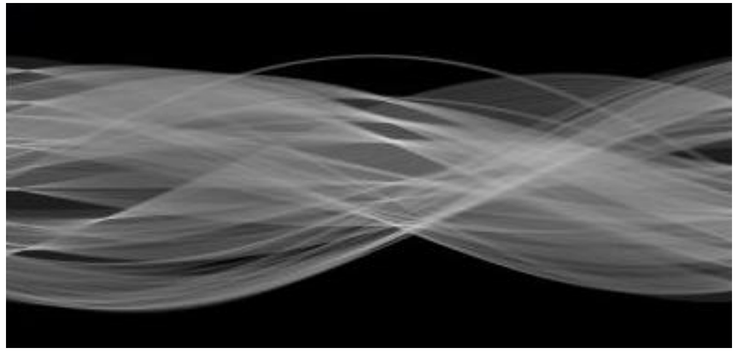
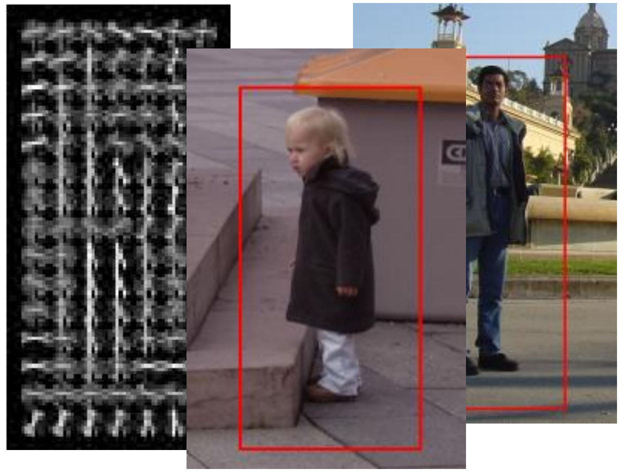
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

Гнеушев Александр Николаевич

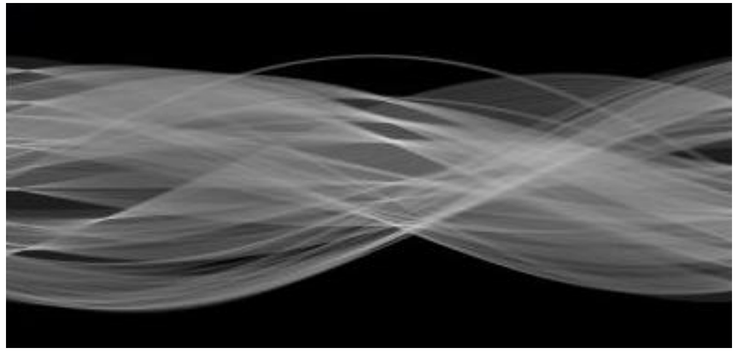


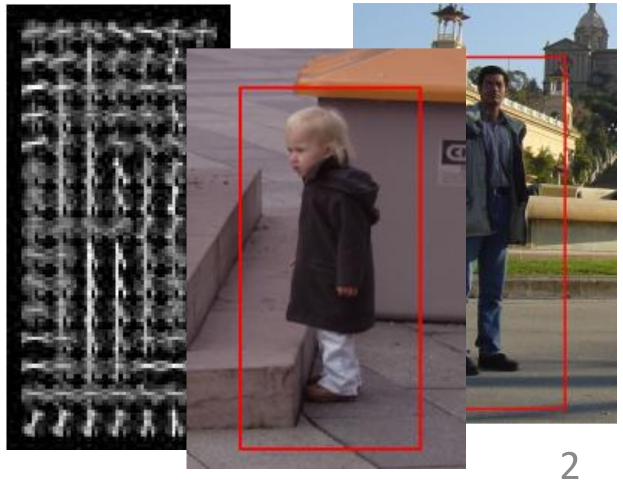


Геометрические преобразования изображения

Тема 9

20.03.2026



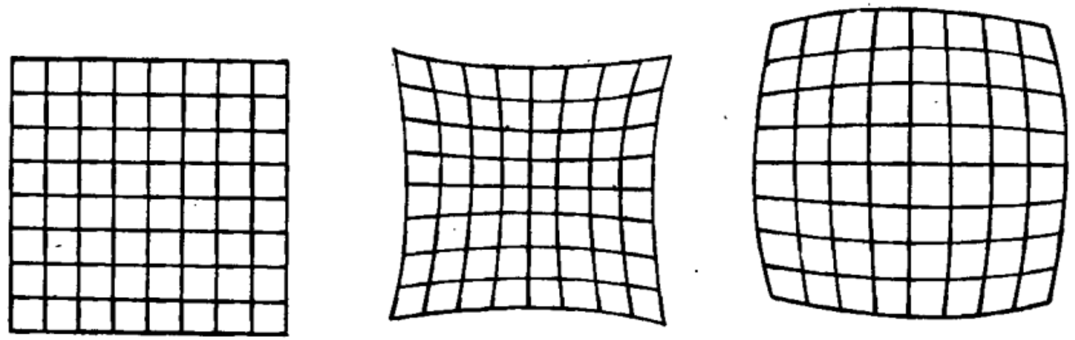


Геометрические преобразования

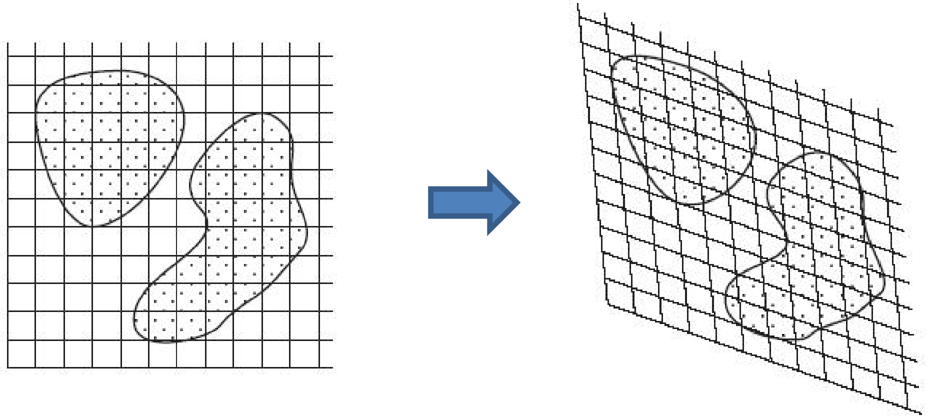
Задачи

1. Компенсация искажений оптической системы объектива камеры.
2. Выравнивание геометрии эластичного объекта на изображении.
3. Сравнение объектов, геометрически искаженных преобразованием, в том числе проективным (перспектива).
4. Моделирование изменения формы объекта при движении или изменении ракурса.
5. Объединения кадров, снятых с разного ракурса, для построения панорамы (image stitching)
6. Масштабирование изображения, сверхразрешение.

