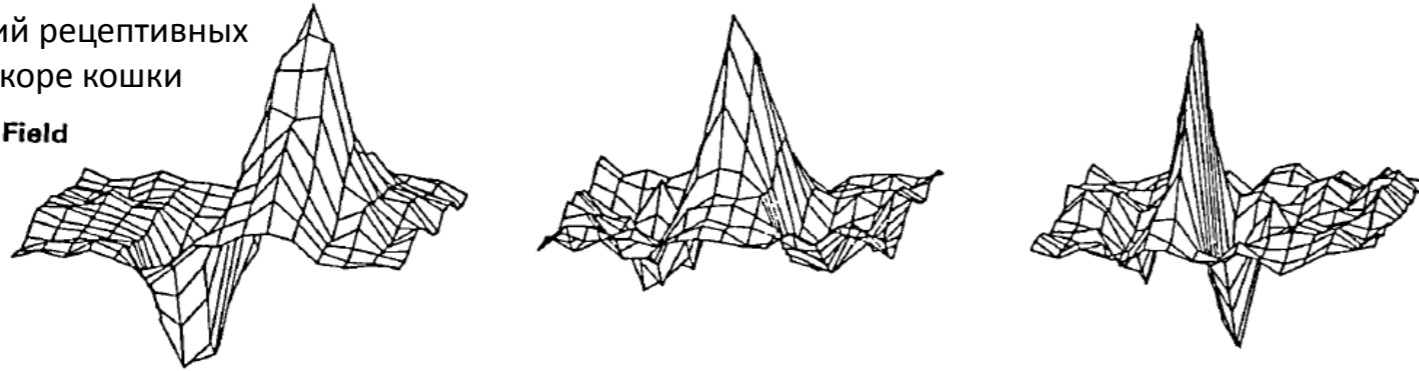


Внимание на ориентацию границ

# Математические модели рецептивных полей клетки зрительной коры мозга

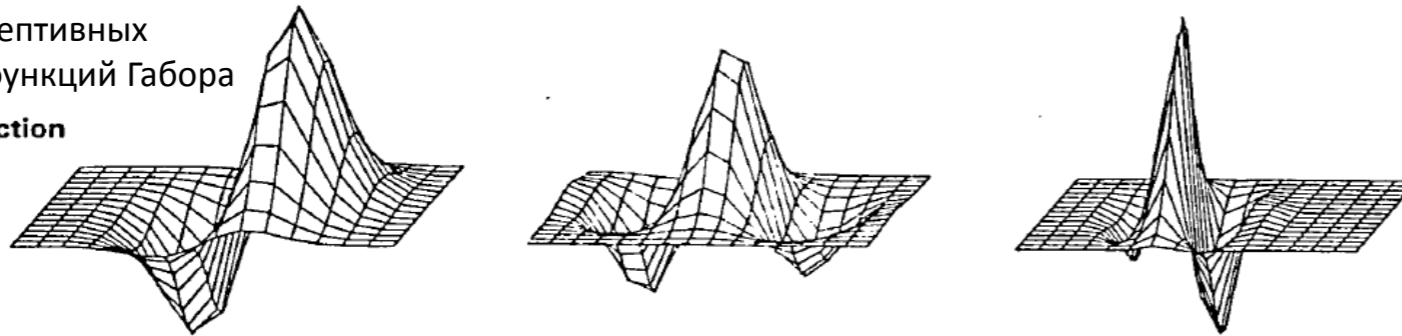
Измерения активаций рецептивных полей в зрительной коре кошки

**2D Receptive Field**



Аппроксимация рецептивных полей семейством функций Габора

**2D Gabor Function**



Разностная ошибка аппроксимации

**Difference**



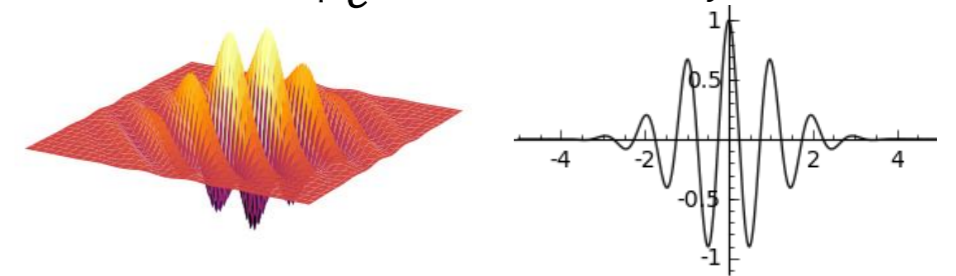
J. Daugman. Uncertainty Relation for Resolution in Space, Spatial Frequency and Orientation Optimised by Two-Dimensional Visual Cortical Filters // Journal of the Optical Society of America, 1985, vol. 2, pp. 1160-1169

$$e^{-\pi[a^2x^2+b^2y^2]} e^{-2\pi i[k_x x]} \approx e^{-\pi[a^2x^2+b^2y^2]} (1 - i2\pi k_x x - 2(\pi k_x)^2 x^2) =$$

$$= \left(1 - \frac{k_x^2 \pi}{a^2}\right) e^{-\pi[a^2x^2+b^2y^2]} - \frac{k_x^2}{2a^4} \nabla_x \nabla_x e^{-\pi[a^2x^2+b^2y^2]} + i \frac{k_x}{a^2} \nabla_x e^{-\pi[a^2x^2+b^2y^2]}$$

