

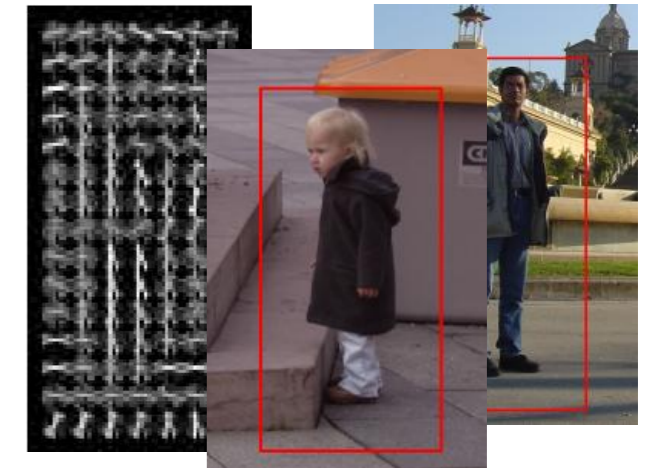
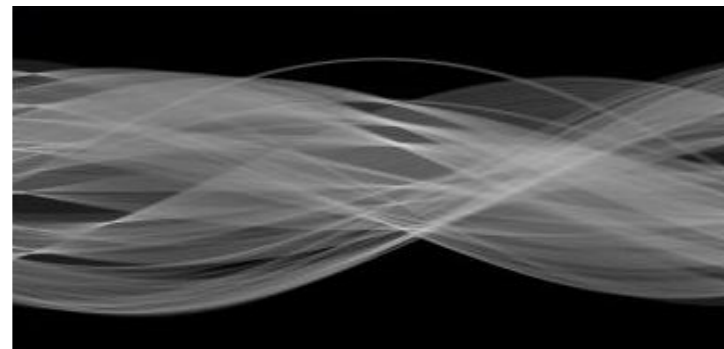
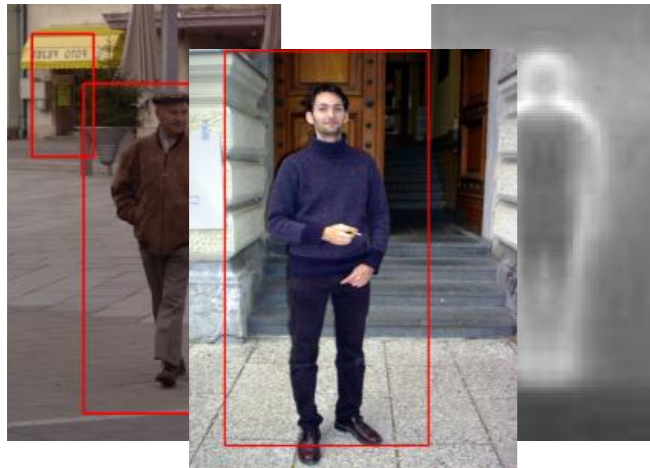
Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

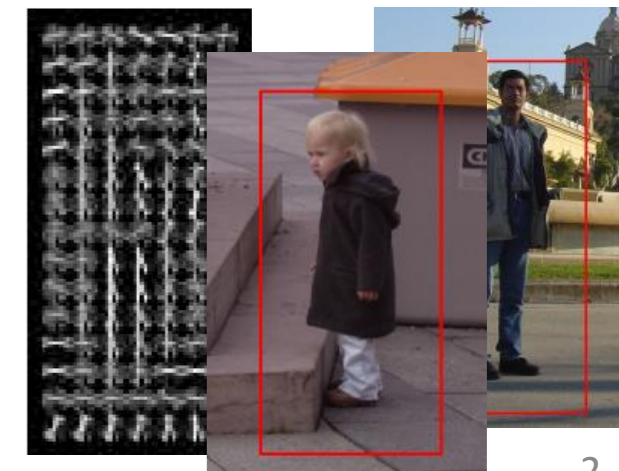
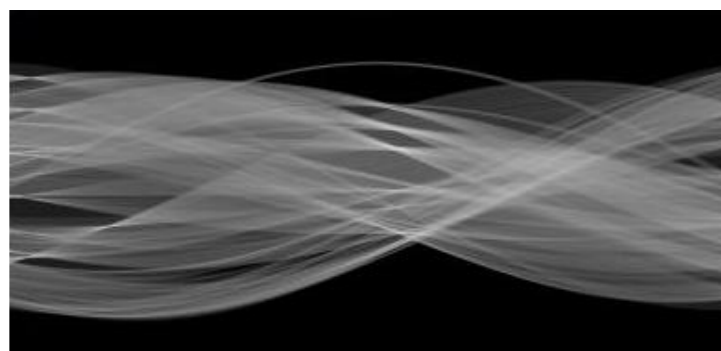
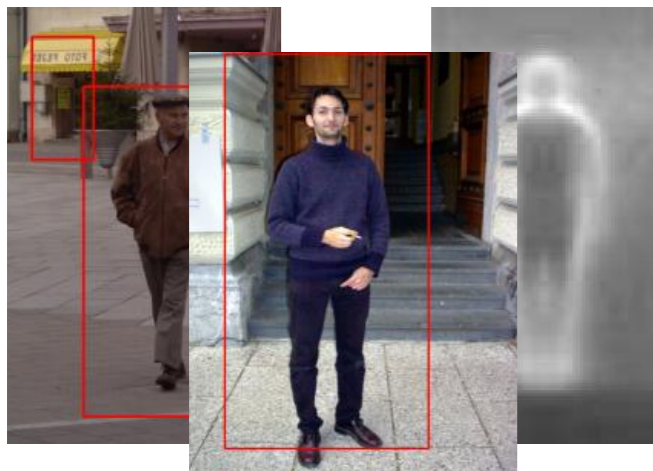
Гнеушев Александр Николаевич 

