

Графические модели: факторные графы и вывод в графических моделях

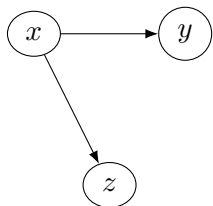
Александр Адуенко

1е апреля 2025

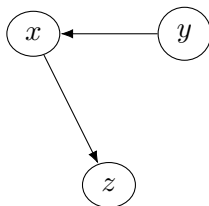
- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.
- Ориентированные графические модели и их представление plate notation. Критерий условной независимости d-separation.
- Неориентированные графические модели и их связь с ориентированными.

Ориентированные графические модели: примеры

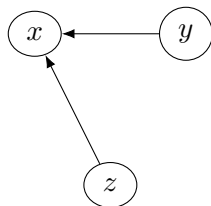
Идея: Представим совместное распределение переменных в виде графа.



Граф 1



Граф 2



Граф 3

Вопрос: Одинаковые ли совместные распределения соответствуют графическим представлениям выше?

Граф 1: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x)$;

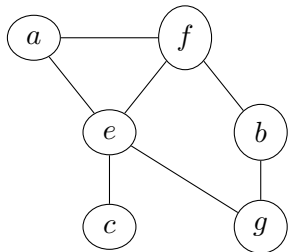
Граф 2: $p(x, y, z) = p(y)p(x|y)p(z|x)$;

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.

Неориентированные графические модели (НГМ)

Замечание: Если x_i и x_j не соединены ребром, то они независимы при условии всех остальных переменных:

$$p(x_i, x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) = p(x_i | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}) p(x_j | \mathbf{x} \setminus \{i, j\}).$$



$$p(a, b, c, e, f, g) = \frac{1}{Z} \psi_{afe}(a, f, e) \psi_{ec}(e, c) \psi_{eg}(e, g) \psi_{bg}(b, g) \psi_{bf}(b, f).$$

$$Z = \int \prod_i \psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}) d\mathbf{x}.$$

Вопрос: Какими свойствами должны обладать $\psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i})$, чтобы задать корректное распределение?

Теорема (Hammersley-Clifford). Предположим, что все потенциалы строго положительны $\psi_C(\mathbf{x}_C) > 0 \forall \mathbf{x}_C$. Тогда факторизация по максимальным кликам графа задает то же множество распределений, что и набор условий условной независимости в терминах графовой разделимости.

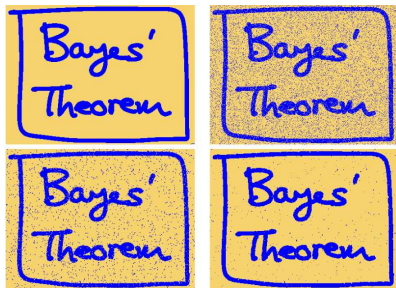
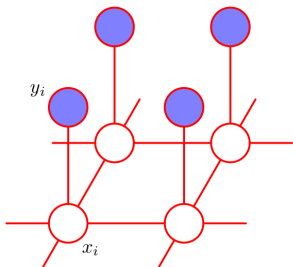
Задание потенциала через энергию

Идея: $\psi_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}) = \exp(-E_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i}))$.

Тогда $\log p(\mathbf{x}) \propto -E(\mathbf{x}) = -\sum_i E_{C_i}(\mathbf{x}_{C_i})$.

Пример: Пусть имеется бинарное изображение \mathbf{y} , $y_i \in \{-1, 1\}$, которое зашумлено. Требуется восстановить исходное изображение \mathbf{x} .

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h \sum_i x_i - \beta \sum_{(i,j) \in \epsilon} x_i x_j - \eta \sum_i x_i y_i.$$



Графическая модель $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
[Bishop, 2006]

Иллюстрация шумоподавления [Bishop,
2006]

Пример вывода в графической модели



$$p(\mathbf{x}) = p(x_1)p(x_2|x_1) \cdot \dots \cdot p(x_{N-1}|x_{N-2})p(x_N|x_{N-1}).$$



$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \psi_{12}(x_1, x_2) \psi_{23}(x_2, x_3) \cdot \dots \cdot \psi_{N-1,N}(x_{N-1}, x_N).$$

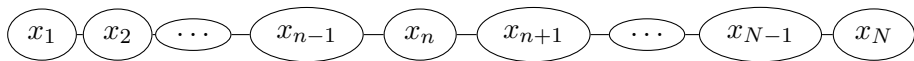
Пусть для простоты $x_i \in \{1, \dots, K\}$ и требуется найти $p(x_n)$.

$$p(x_n) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_{n-1}} \sum_{x_{n+1}} \dots \sum_{x_N} p(\mathbf{x}).$$

Вопрос: Сколько нужно операций, чтобы выполнить суммирование для подсчета $p(x_n)$, то есть $P(x_n = k)$, $k = 1, \dots, K$?