Искажения оптической системы



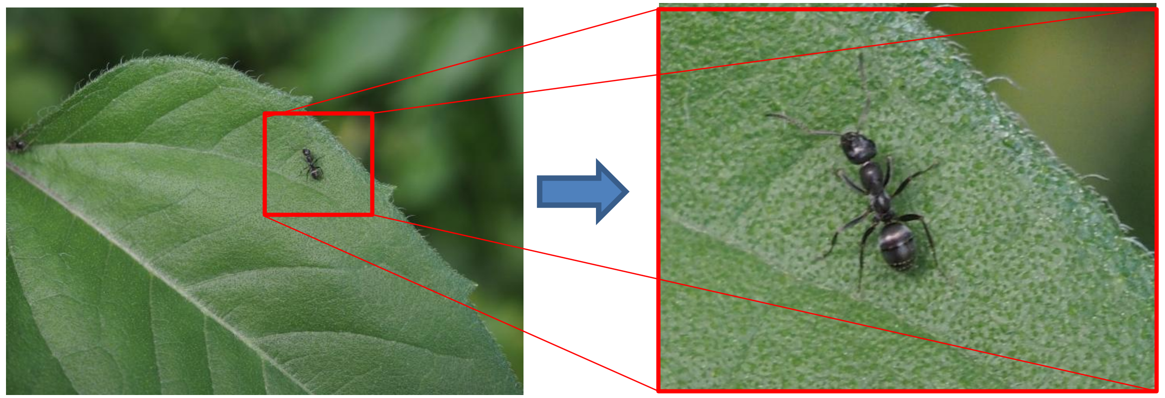
Выравнивание



Панорама

https://github.com/sajmaru/Image-Stitching-OpenCV

Масштабирование



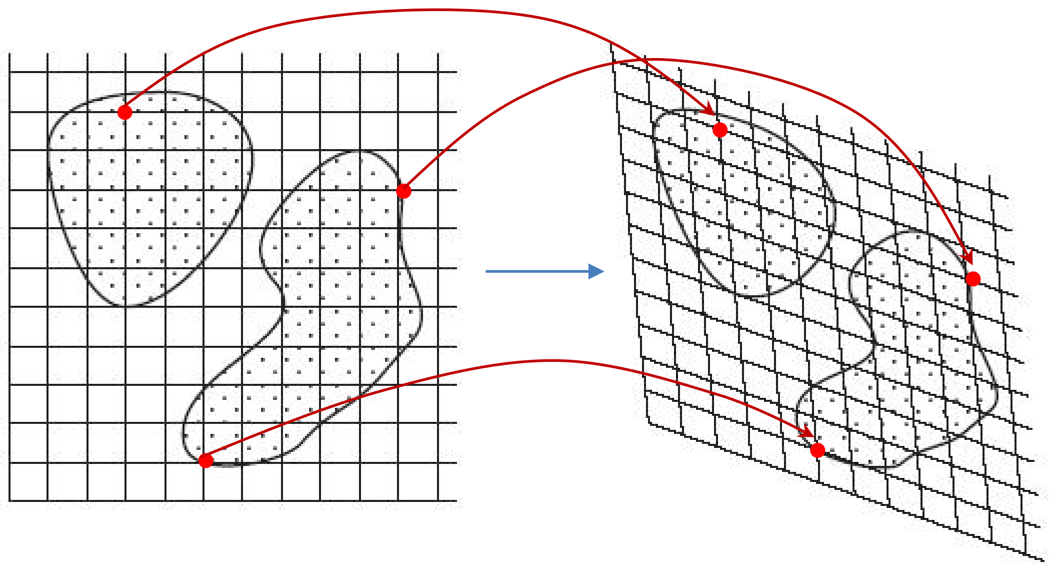
Геометрические преобразования

1. **Пространственное преобразование** координат точек
2. **Интерполяция значений яркости** точек в преобразованных координатах

Линейные преобразования координат

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты



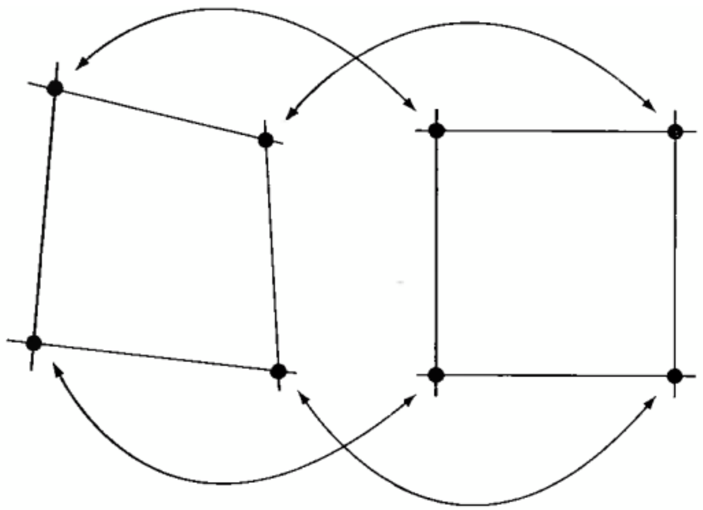
Кусочно-билинейные отображения

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$
$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy$$

Уравнения относительно 8 параметров:

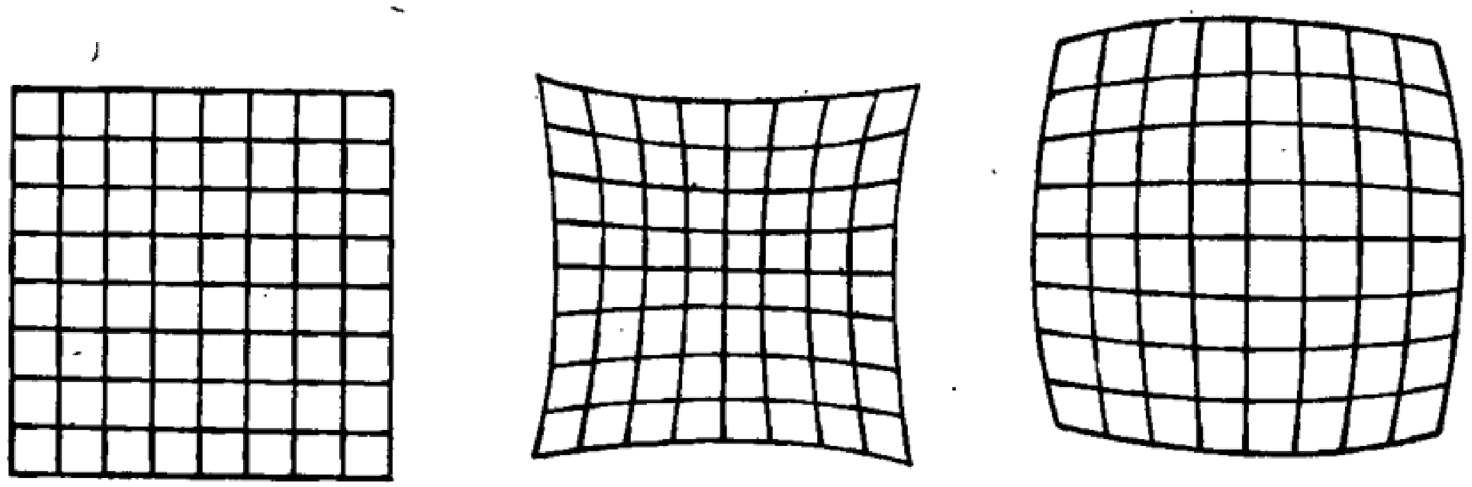
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_0 \end{bmatrix}$$



Полиномиальное преобразование пространственных координат второго порядка

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$
$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2$$



$$\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_M)^{\mathbf{T}} \qquad \boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_5)^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_M)^{\mathbf{T}} \qquad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_5)^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_M & y_M & x_M^2 & x_M y_M & y_M^2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = (\mathbf{x}' - \mathbf{Aa})^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}' - \mathbf{Aa}) + (\mathbf{y}' - \mathbf{Ab})^{\mathbf{T}}(\mathbf{y}' - \mathbf{Ab}) \to \min_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \mathbf{A}^{+}\mathbf{x}' \\ \mathbf{b} &= \mathbf{A}^{+}\boldsymbol{y}' \\ \mathbf{A}^{+} &= \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (x, y) \longrightarrow (x', y')$$

Геометрические преобразования

Интерполяция значений яркости точек

Интерполяция по **ближайшему соседу**

Пусть $\mathbf{T}$: $(x', y') \longrightarrow (x, y)$

source destination

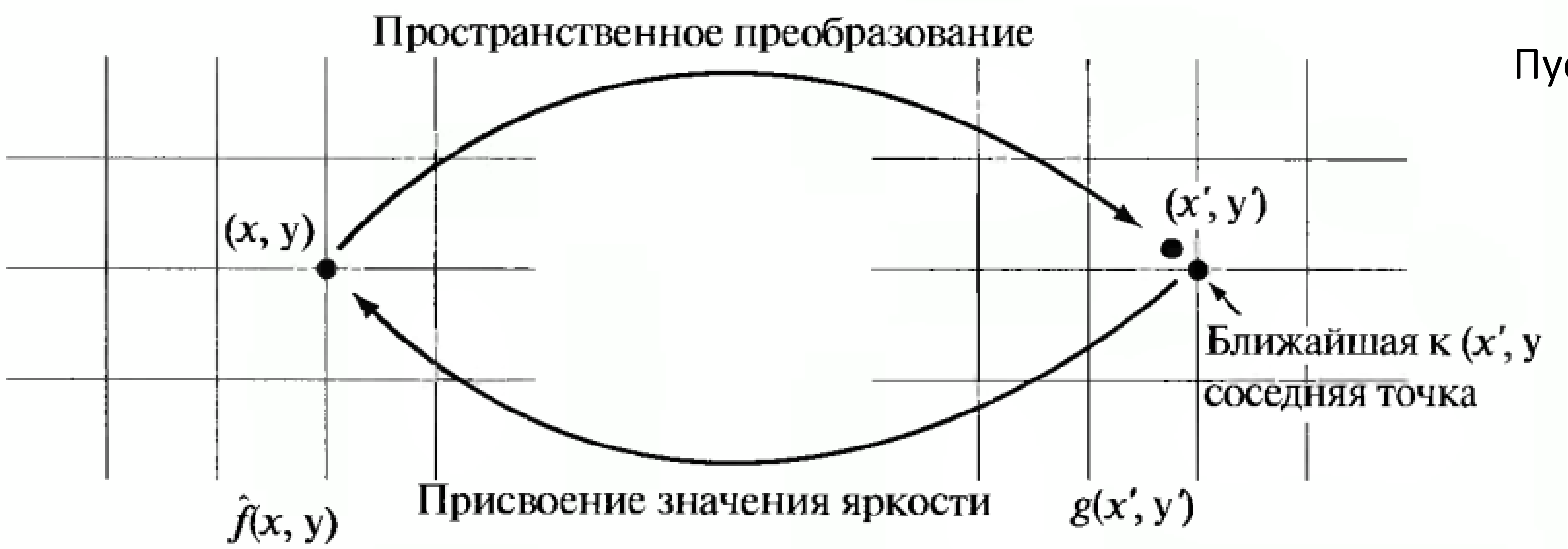
$\mathbf{T}^{-1}: (x, y) \longrightarrow (x', y')$