20.03.2026

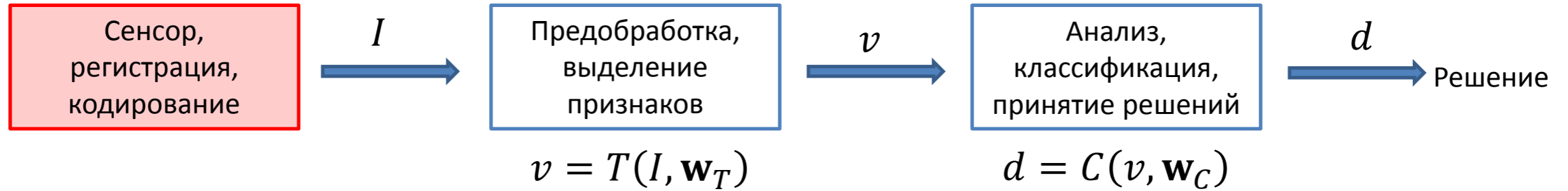


Математические модели регистрации и представления изображений

Тема 2

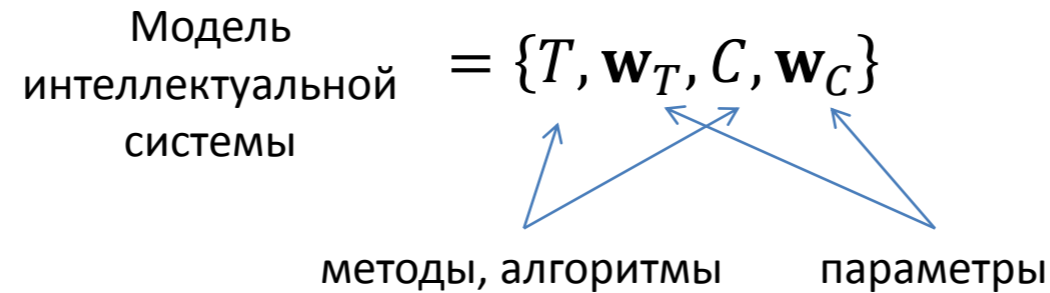


Модель интеллектуальной системы

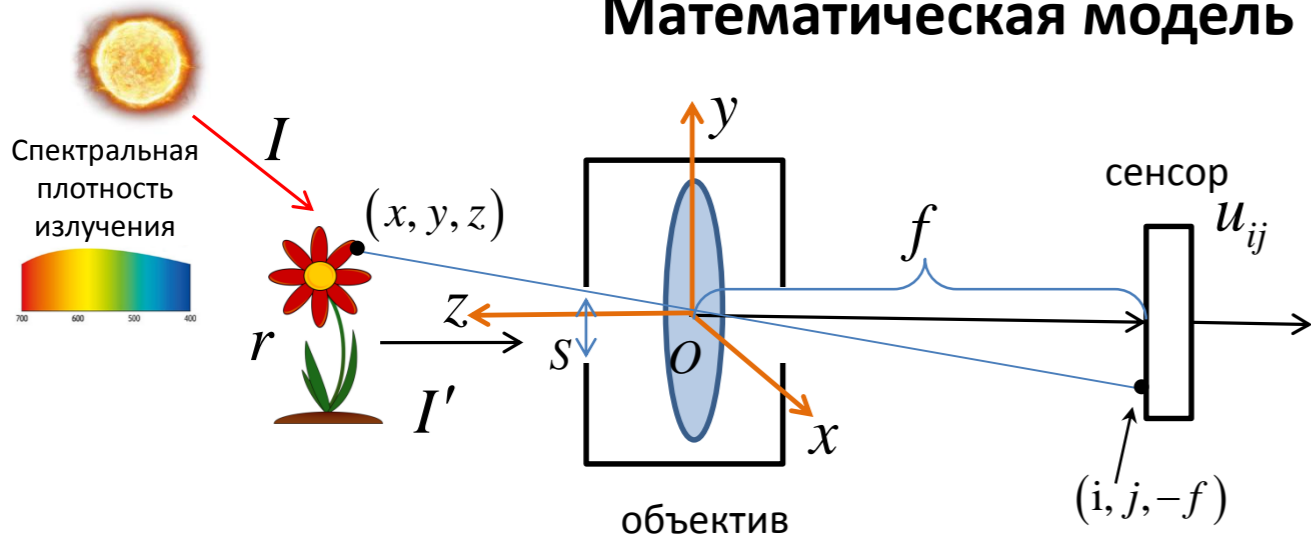


- изображение
- звук
- кардиограмма
- временные ряды
- <...>

$$F(I, \mathbf{W}) = (C \circ T)(I, \mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T) = C(T(I, \mathbf{w}_T), \mathbf{w}_C)$$
$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_C, \mathbf{w}_T\}$$



Математическая модель и устройство видеокамеры.