Замечание: Формула суммирования не учитывает структуру модели.

Пример вывода в графической модели



$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \psi_1(x_1, x_2) \psi_2(x_2, x_3) \cdots \psi_{N-1}(x_{N-1}, x_N).$$

$$p(x_n) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_{n-1}} \sum_{x_{n+1}} \cdots \sum_{x_N} p(\mathbf{x}).$$

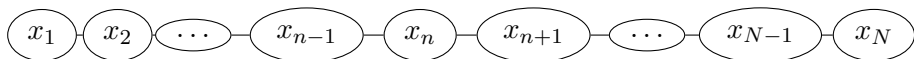
$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \cdots \left[\sum_{x_2} \psi_2(x_2, x_3) \cdot \left[\sum_{x_1} \psi_1(x_1, x_2) \right] \right] \times$$
$$\sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \cdots \left[\sum_{x_{N-1}} \psi_{N-2}(x_{N-2}, x_{N-1}) \left[\sum_{x_N} \psi_{N-1}(x_{N-1}, x_N) \right] \right].$$

$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n), \text{ где}$$

$\mu_\alpha(x_n)$ – сообщение вперед от x_{n-1} к x_n ;

$\mu_\beta(x_n)$ – сообщение назад от x_{n+1} к x_n .

Пример вывода в графической модели



$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \cdot \dots \left[\sum_{x_2} \psi_2(x_2, x_3) \cdot \left[\sum_{x_1} \psi_1(x_1, x_2) \right] \right] \times$$
$$\sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \cdot \dots \left[\sum_{x_{N-1}} \psi_{N-2}(x_{N-2}, x_{N-1}) \left[\sum_{x_N} \psi_{N-1}(x_{N-1}, x_N) \right] \right].$$

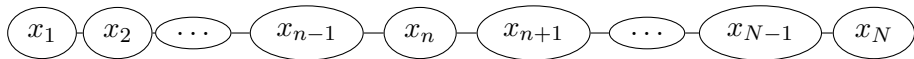
$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n).$$

$$\mu_\alpha(x_n) = \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \left[\sum_{x_{n-2}} \dots \right] = \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \mu_\alpha(x_{n-1}).$$

$$\mu_\beta(x_n) = \sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \left[\sum_{x_{n+2}} \dots \right] = \sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \mu_\beta(x_{n+1}).$$

Вопрос: Как определить базу рекурсии?

Пример вывода в графической модели



$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n).$$

$$\mu_\alpha(x_n) = \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \mu_\alpha(x_{n-1}).$$

$$\mu_\beta(x_n) = \sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \mu_\beta(x_{n+1}).$$

База рекурсии: $\mu_\alpha(x_1) = 1, \mu_\beta(x_N) = 1$.

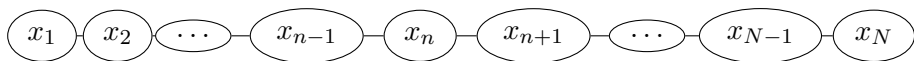
Вопрос 1: Сколько операций требуется для подсчета $\mu_\alpha(x_n), \mu_\beta(x_n)$?

Вопрос 2: Как определить Z ?

Вопрос 3: Как обобщить результат на случай непрерывных переменных?

Вопрос 4: Как изменится вывод, если часть переменных наблюдаемы, то есть ищем $p(x_n | x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$?

Пример вывода в графической модели



$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_n) \mu_\beta(x_n).$$

$$\mu_\alpha(x_n) = \sum_{x_{n-1}} \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \mu_\alpha(x_{n-1}).$$

$$\mu_\beta(x_n) = \sum_{x_{n+1}} \psi_n(x_n, x_{n+1}) \mu_\beta(x_{n+1}).$$

База рекурсии: $\mu_\alpha(x_1) = 1$, $\mu_\beta(x_N) = 1$.

Вопрос: Как найти $p(x_l)$, $\forall l \neq n$?

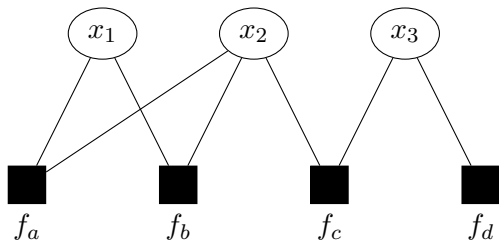
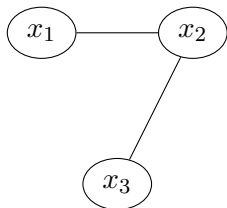
Идея: Сосчитать $\mu_\alpha(x_q)$, $q = 1, \dots, N$ и $\mu_\beta(x_q)$, $q = N, \dots, 1$.