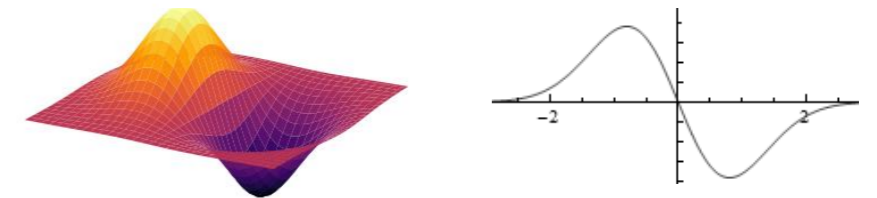
Оконное преобразование Фурье  
(Функция Габора)

$$e^{-\pi[a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2]} * e^{-2\pi i[k_x(x-x_0)+k_y(y-y_0)]}$$



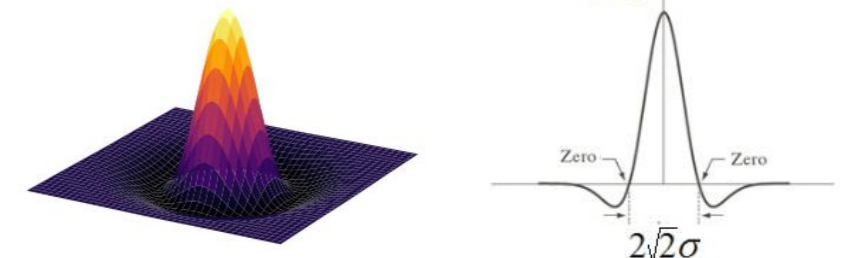
Градиент функции Гаусса

$$\nabla G(x, y) = - \left[ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \right]$$



Лапласиан функции Гаусса

$$\nabla^2 G(x, y) = \left[ \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

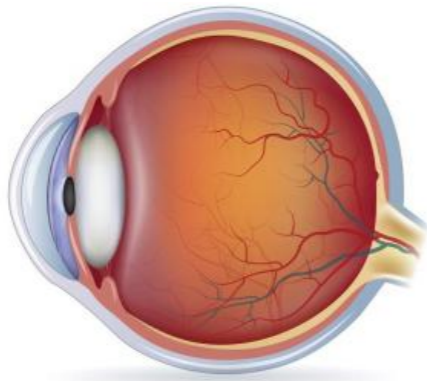


# Выделение признаков зрительной системой.

Фильтрация значимых признаков  
(канальный механизм внимания)

$f(x, y, c)$  - проекции поля  $I(x, y)$  на семейство разностных фильтров  $T_c(\delta(x - n, y - m), x, y)$  :

$I(x, y)$



$f(x, y, c)$

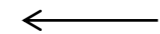
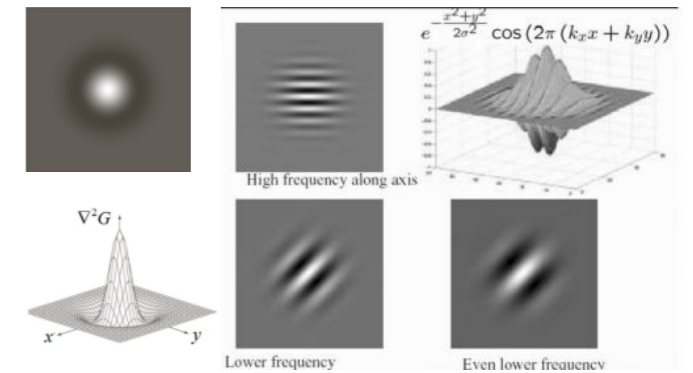


Пороговая активация



$$f(x, y, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T_c(\delta(x - n, y - m), x, y) dn dm$$