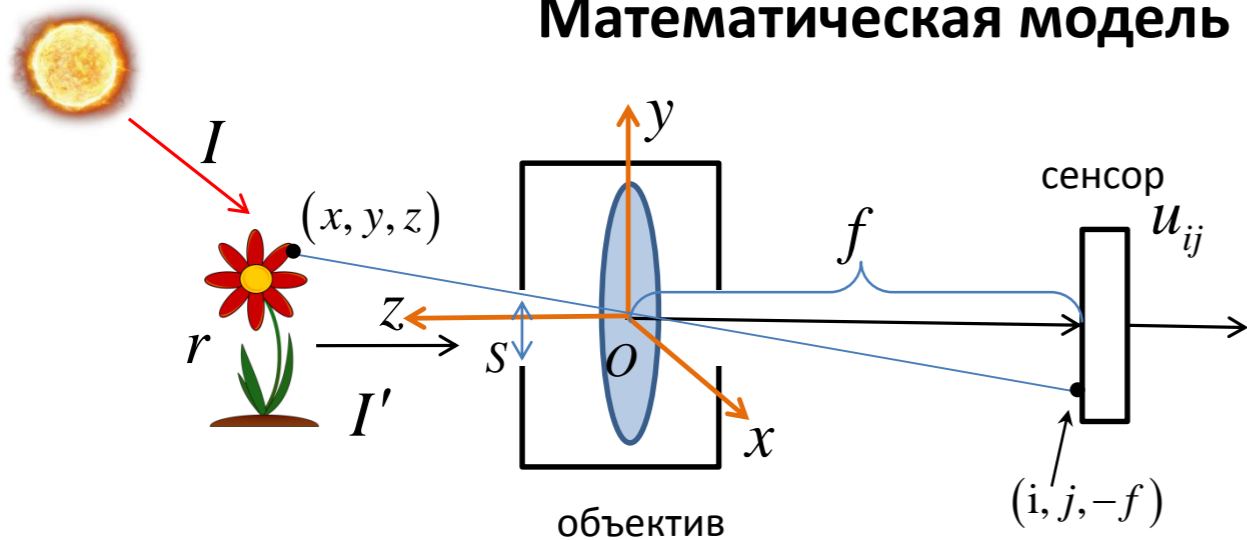
$$I' = r \cdot I, 0 < r \leq 1$$

← Коэффициент отражения/пропускания

$$(i, j) = \left(f \cdot \frac{x}{z}, f \cdot \frac{y}{z} \right)$$

← Перспективная проекция

Математическая модель и устройство видеокamеры.