Задание: Показать $p(x_{n-1}, x_n) = \frac{1}{Z} \mu_\alpha(x_{n-1}) \psi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \mu_\beta(x_n)$.

Фактор-графы и их построение по графической модели

Идея: Построить общее представление для ориентированных и неориентированных моделей.

$$p(\mathbf{x}) = \prod_s f_s(\mathbf{x}_s).$$



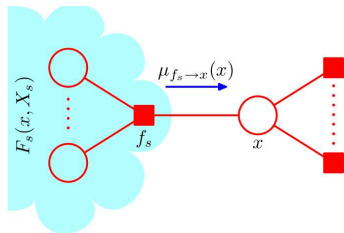
Вопрос: Задает ли граф справа другой набор условных независимостей, чем граф слева?

Алгоритм Sum-Product вывода в ациклических ГМ

Утверждение: Если исходная графическая модель есть направленное или ненаправленное дерево, то для нее можно построить ациклический фактор-граф.

Найти: $p(x) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} p(\mathbf{x})$.

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_s f_s(\mathbf{x}_s) =$$
$$\frac{1}{Z} \prod_{s \in N(x)} F_s(x, X_s) = \frac{1}{Z} \tilde{p}(x).$$



Фактор-граф в окрестности
вершины x [Bishop, 2006]

$$\tilde{p}(x) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} \tilde{p}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x} \prod_{s \in N(x)} F_s(x, X_s) = \prod_{s \in N(x)} \sum_{\mathbf{x} \setminus x} F_s(x, X_s) =$$
$$\prod_{s \in N(x)} \sum_{X_s} F_s(x, X_s) = \prod_{s \in N(x)} \mu_{f_s \rightarrow x}(x).$$

Алгоритм Sum-Product вывода в ациклических ГМ

$$F_s(x, X_s) = f_s(x, x_1, \dots, x_M)G_1(x_1, X_{s1}) \cdot \dots \cdot G_M(x_M, X_{sM}).$$

$$\mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \sum_{X_s} F_s(x, X_s) =$$

$$\sum_{x_{1:M}} f_s(x, x_{1:M}) \prod_{m \in N(f_s) \setminus x} \left[\sum_{X_{sm}} G_m(x_m, X_{sm}) \right] =$$

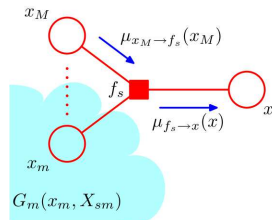
$$\sum_{x_{1:M}} f_s(x, x_{1:M}) \prod_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m), \text{ где}$$

$$\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \sum_{X_{sm}} G_m(x_m, X_{sm}).$$

$$G_m(x_m, X_{sm}) = \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} F_l(x_m, X_{ml}).$$

$$\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \sum_{X_{sm}} \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} F_l(x_m, X_{ml}) =$$

$$\prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \left[\sum_{X_{ml}} F_l(x_m, X_{ml}) \right] = \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m).$$



Фактор-граф в окрестности вершины f_s [Bishop, 2006]

Алгоритм Sum-Product вывода в ациклических ГМ

Получаем следующие формулы пересчета сообщений:

- $\mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m) = \prod_{l \in N(x_m) \setminus f_s} \mu_{f_l \rightarrow x_m}(x_m);$
- $\mu_{f_s \rightarrow x}(x) = \sum_{x_{1:M}} f_s(x, x_{1:M}) \prod_{m \in N(f_s) \setminus x} \mu_{x_m \rightarrow f_s}(x_m).$

Алгоритм:

- 1 Объявляем вершину x корнем;
- 2 От листьев фактор-графа движемся к корню, пересылая сообщения по правилам выше;
- 3 По достижении корня имеем: $p(x) = \frac{1}{Z} \prod_{s \in N(x)} \mu_{f_s \rightarrow x}(x).$

База рекурсии (сообщения от листьев): $\mu_{x \rightarrow f} = 1, \mu_{f \rightarrow x} = f(x).$

Вопрос 1: Как показать, что процедура работает, то есть все вершины получают достаточно сообщений, чтобы отправить своё?

Вопрос 2: Как получить $p(x_l) \forall x_l \neq x$?

Вопрос 3: Как определить нормировочную постоянную Z ?

Вопрос 4: Как получить $p(x_s)$?

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 394-411.
- 2 Goodfellow, Ian, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. Deep learning. MIT press, 2016. Pp. 549-576.
- 3 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 4 Bacchus, Fahiem, and Adam J. Grove. "Graphical models for preference and utility." arXiv preprint arXiv:1302.4928 (2013).
- 5 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 6 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 7 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.