destination source

Геометрические преобразования

Интерполяция значений яркости точек

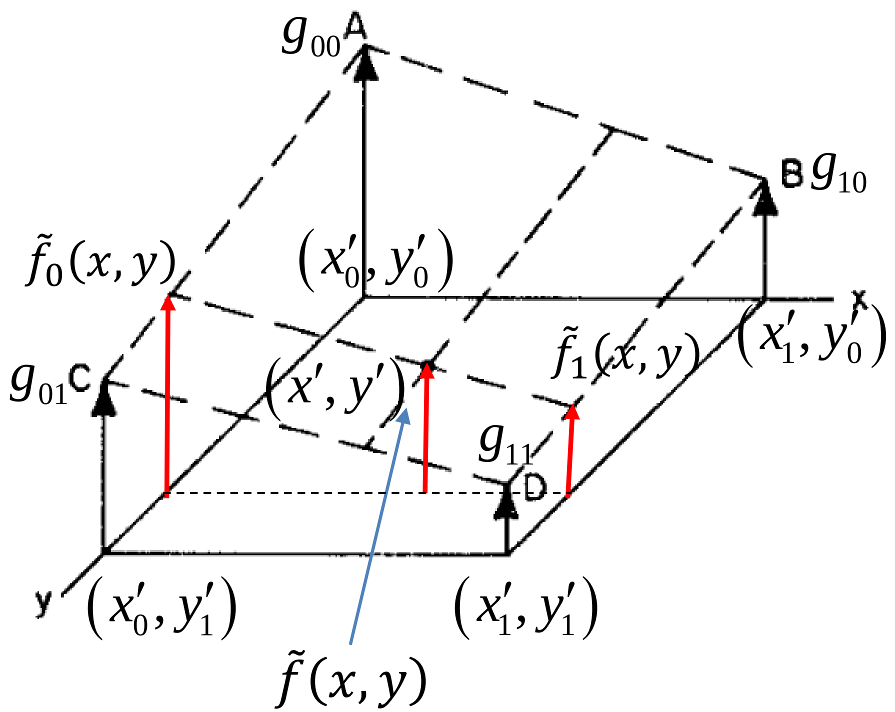
Интерполяция по **ближайшему соседу**



Пусть $\mathbf{T}$: $(x', y') \longrightarrow (x, y)$
source destination

$\mathbf{T}^{-1}: (x, y) \longrightarrow (x', y')$
destination source

Билинейная интерполяция



Пусть: $x'_0 \le x' \le x'_0 + 1 = x'_1$

$y'_0 \le y' \le y'_0 + 1 = y'_1$

$\mathrm{g}(x'_0, y'_0) = \mathrm{g}_{00}$ $\quad \mathrm{g}(x'_0, y'_1) = \mathrm{g}_{01}$

$\mathrm{g}(x'_1, y'_0) = \mathrm{g}_{10}$ $\quad \mathrm{g}(x'_1, y'_1) = \mathrm{g}_{11}$

$$\tilde{f}_0(x, y) = (y'_1 - y')\mathrm{g}_{00} + (y' - y'_0)\mathrm{g}_{01}$$
$$\tilde{f}_1(x, y) = (y'_1 - y')\mathrm{g}_{10} + (y' - y'_0)\mathrm{g}_{11}$$

$$(y'_1 - y') + (y' - y'_0) = 1$$
$$(x'_1 - x') + (x' - x'_0) = 1$$

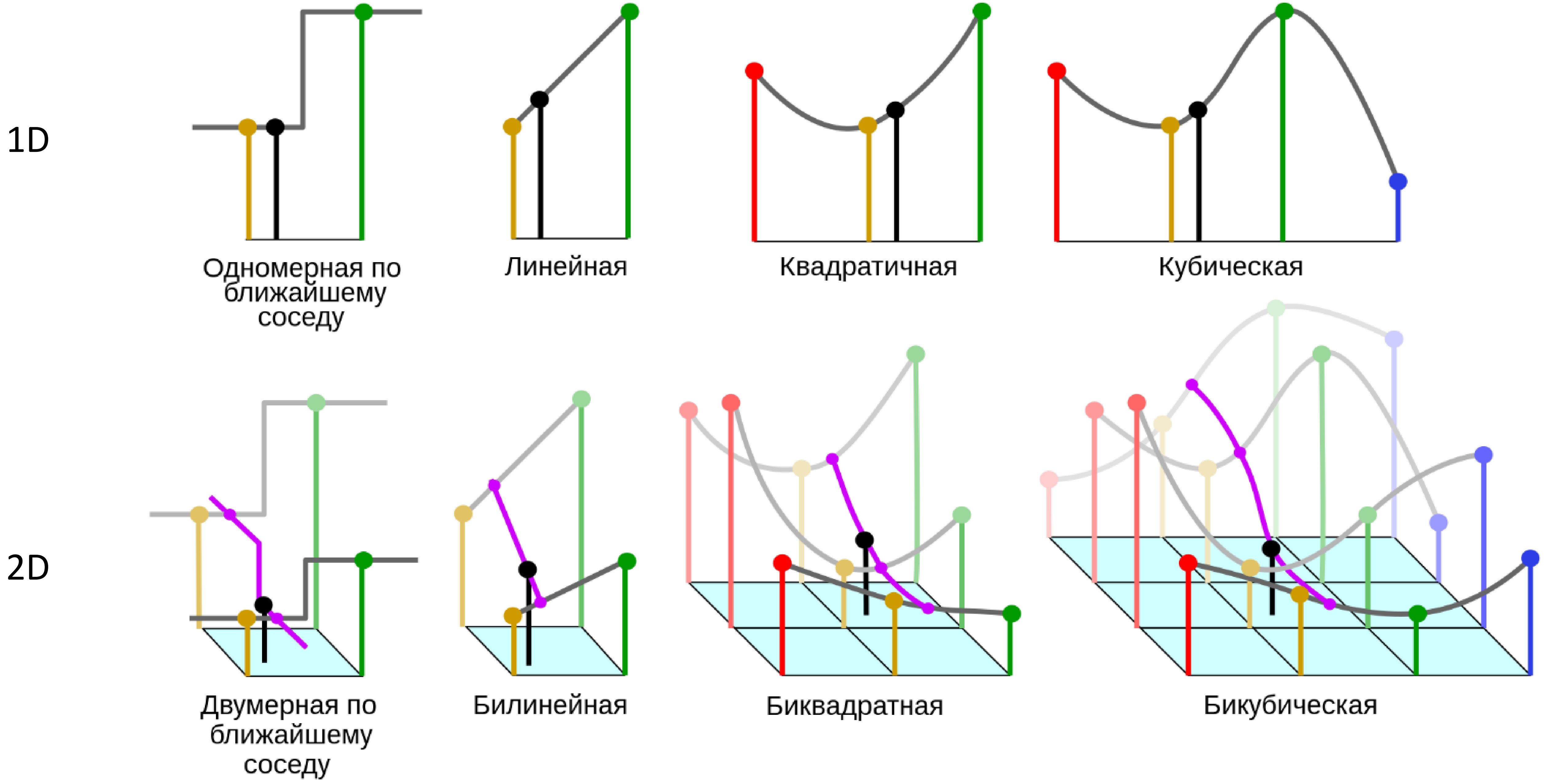
$$\tilde{f}(x, y) = (x'_1 - x')\tilde{f}_0 + (x' - x'_0)\tilde{f}_1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) = {} & (x'_1 - x')(y'_1 - y')\mathrm{g}_{00} + (x'_1 - x')(y' - y'_0)\mathrm{g}_{01} + \\ & + (x' - x'_0)(y'_1 - y')\mathrm{g}_{10} + (x' - x'_0)(y' - y'_0)\mathrm{g}_{11}\end{aligned}}$$

$$\tilde{f}(x, y) = ax' + by' + cx'y' + d$$

Геометрические преобразования

Интерполяция значений яркости точек

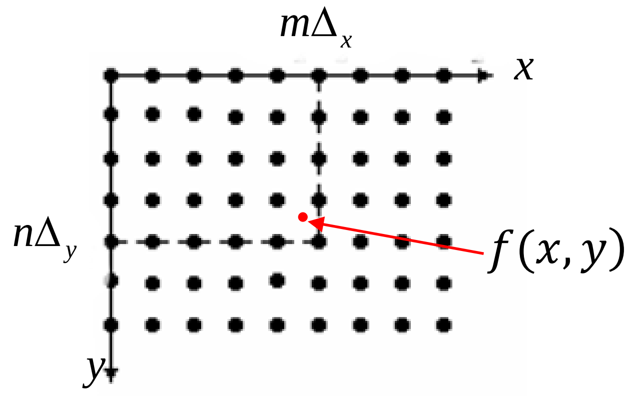


Геометрические преобразования

Ядерная интерполяция. Ядро Котельникова.

Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{m}}\sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}\big)\boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}\big),$$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро



Интерполяционный ряд Котельникова:

$$f_н(x,y) = \sum_m\sum_n f(m\Delta_x,n\Delta_y)\frac{\sin\left[\pi\left(x-m\Delta_x\right)/\Delta_x\right]}{\left(\pi\left(x-m\Delta_x\right)/\Delta_x\right)}\frac{\sin\left[\pi\left(y-n\Delta_y\right)/\Delta_y\right]}{\left(\pi\left(y-n\Delta_y\right)/\Delta_y\right)}$$

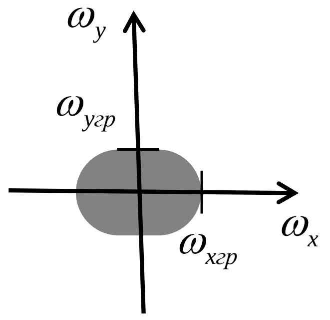
$$F_н(\omega_x,\omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_н(x,y)e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)}dxdy$$

Точная интерполяция между дискретными отсчетами $(m\Delta_x, n\Delta_y)$ при:

$$\Delta_x \le \frac{\pi}{\omega_{xгр}},\ \Delta_y \le \frac{\pi}{\omega_{yгр}},$$ (Δ_x,Δ_y) – шаг между дискретными отсчетами функции $f(m\Delta_x, n\Delta_y)$

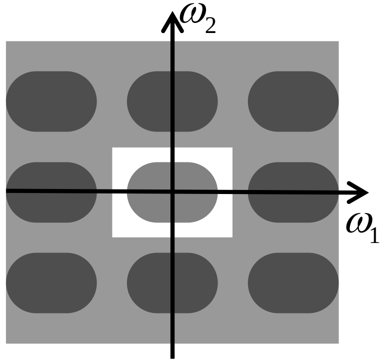
Идеальное интерполирующее ядро (нормированное):

$$R(x,y) = \frac{4}{T_xT_y}\frac{\sin\left(2\pi x/T_x\right)}{\left(2\pi x/T_x\right)}\frac{\sin\left(2\pi y/T_y\right)}{\left(2\pi y/T_y\right)},\ T_x = \frac{2\pi}{\omega_{xгр}},\ T_y = \frac{2\pi}{\omega_{yгр}}$$



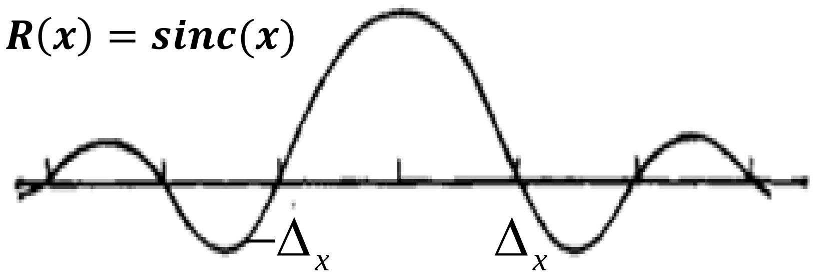
Спектр **непрерывного** изображения

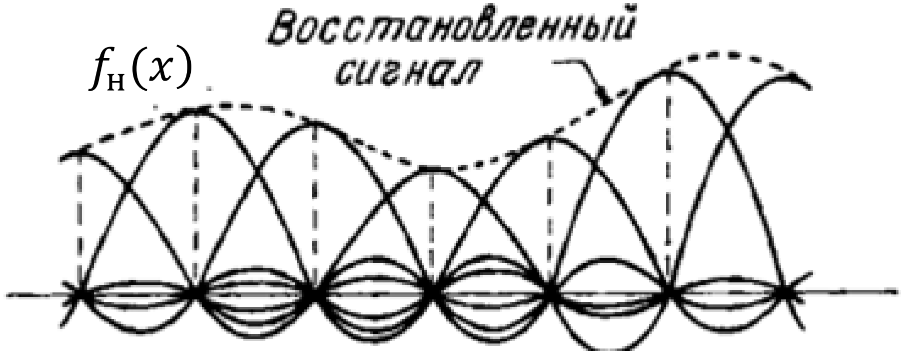
$F(\omega_1,\omega_2)\cdot\hat{R}(\omega_1,\omega_2)$



Спектр **дискретного** изображения

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sinc}(\boldsymbol{x})$





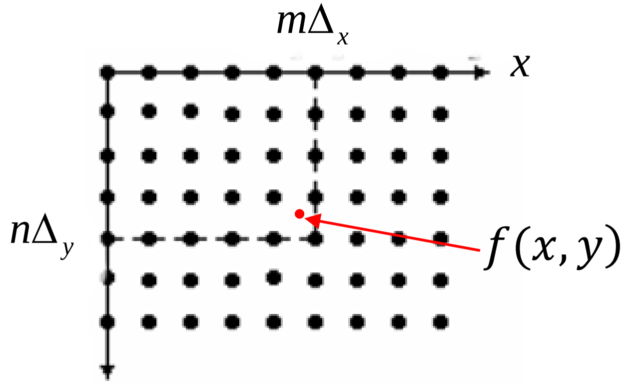
$R_m(x) = sinc(x-m),\ m \in \mathbb{Z}$ - ортогональная система функций в $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$

Геометрические преобразования

Ядерная интерполяция. Ядро Ланцоша.

Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

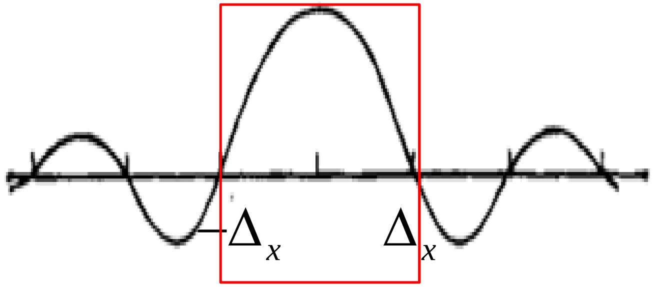
$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{m}}\sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}),$$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро



Ядро Котельникова

$$R(x) = \frac{1}{T}\frac{\sin(\pi x/T)}{(\pi x/T)}$$

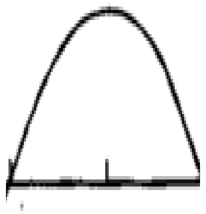
$$R(x,y) = R(x)R(y)$$



Ядро Ланцоша (венг. Lánczos Kornél)

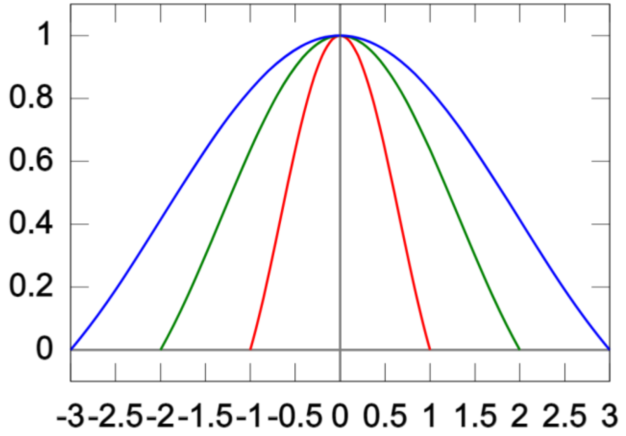
$$L_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}\frac{\sin(\pi x/a)}{(\pi x/a)}, \quad -a \le x < a,$$ 0 - иначе

$$L_a(x,y) = L_a(x)L_a(y)$$

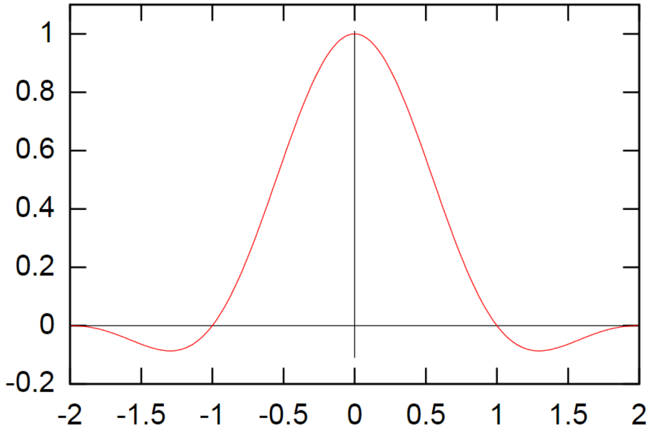


- **оконная функция** Ланцоша

$$L_w(x) = \frac{\sin(\pi x/a)}{(\pi x/a)}, \quad -a \le x < a,$$ 0 - иначе



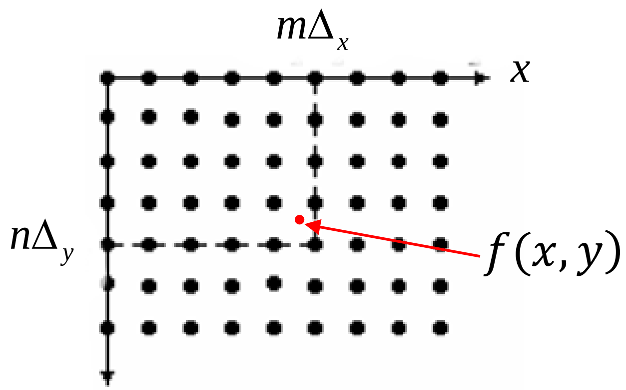
Оконная функция Ланцоша
при значении параметра *a* = 1, 2, 3.