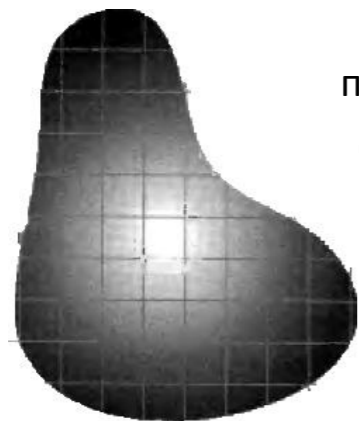


$$I' = r \cdot I, \quad 0 < r \leq 1$$

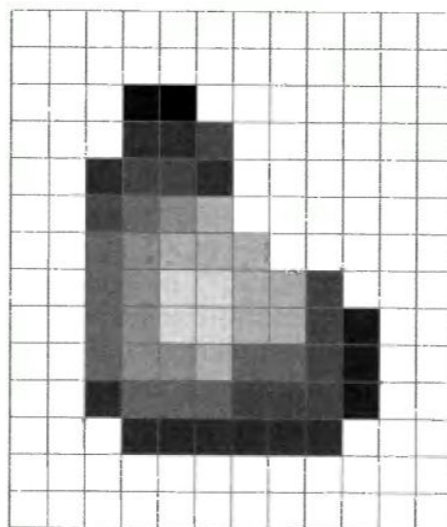
← Коэффициент отражения/пропускания

$$(i, j) = \left(f \cdot \frac{x}{z}, f \cdot \frac{y}{z} \right)$$

← Перспективная проекция

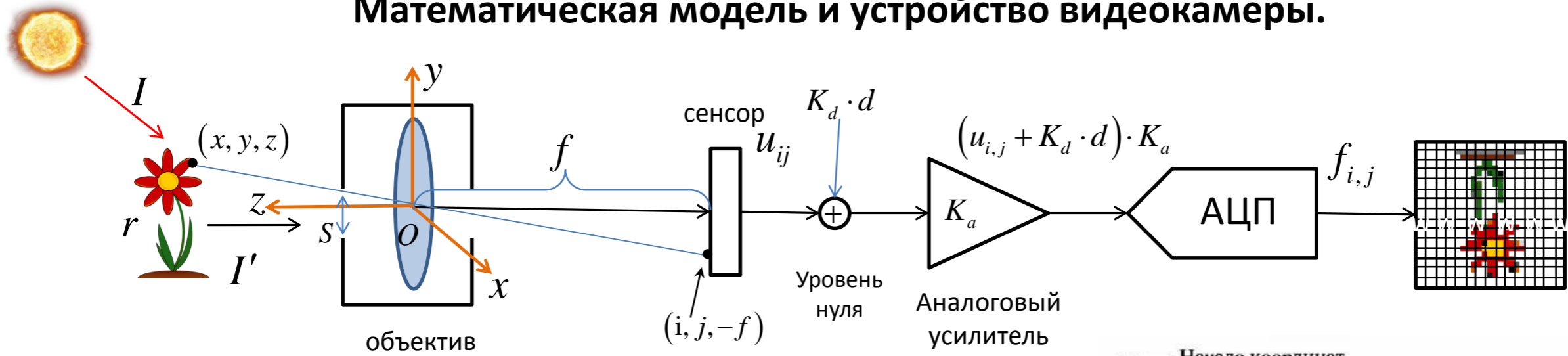


Проекция с
пространственной
дискретизацией



Изображение – это двумерное отображение наблюдаемой сцены, возникающее как результат регистрации светового потока с помощью фокусировки на сенсор.

Математическая модель и устройство видеокамеры.

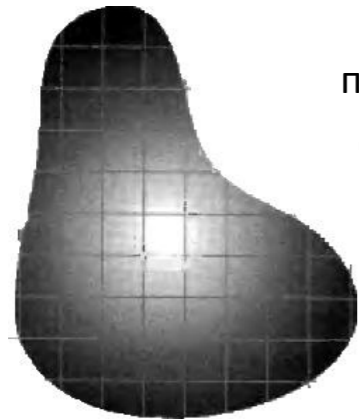


$$I' = r \cdot I, \quad 0 < r \leq 1$$

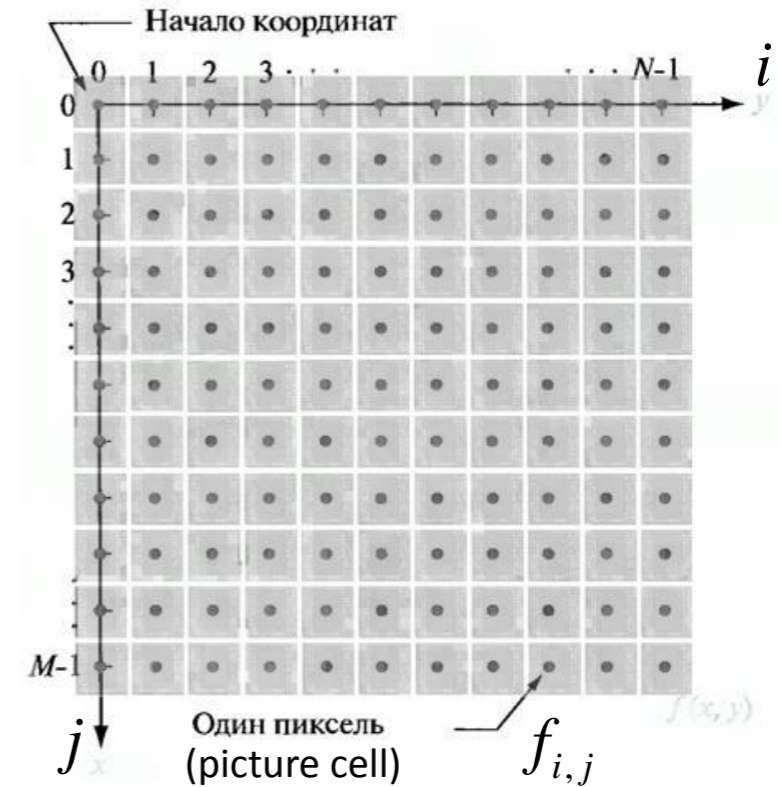
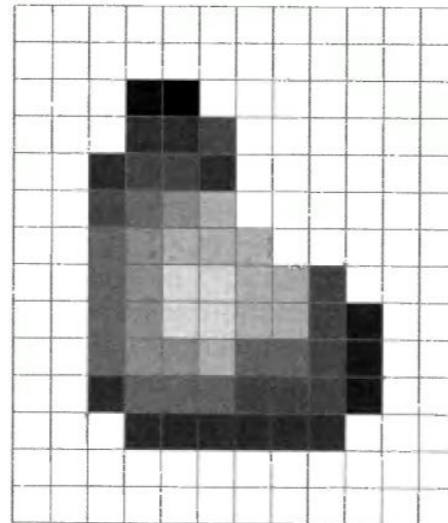
← Коэффициент отражения/пропускания