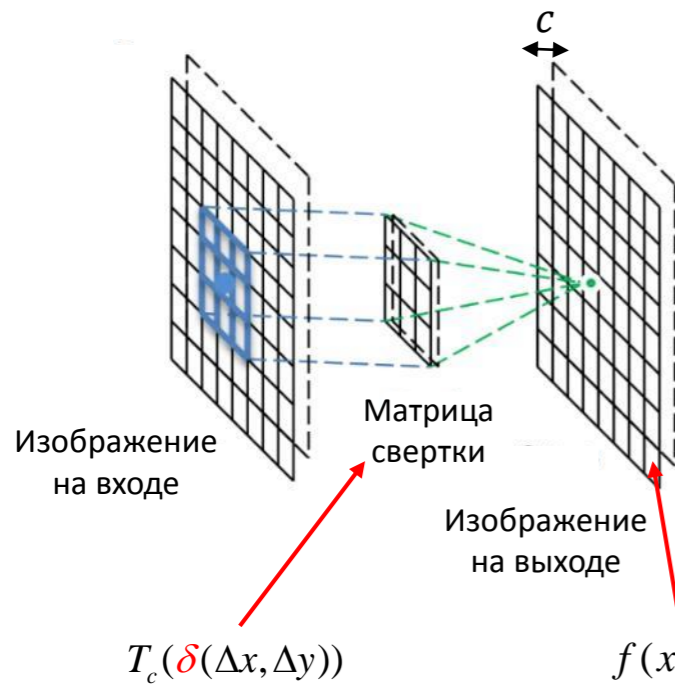
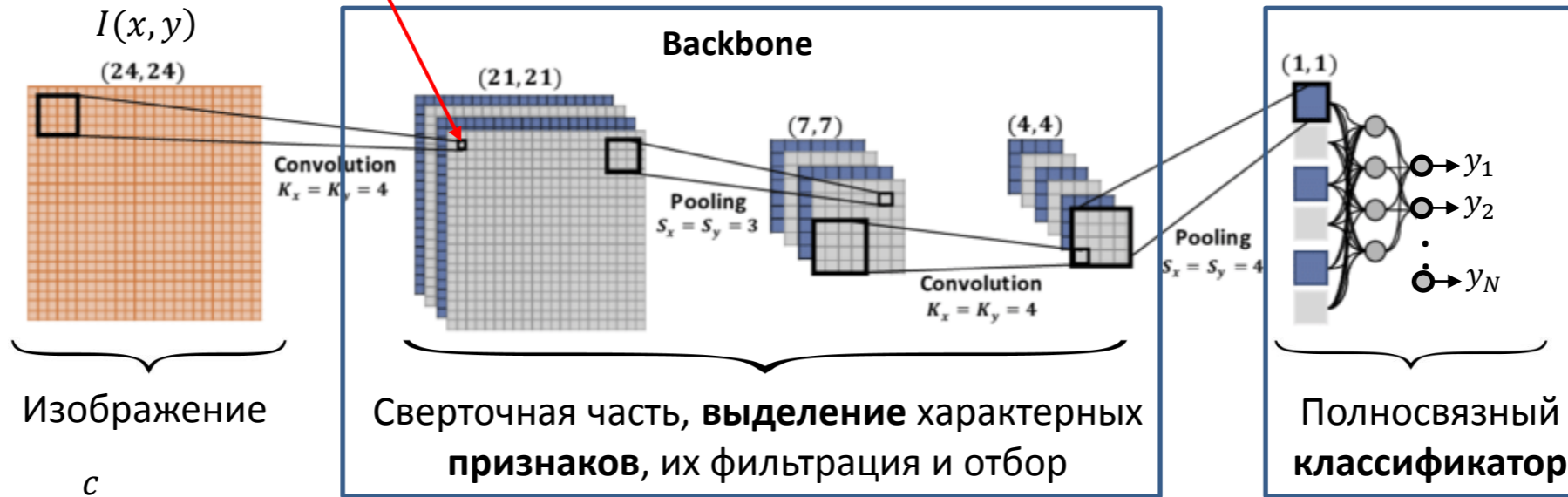
$T_c(\delta(\Delta x, \Delta y))$



← фильтрация признаков по выраженности

# Общая модель зрительной системы на основе сверточной нейронной сети

$$f(x, y, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T_c(\delta(x-n, y-m)) dn dm$$