Ядро Ланцоша для *a* = 2

Геометрические преобразования

Ядерная интерполяция. Ядро Ланцоша.



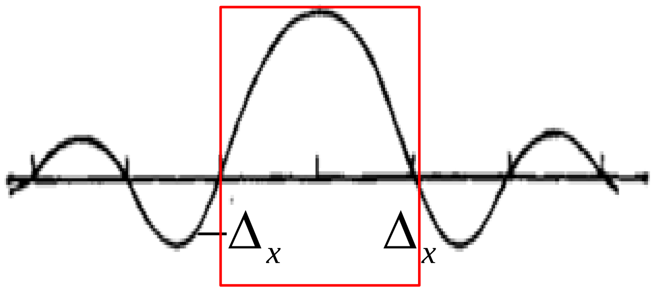
Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{m}\sum_{n} \boldsymbol{f}(m\Delta_x, n\Delta_y)\boldsymbol{R}(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y),$$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро

Ядро Котельникова

$$R(x) = \frac{1}{T}\frac{\sin(\pi x/T)}{(\pi x/T)}$$

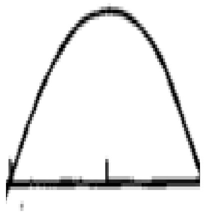
$$R(x,y) = R(x)R(y)$$



Ядро Ланцоша (венг. Lánczos Kornél)

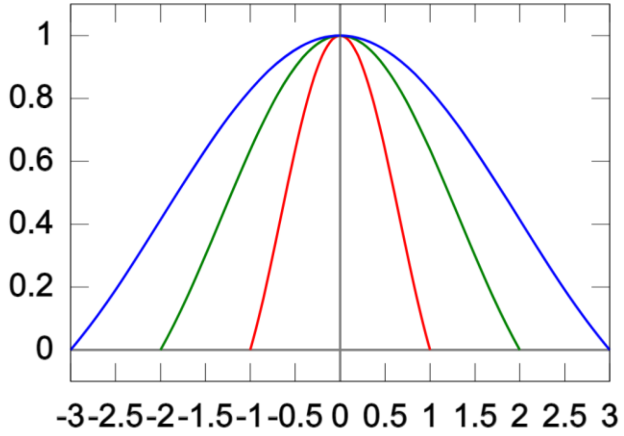
$$L_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}\frac{\sin(\pi x/a)}{(\pi x/a)}, \quad -a \le x < a, \quad 0 \text{ - иначе}$$

$$L_a(x,y) = L_a(x)L_a(y)$$



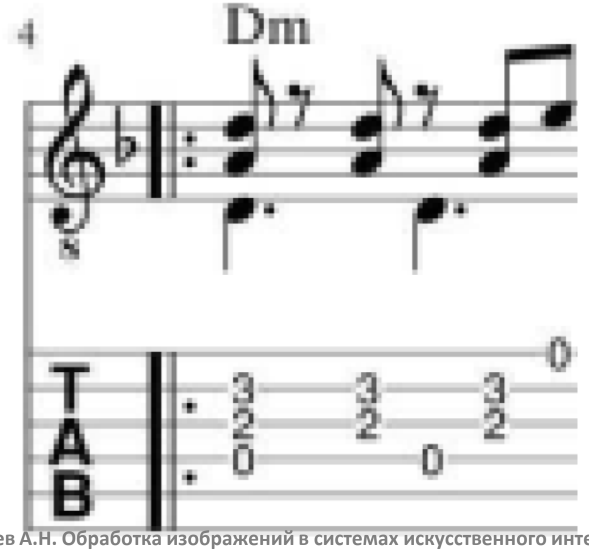
- **оконная функция** Ланцоша

$$L_w(x) = \frac{\sin(\pi x/a)}{(\pi x/a)}, \quad -a \le x < a,$$ 0 - иначе

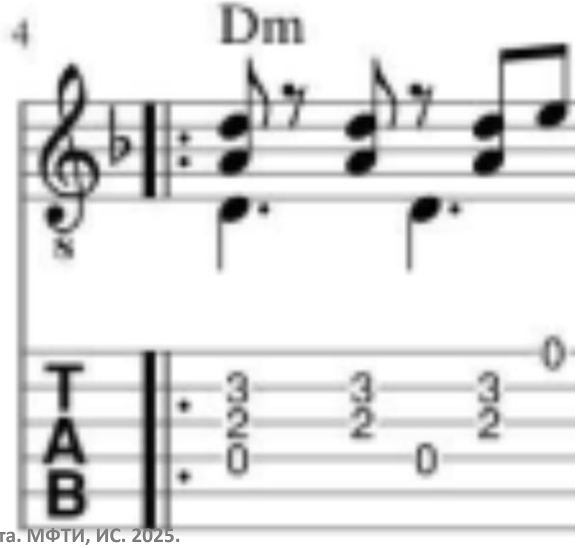


Оконная функция Ланцоша
при значении параметра a = 1, 2, 3.

Интерполяция по **ближайшему соседу** (7x)

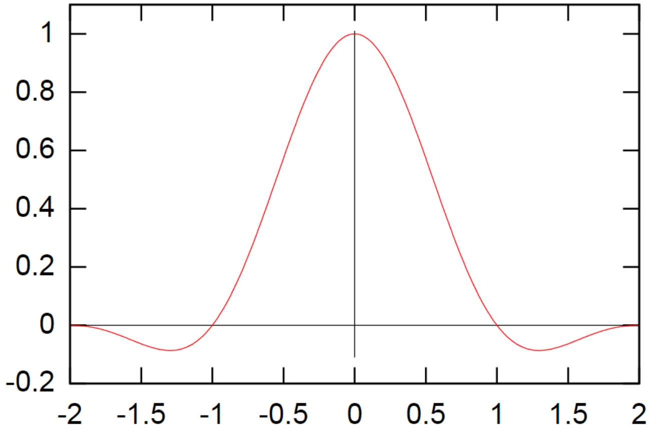


Билинейная интерполяция (7x)



Интерполяция Ланцоша (7x)

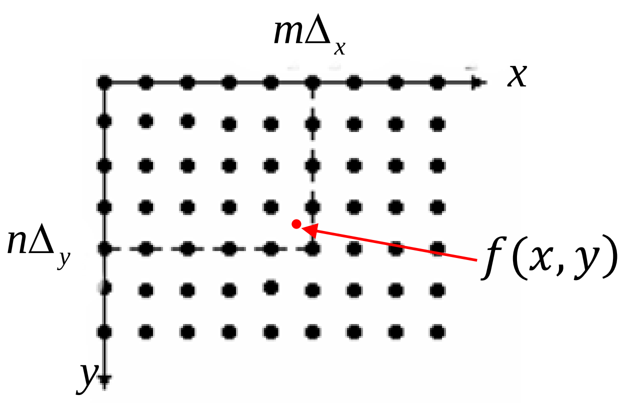
Исходное изображение



Ядро Ланцоша для $a = 2$

Геометрические преобразования

Ядерная интерполяция. **Прямоугольное ядро.**

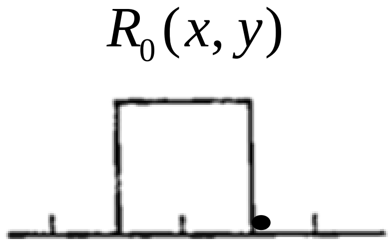


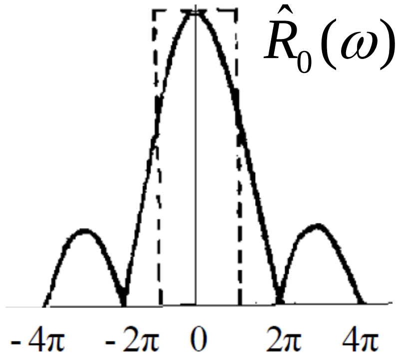
Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