$$(i, j) = \left(f \cdot \frac{x}{z}, f \cdot \frac{y}{z} \right)$$

← Перспективная проекция

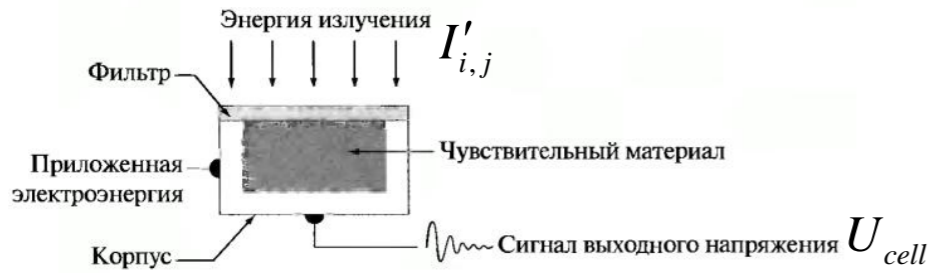
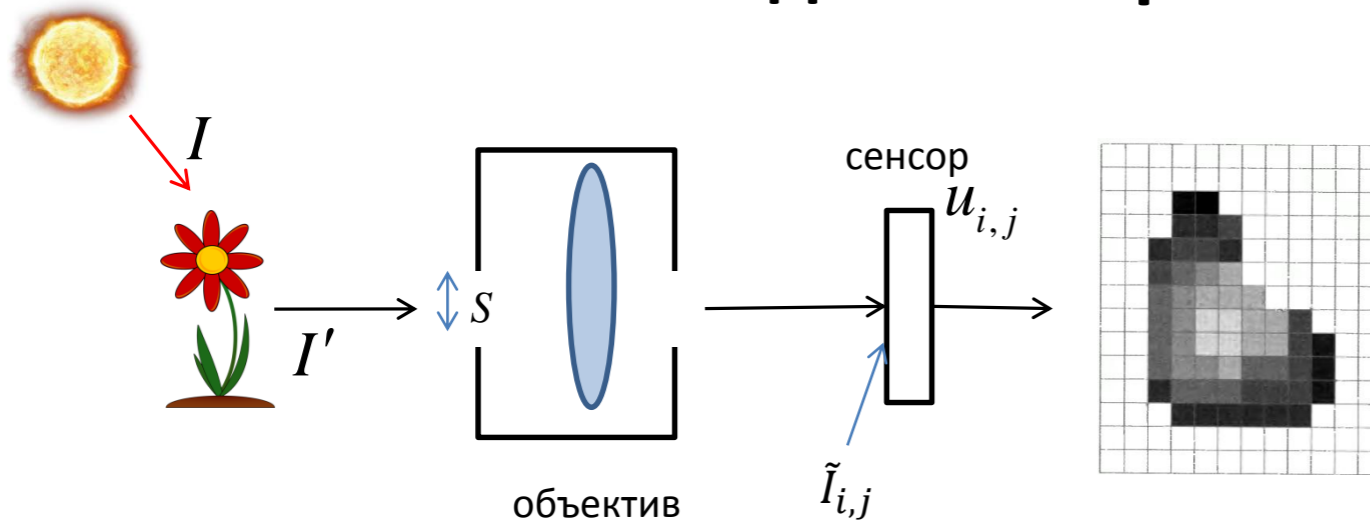


Проекция с пространственной дискретизацией



Изображение – это двумерное отображение наблюдаемой сцены, возникающее как результат регистрации светового потока с помощью фокусировки на сенсор.

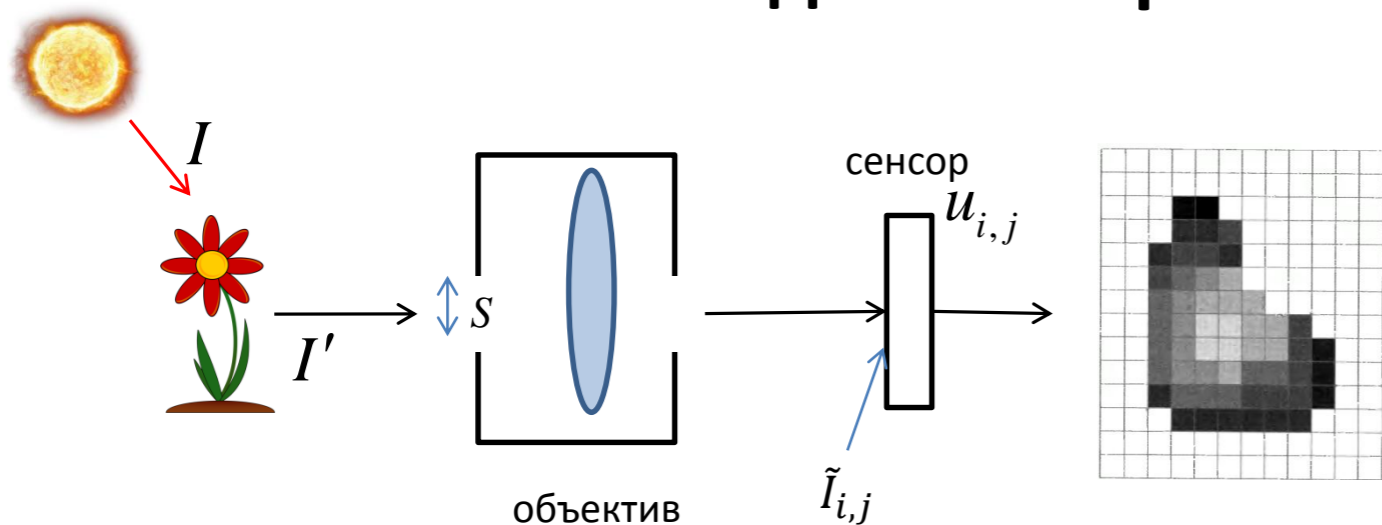
Видео сенсор и экспонирование



$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot \int_0^E I'_{i,j}(t + \tau) d\tau \approx S \cdot I'_{i,j}(t) \cdot E = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