Набор из  $c$  фильтров ,  
профилей рецептивных полей

$$T_c(\delta(\Delta x, \Delta y))$$

$W_{11}$	$W_{21}$	$W_{31}$
$W_{12}$	$W_{22}$	$W_{32}$
$W_{13}$	$W_{23}$	$W_{33}$

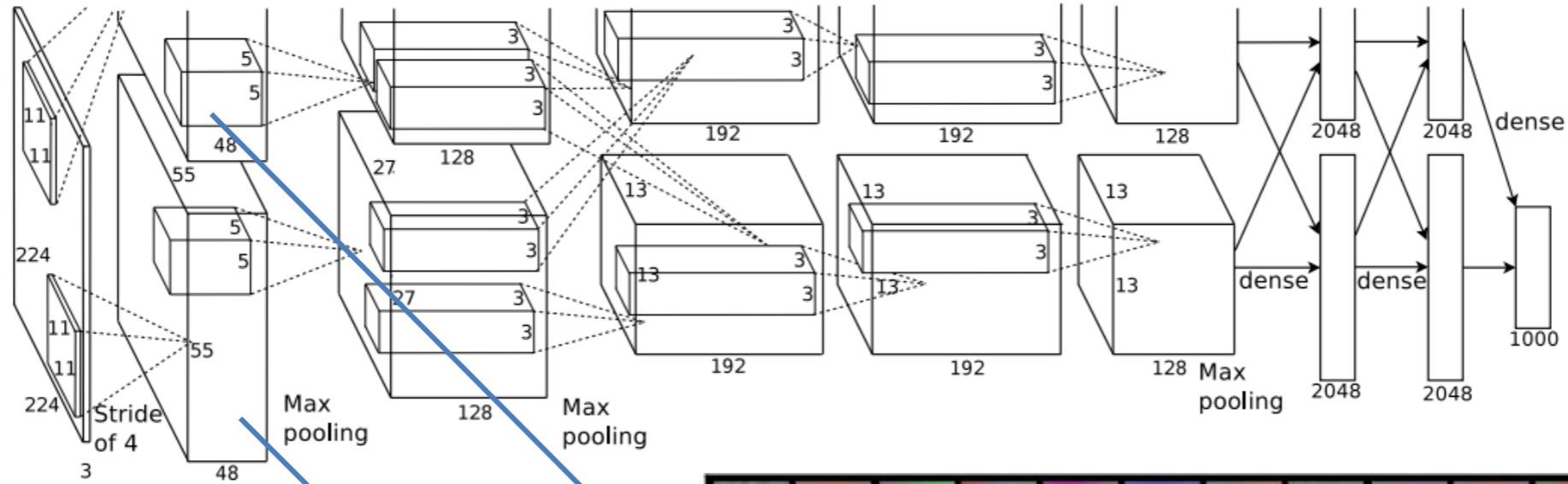
$f_{\bar{a}}(-1, -1)$	$f_{\bar{a}}(0, -1)$	$f_{\bar{a}}(1, -1)$
$f_{\bar{a}}(-1, 0)$	$f_{\bar{a}}(0, 0)$	$f_{\bar{a}}(1, 0)$
$f_{\bar{a}}(-1, 1)$	$f_{\bar{a}}(0, 1)$	$f_{\bar{a}}(1, 1)$

$$f(x, y, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(n, m) T_c(\delta(x-n, y-m)) dn dm$$

# Выделение низкоуровневых признаков сверточной нейронной сети, обученной на ImageNet

## Архитектура сети AlexNet

Параметров: 60 млн.  
Нейронов: 650000  
Слои: 5 сверточных,  
3 полносвязных



ImageNet LSVRC-2010 (1.2 млн.)

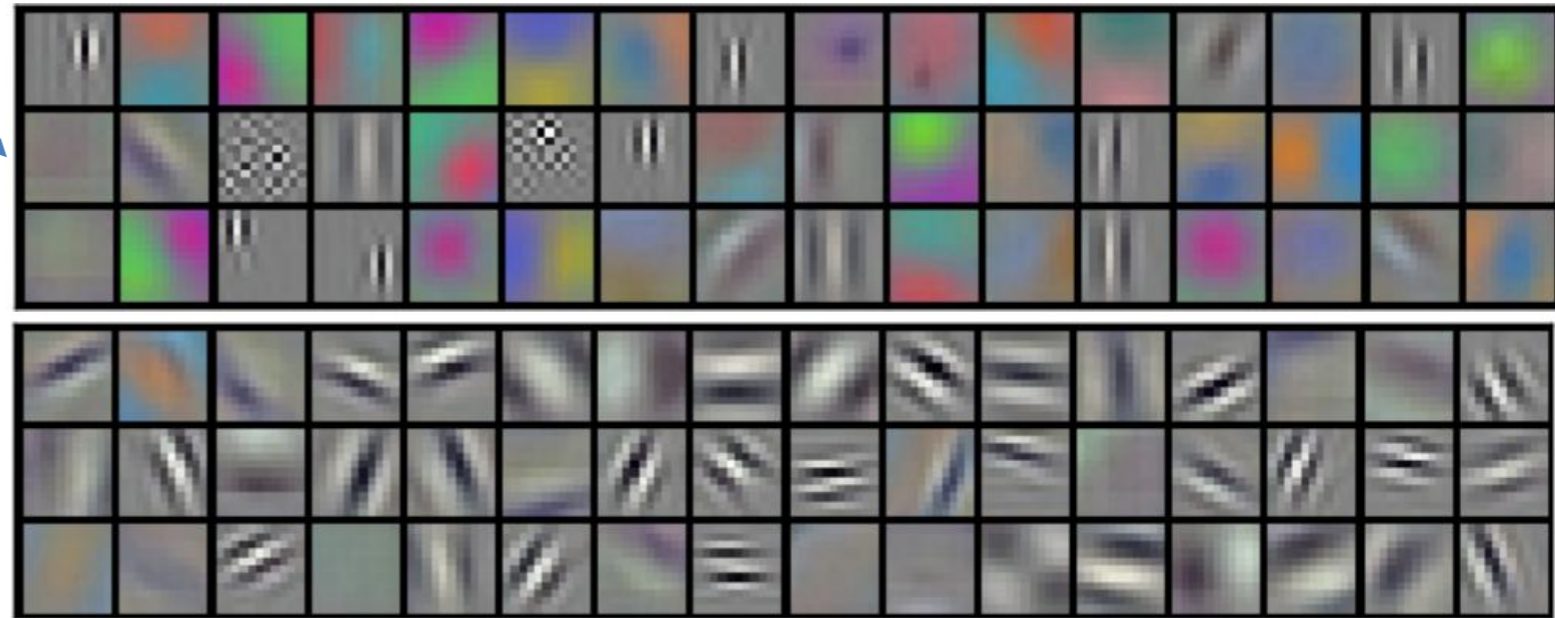
error rates:

top-1: 37.5%

top-5: 17.0%

Изображения весов 96 ядер 11x11x3 первого сверточного слоя AlexNet, обученные двумя группами на двух GPU.