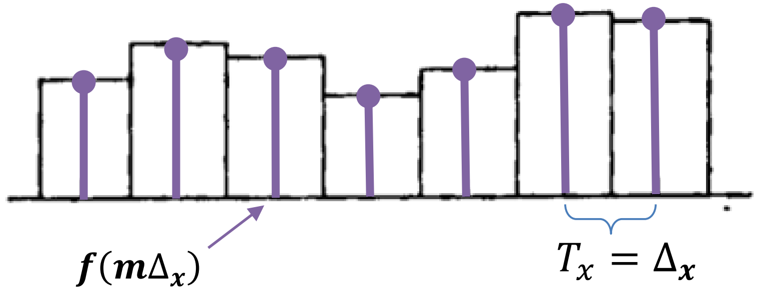
$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{m}}\sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}),$$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро

Интерполяция **с прямоугольным ядром:**

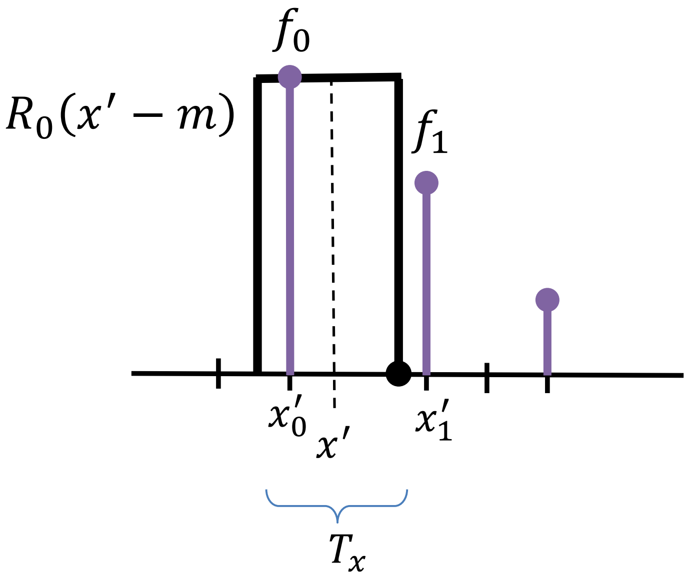
$$R_0(x,y) = \begin{cases} 1/(T_xT_y), & -T_x/2 < x \le T_x/2, \\ & -T_y/2 < y \le T_y/2, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$







Интерполяция **с прямоугольным ядром** эквивалентна интерполяции по **ближайшему соседу** (интерполяция нулевого порядка)



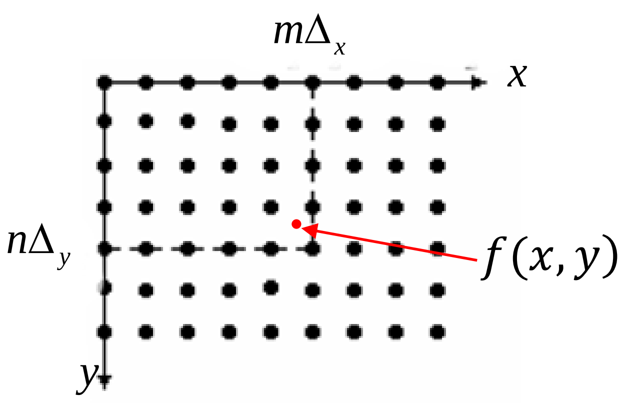
$$T_x = 1\!: \; x'_1 = x'_0 + 1$$

$$f(x'_0) = \mathrm{f}_0,$$
$$f(x'_1) = \mathrm{f}_1$$

$$f\,(x') = \sum_{m=x'-1/2}^{m=x'+1/2} f(m)R_0(x'-m) = \sum_{m=x'-1/2}^{m=x'+1/2} f(m) = \begin{cases} f(x'_0), x'-1/2 < x'_0 \le x'+1/2 \\ f(x'_1), x'-1/2 < x'_1 \le x'+1/2 \end{cases}$$

Геометрические преобразования

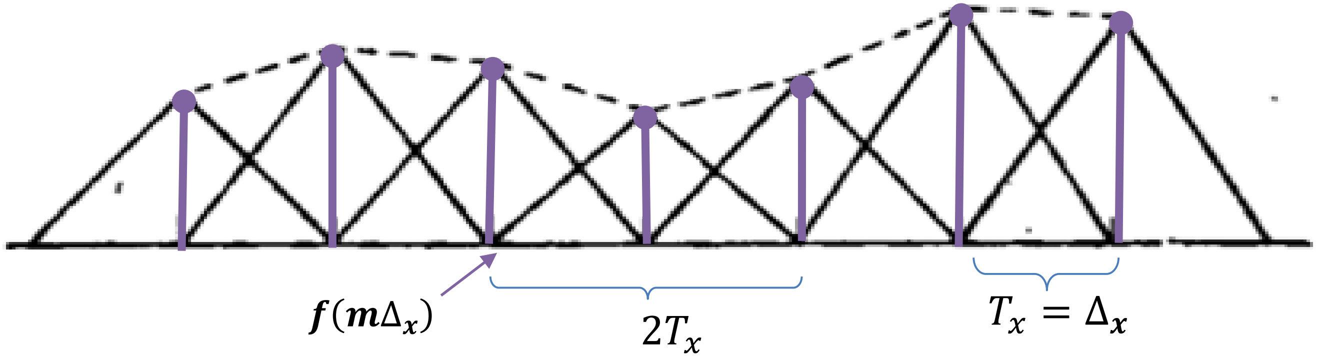
Ядерная интерполяция. **Треугольное ядро.**



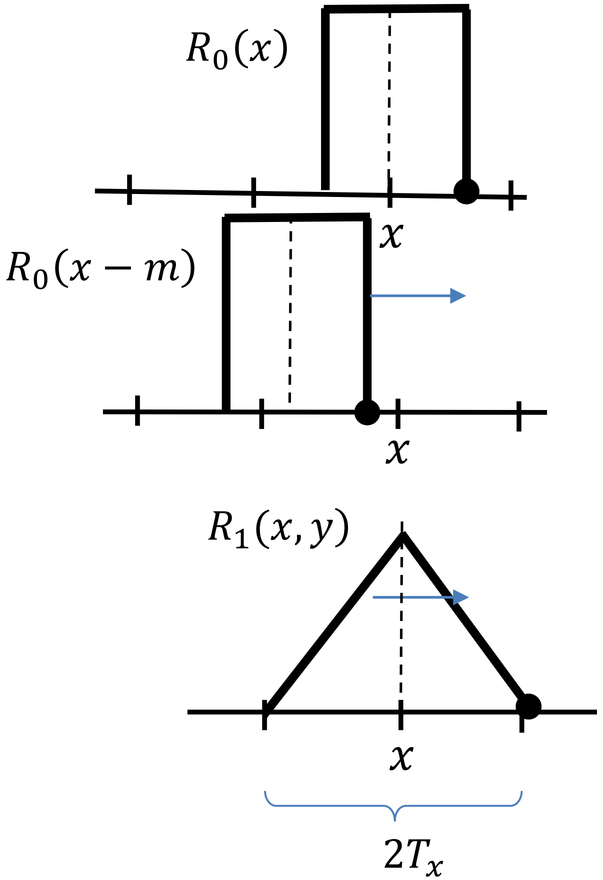
Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

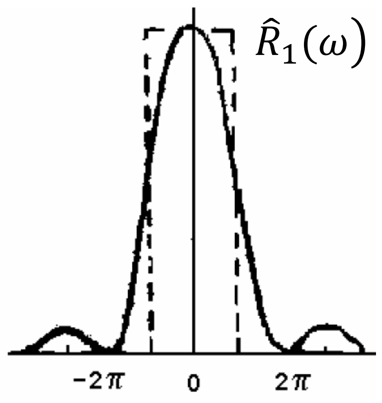
$$\boldsymbol{f\,(x,y) = \sum_m \sum_n f(m\Delta_x, n\Delta_y) R(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y)},\ \ \boldsymbol{R(x,y)}\text{- интерполирующее ядро}$$

Прямоугольное ядро: $$R_0(x,y) = \begin{cases} 1/(T_x T_y), & -T_x/2 < x \le T_x/2, \\ & -T_y/2 < y \le T_y/2, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$



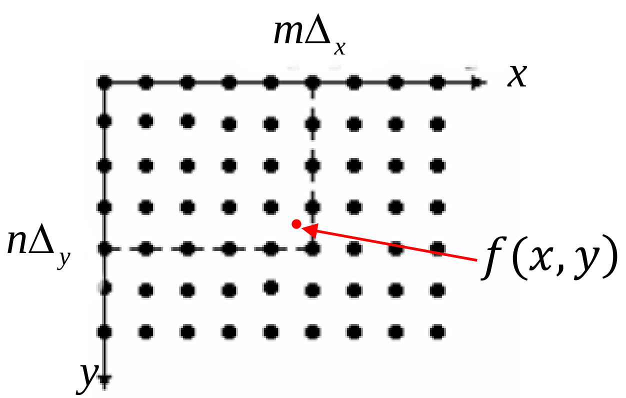
Треугольное ядро: $$R_1(x,y) = R_0(x,y) * R_0(x,y)$$