$\tilde{I}_{i,j}(t)$: площадь диафрагмы
 S : площадь диафрагмы
 $\int_0^E I'_{i,j}(t + \tau) d\tau$: время экспозиции
 E : время экспозиции
 $I'_{i,j}(t)$: энергия излучения
 $S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$: экспозиция

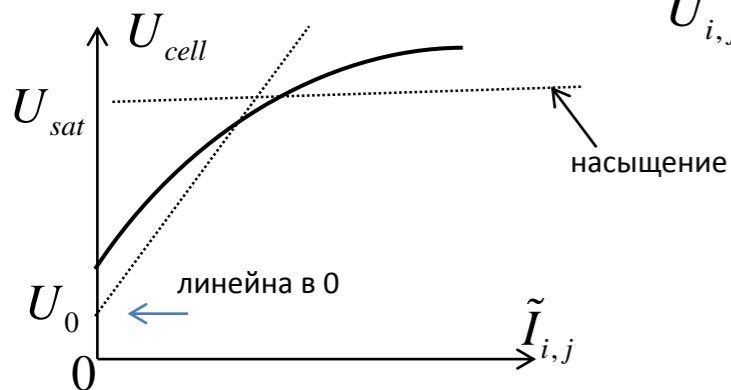
Видео сенсор и экспонирование



$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot \int_0^E I'_{i,j}(t + \tau) d\tau \approx S \cdot I'_{i,j}(t) \cdot E = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

← Время экспозиции
← площадь диафрагмы
← экспозиция

Характеристика ячейки



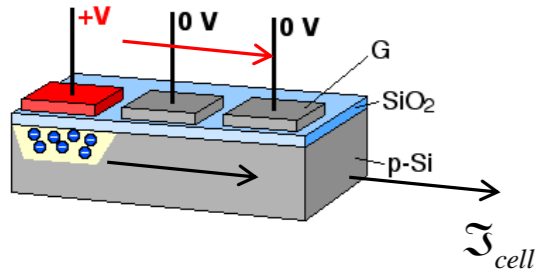
$$U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) \approx U_0 + K_U \cdot \tilde{I}_{i,j}$$

Два типа чувствительных элементов:

- ПЗС (CCD, прибора с зарядовой связью)
- КМОП (CMOS, комплементарная логика на транзисторах метал-оксид-полупроводник)

Типы чувствительных элементов

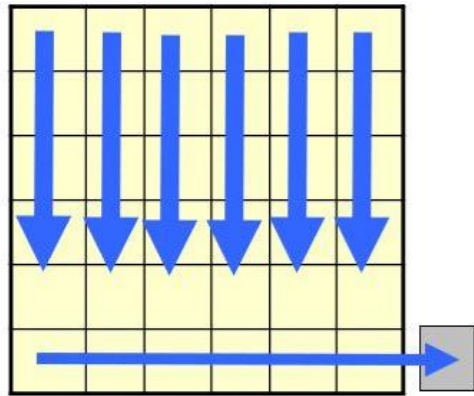
ПЗС



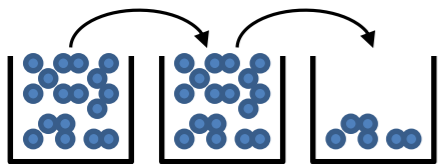
ПЗС

- + высокая чувствительность
- качественное изображение за счет низкого уровня шума
- дорого, блуминг при ярком освещении (боязнь точечного источника света)

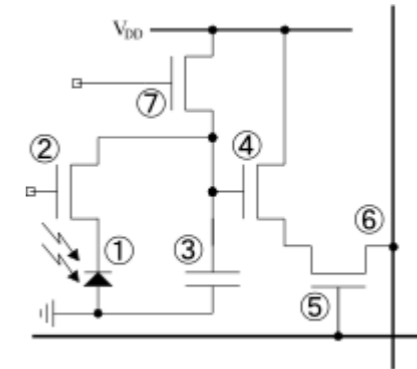
Матрица “фотодиодов”



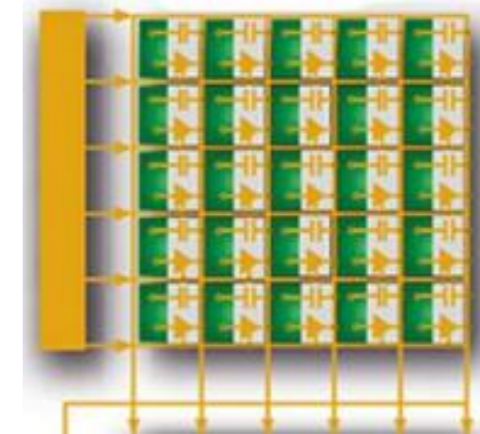
Стекание заряда (блуминг)



КМОП



Матрица “транзисторных сборок”



КМОП

- + дешево в производстве, независимая обработка каждой ячейки в матрице, кадрирование
- Высокий уровень теплового шума из-за обвязки, структурный шум (разброс характеристик), малая светочувствительная площадь в пикселе.