Видна выраженная структура монохромных разностных фильтров, имеющих Габор-подобные профили.



Krizhevsky Alex, Sutskever Ilya, Hinton Geoffrey E. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks// NIPS 2012, pp. 1106-1114

# Механизм внимания и выбор признаков

Внимание — избирательная направленность восприятия на тот или иной объект, повышенный интерес к объекту с целью получения каких-либо данных при:

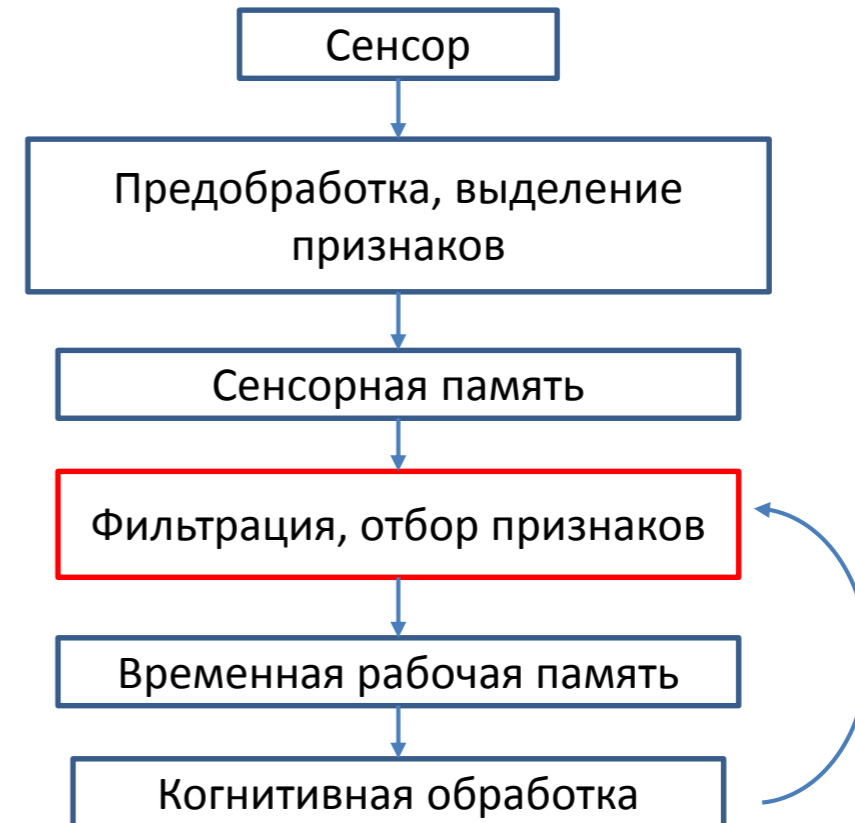
- Высокоуровневой когнитивной обработке информации
- Низкоуровневой неосознанной предобработки сигналов с органов чувств

- Модель аттенюатора и селекции (Д. Бродбент, Э. Трисман, Д. Норман): отбор релевантной и подавление нерелевантной информации.
- Ресурсная модель Д. Канемана: распределение задач при психологическом ресурсе ограниченного объема.