Геометрические преобразования

Ядерная интерполяция. **Треугольное ядро.**

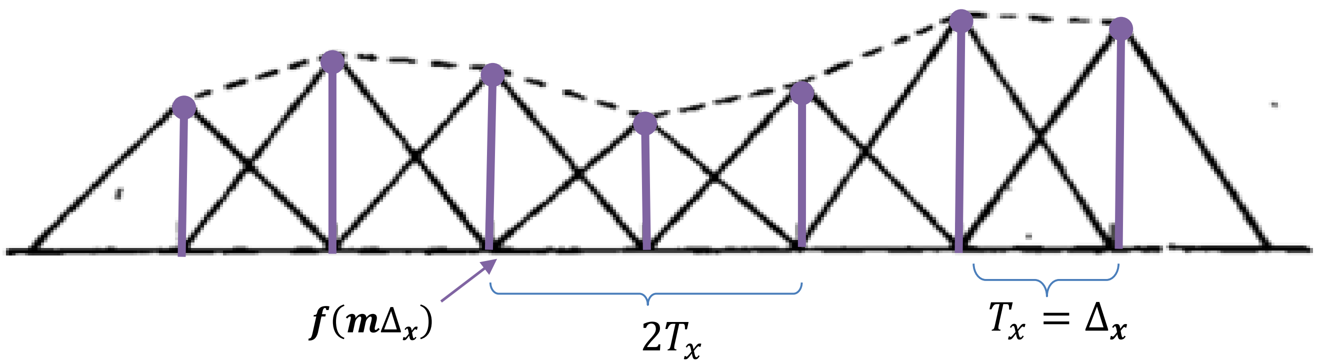


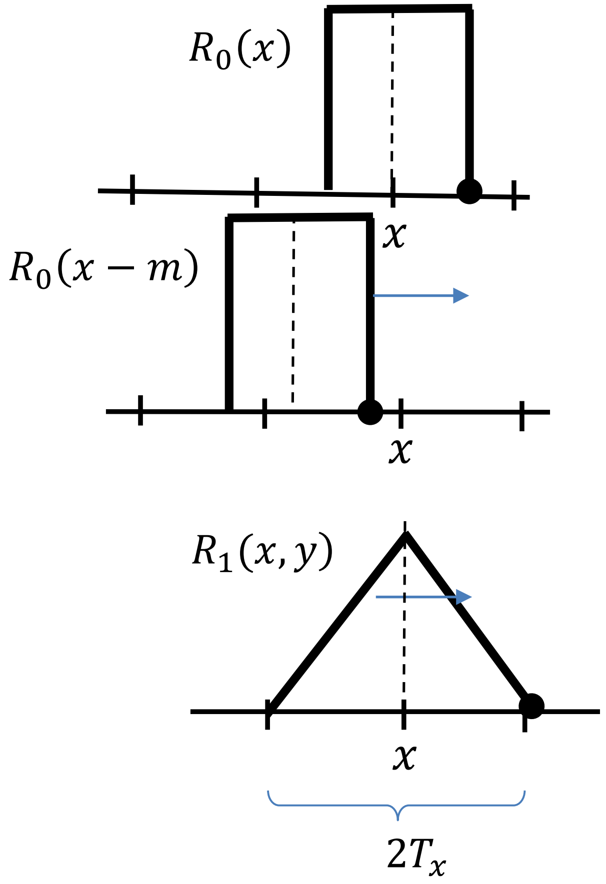
Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sum_m \sum_n f(m\Delta_x, n\Delta_y) R(x - m\Delta_x, y - n\Delta_y)}, \quad \boldsymbol{R(x,y)}\text{- интерполирующее ядро}$$

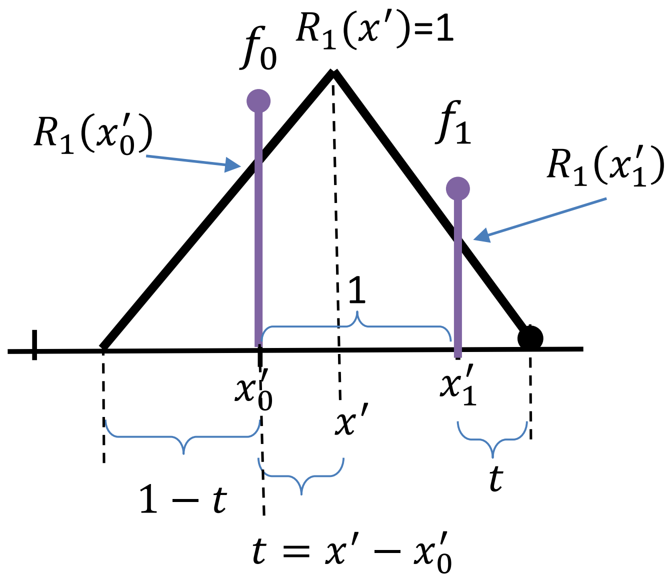
Прямоугольное ядро: $R_0(x,y) = \begin{cases} 1/(T_x T_y), & -T_x/2 < x \le T_x/2, \\ & -T_y/2 < y \le T_y/2, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

Треугольное ядро: $R_1(x,y) = R_0(x,y) * R_0(x,y)$





Интерполяция **с треугольным ядром** эквивалентна **билинейной интерполяции** (интерполяция первого порядка):

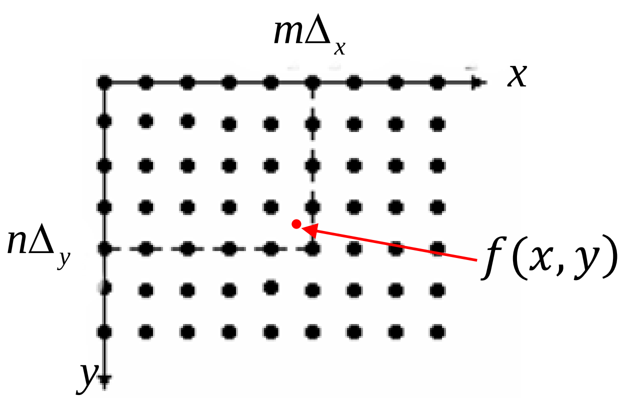


$$T_x = 1\colon\ x_1' = x_0' + 1, \quad f(x_0') = f_0, f(x_1') = f_1$$

$$\frac{R_1(x_0')}{R_1(x')} = \frac{1-t}{1} \Rightarrow R_1(x_0') = 1 - t, \qquad \frac{R_1(x_1')}{R_1(x')} = \frac{t}{1} \Rightarrow R_1(x_1') = t$$

Геометрические преобразования

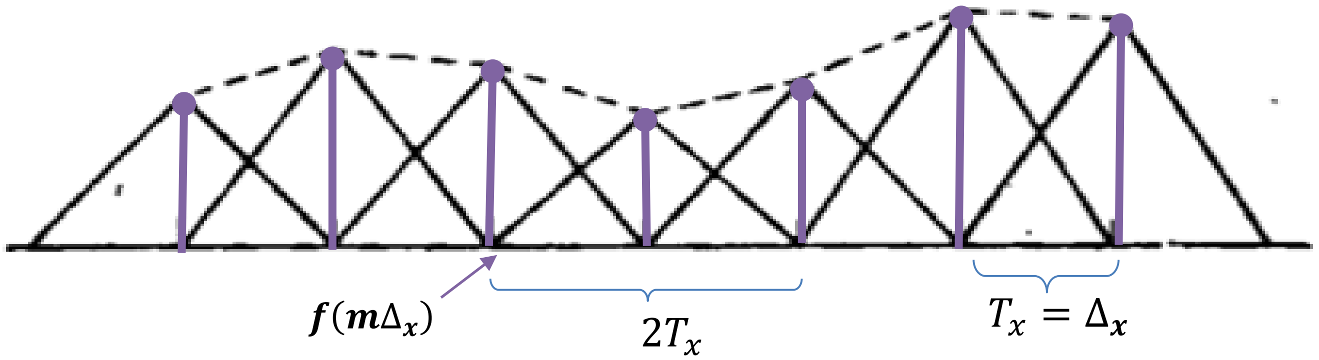
Ядерная интерполяция. **Треугольное ядро.**