Цветной сенсор

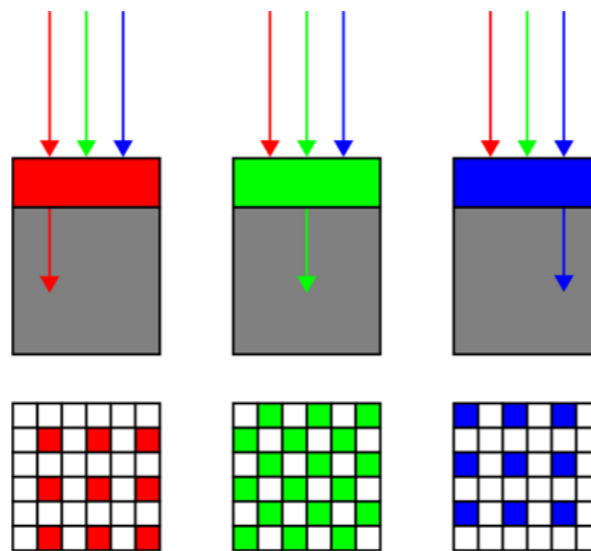
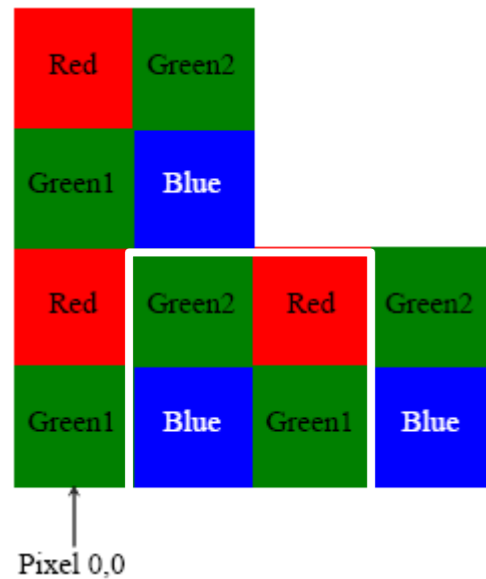


Схема Байера - RG,GB

R	G	R	G	R	G	R	G	R	G
G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
R	G	R	G	R	G	R	G	R	G
G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
R	G	R	G	R	G	R	G	R	G
G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
R	G	R	G	R	G	R	G	R	G
G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
R	G	R	G	R	G	R	G	R	G
G	B	G	B	G	B	G	B	G	B

Для отделения компонент светового поля, ответственных за цветовое восприятие, используются свето-фильтры чувствительных ячеек трех основных цветов. Геометрическая компоновка или схема расположения фильтров может быть различной.

Количество элементов Green в 2 раза больше, чем Red или Blue.

Использование фильтров уменьшает чувствительность цветного сенсора относительно монохромного.

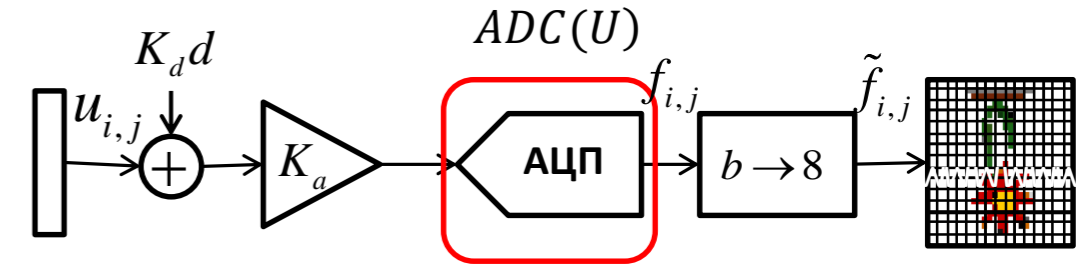
Существуют другие реализации схемы Байера – один из зеленых компонент заменяется на желтый или остается без фильтра.

Прямоугольной матрицей сенсора производится пространственная дискретизация непрерывного 2D поля интенсивности падающего света. Шаг дискретизации равномерный и определяет разрешение сенсора.

АЦП

Аналогово-цифровой преобразователь

Непрерывный диапазон U_{cell} делится на ряд дискретных уровней.
Функция АЦП задается отображением: $ADC(U_{cell}): U_{cell} \rightarrow f \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