## Общая модель внимания

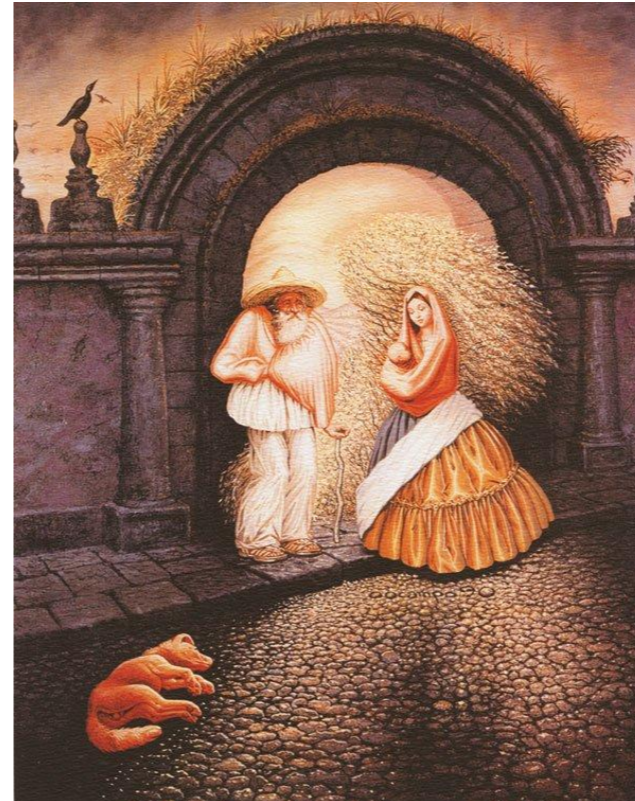
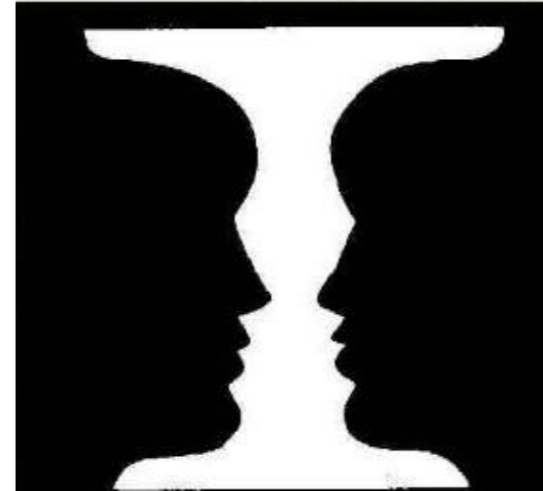
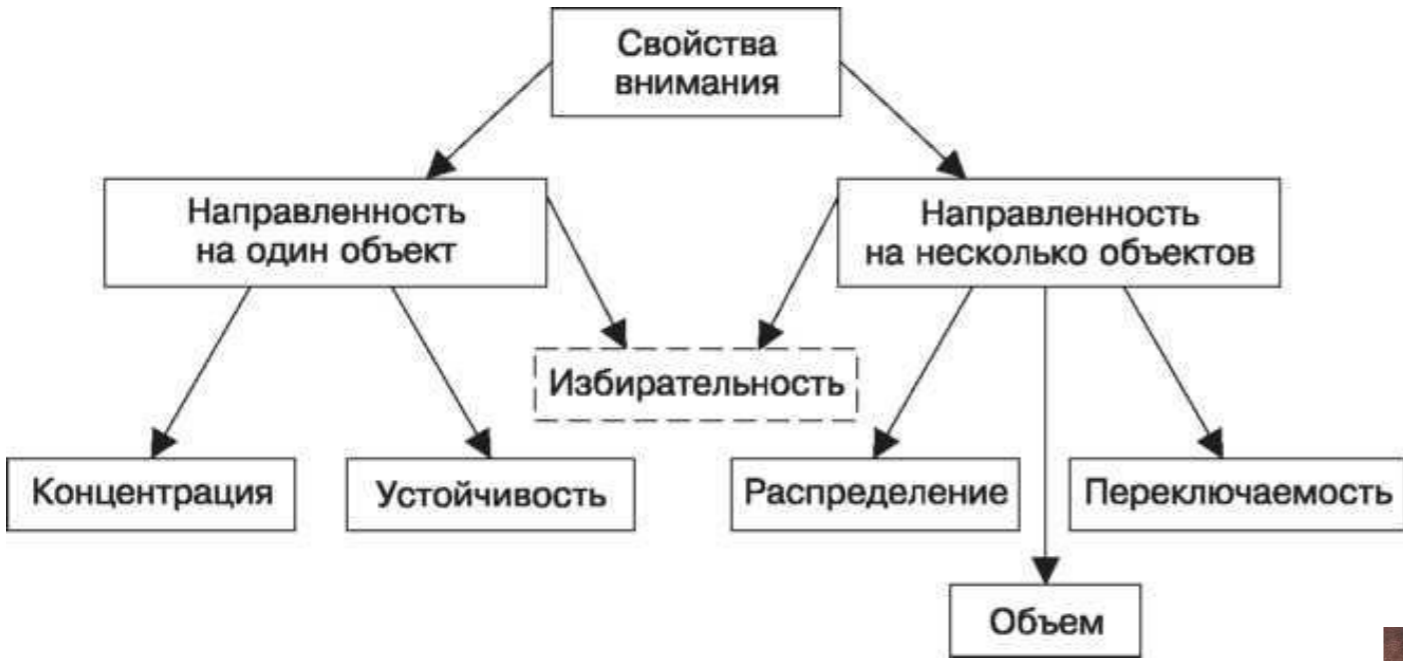


Внимание выполняет функции фильтра, предотвращающего перегрузку когнитивной системы, и который должен применяться в начале или в процессе обработки информации.