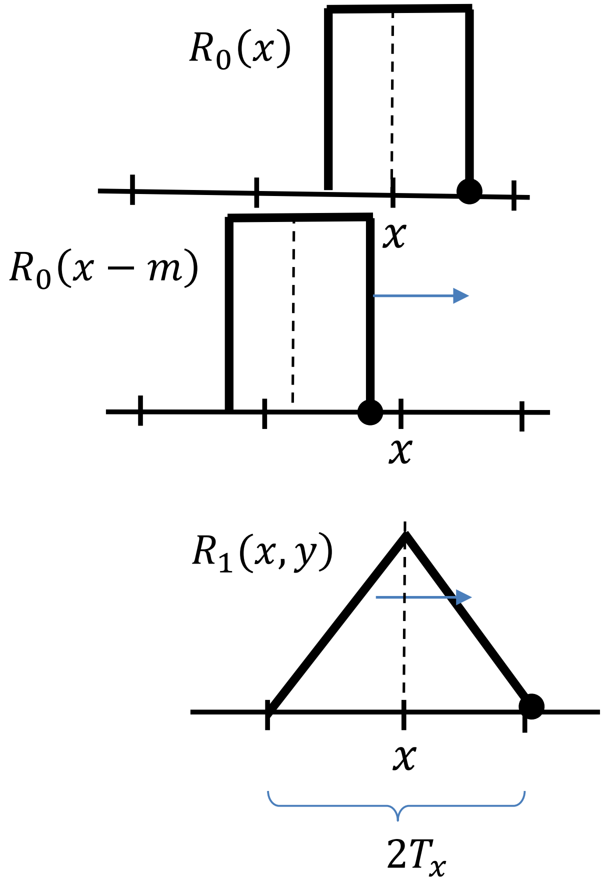
Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{m}}\sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}),$$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро

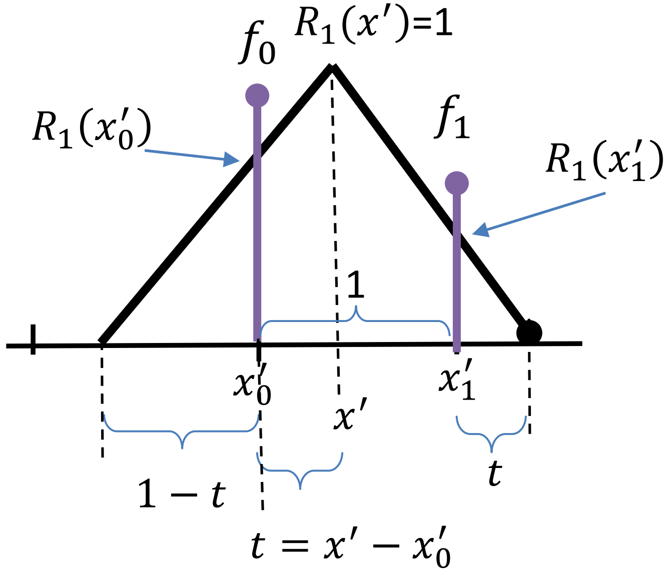
Прямоугольное ядро: $$R_0(x,y) = \begin{cases} 1/(T_xT_y), & -T_x/2 < x \le T_x/2, \\ & -T_y/2 < y \le T_y/2, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$



Треугольное ядро: $$R_1(x,y) = R_0(x,y) * R_0(x,y)$$



Интерполяция **с треугольным ядром** эквивалентна **билинейной интерполяции** (интерполяция первого порядка):



$$T_x = 1:\ x'_1 = x'_0 + 1, \quad f(x'_0) = f_0, f(x'_1) = f_1$$

$$\frac{R_1(x'_0)}{R_1(x')} = \frac{1-t}{1} \Rightarrow R_1(x'_0) = 1-t, \qquad \frac{R_1(x'_1)}{R_1(x')} = \frac{t}{1} \Rightarrow R_1(x'_1) = t$$

$$f\,(x') = \sum_{m=x'-1}^{m=x'+1} f(m)R_1(x'-m) = R_1(x'_0)f_0 + R_1(x'_1)f_1 =$$

$$= (1-t)f_0 + tf_1 = (1 - x' + x'_0)f_0 + (x' - x'_0)f_1 =$$

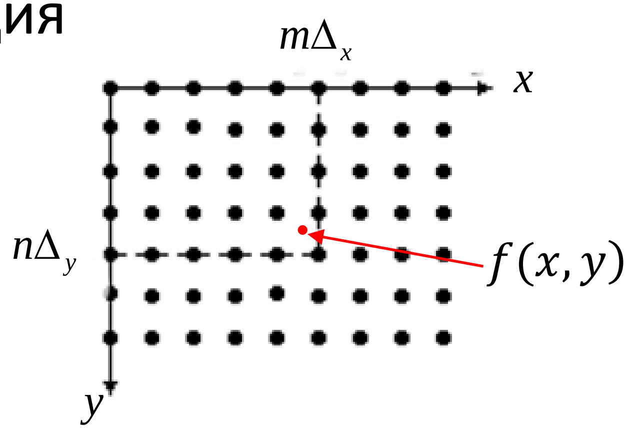
$$= \boxed{(x'_1 - x')f_0 + (x' - x'_0)f_1}$$

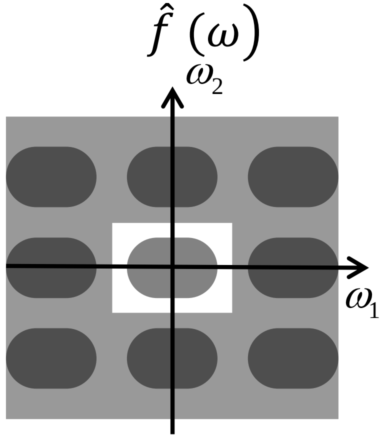
Геометрические преобразования
Ядерная интерполяция

Интерполяция на основе свертки с интерполирующим ядром:

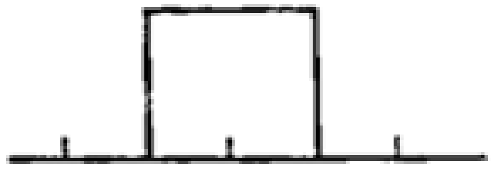
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{m}}\sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}\Delta_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{n}\Delta_{\boldsymbol{y}}),$$

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$- интерполирующее ядро





Семейства В-сплайнов

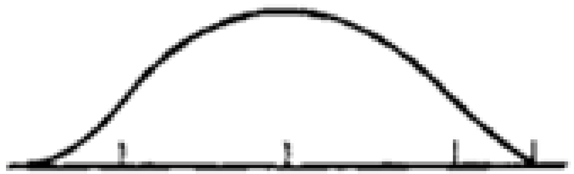


б

$R_0(x, y)$

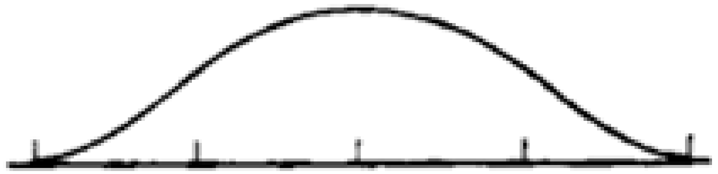
в

$R_1(x, y) = R_0(x, y) * R_0(x, y)$



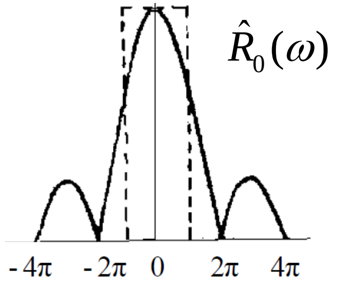
г

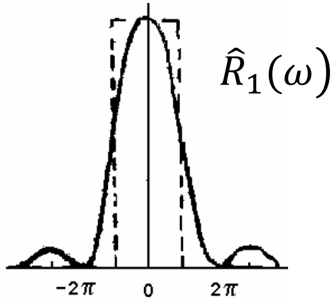
$R_2(x, y) = R_0(x, y) * R_1(x, y)$

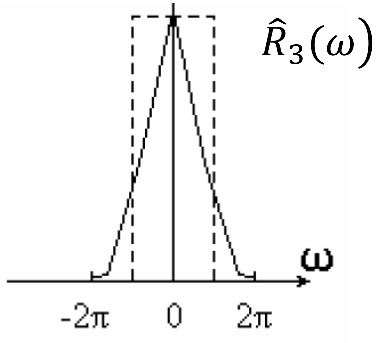


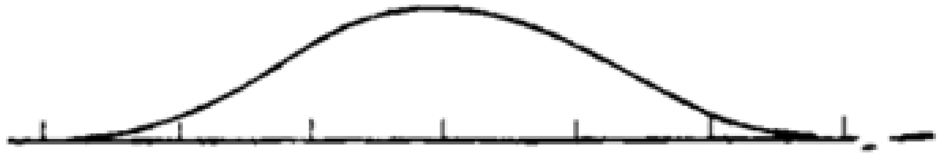
д

$R_3(x, y) = R_0(x, y) * R_2(x, y)$









е

$$R(x, y) = [2\pi\sigma_w^2]^{-1}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_w^2}\right\}$$

Одномерные интерполяционные функции.

б — прямоугольная; *в* — треугольная (свертка двух прямоугольных функций); *г* — колоколообразная (свертка трех прямоугольных функций); *д* — кубический *B*-сплайн (свертка четырех прямоугольных функций); *е* — гауссова