# Механизм внимания

## Примеры переключения внимания



# Механизм внимания

Избирательность (“Лицо”)



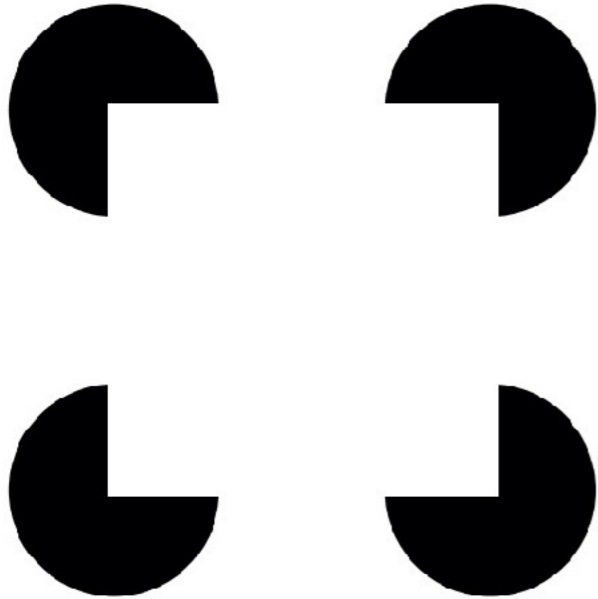
## Синтетические изображения, полученные генеративной нейросетевой моделью



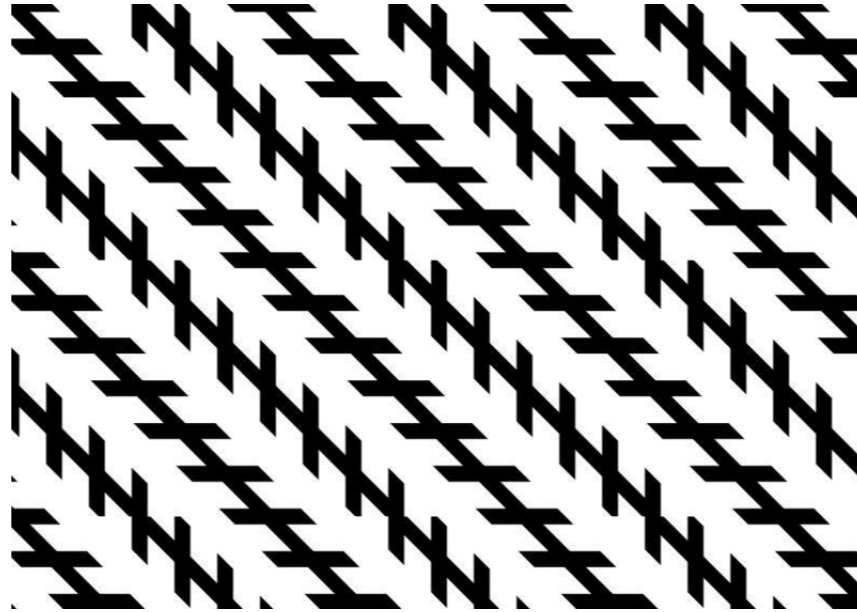
Неустойчивость восприятия vs гибкость восприятия, “сопоставительные атаки” на восприятие.

# Неустойчивость и оптические иллюзии

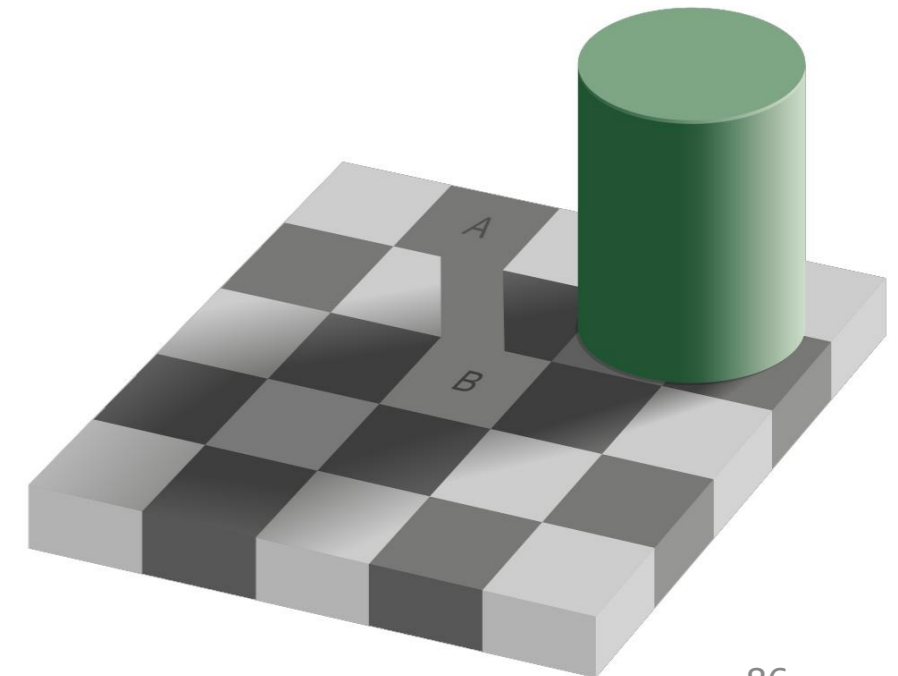
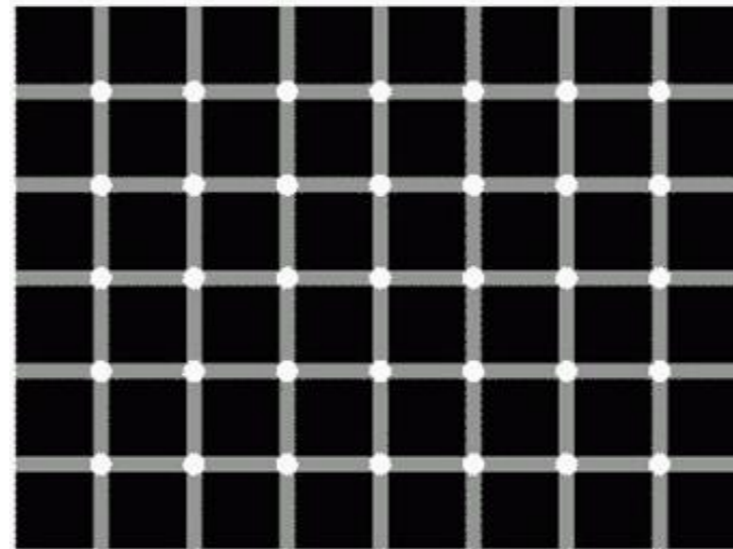
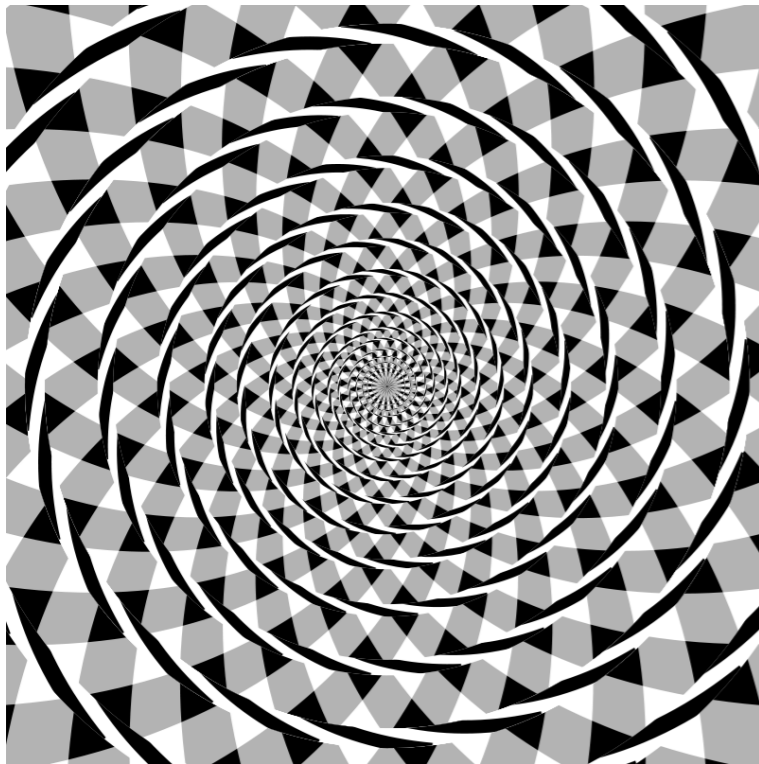
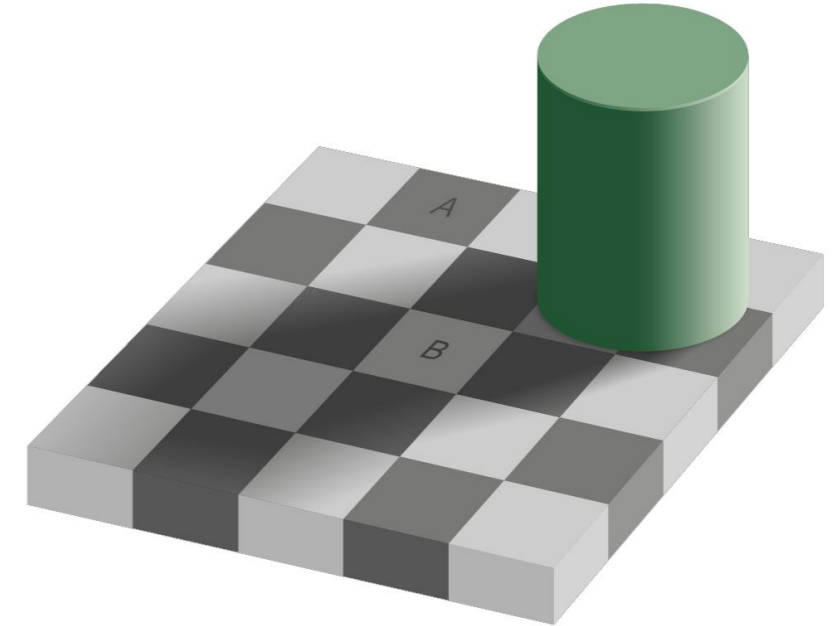
Иллюзорный контур



Параллельные прямые



Влияние контекста на восприятие



1. Понимание биологических механизмов позволяет строить эффективные системы обработки изображений, специализированные для восприятия человеком.
2. Биологические предпосылки являются источником вдохновения для построения математических моделей интеллектуальных систем.