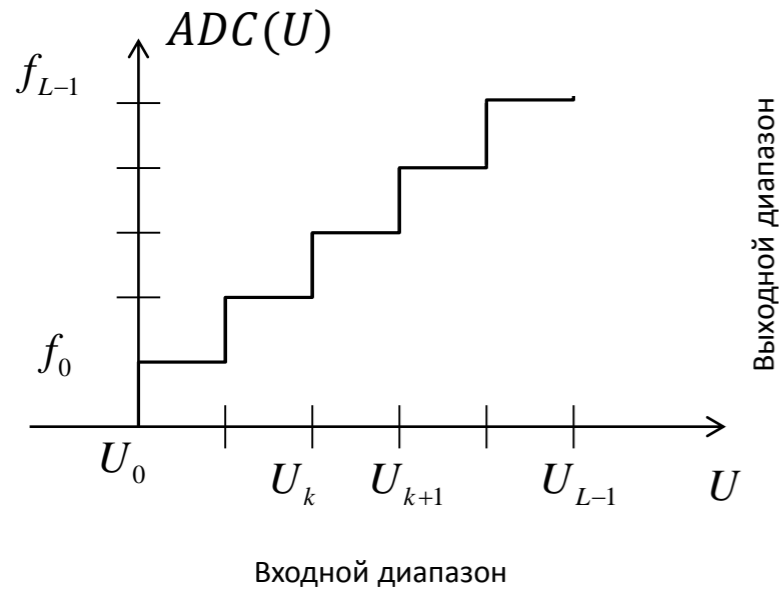
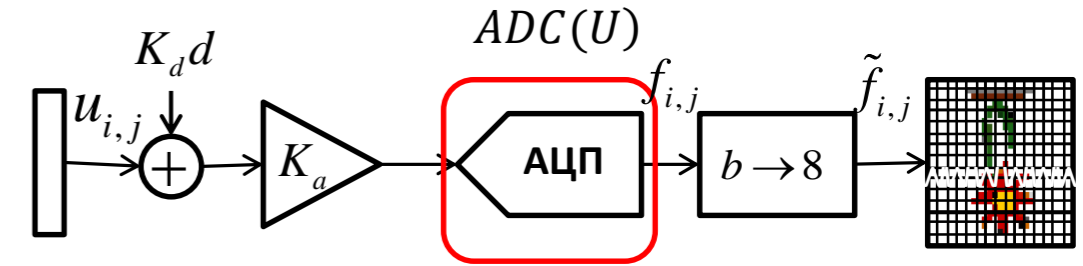


АЦП

Аналогово-цифровой преобразователь

Непрерывный диапазон U_{cell} делится на ряд дискретных уровней.
 Функция АЦП задается отображением: $ADC(U_{cell}): U_{cell} \rightarrow f \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

Задается разбиение $U_c = \{U_0, U_1, \dots, U_k, U_{L-1}\}$.



$$ADC(U) = \begin{cases} 0, & U < U_0, \\ f_k, & U_k \leq U < U_{k+1}, \quad k = \overline{0, L-2}, \\ f_{L-1}, & U \geq U_{L-2}. \end{cases}$$

U_k - пороги квантования, $[U_0, U_{L-1}]$ - входной диапазон АЦП,

f_k - уровни квантования, $k \in [0, L-1]$ - выходной диапазон градаций яркости,

$L = 2^b$, b - разрядность АЦП сенсора, $b = 10, 12, 14, 16$

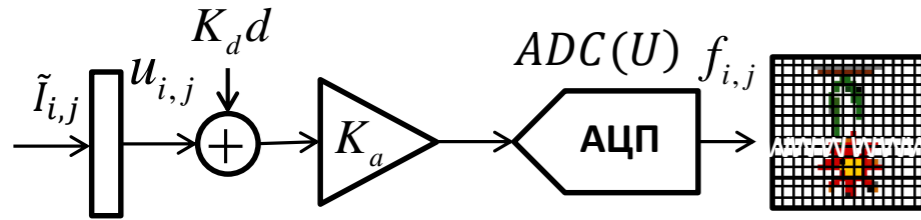
$b = 8: f \in [0, 255]$

$b = 10: f \in [0, 1023]$

Для согласования выхода сенсора и входа АЦП используется линейное преобразование: сдвиг “нуля” и усиление.

Математическая модель видеокамеры

Для монохромного сенсора



$$f_{i,j}(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) + K_d \cdot d\right) K_a\right)$$

$$f_{i,j} \in \{0, \dots, 2^b - 1\},$$

$$i = \overline{0, W-1}, j = \overline{0, H-1}$$

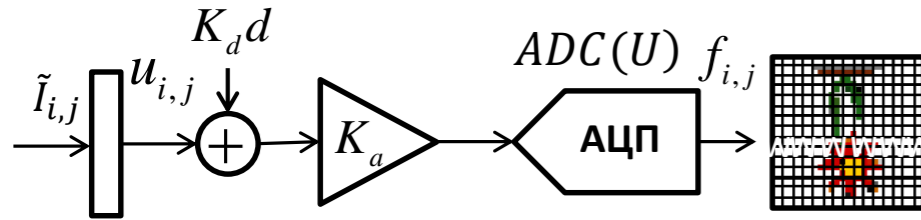
$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

$$U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) \approx U_0 + K_U \cdot \tilde{I}_{i,j}$$

$$ADC(U) = \begin{cases} 0, & U < U_0, \\ f_k, & U_k \leq U < U_{k+1}, \quad k = \overline{0, L-2}, \\ f_{L-1}, & U \geq U_{L-2}. \end{cases}$$

Математическая модель видеокамеры

Для монохромного сенсора



$$f_{i,j} \in \{0, \dots, 2^b - 1\},$$

$$i = \overline{0, W-1}, j = \overline{0, H-1}$$

$$f_{i,j}(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) + K_d \cdot d\right) K_a\right) =$$

$$= ADC\left(\underbrace{K_u \cdot K_a \cdot S \cdot E \cdot I'_{i,j}}_{\tilde{E}} + \underbrace{K_d \cdot K_a \cdot d}_{C_1} + \underbrace{U_0 \cdot K_a}_{C_2}\right) = ADC(\tilde{E} \cdot I'_{i,j} + C_1 \cdot d + C_2)$$

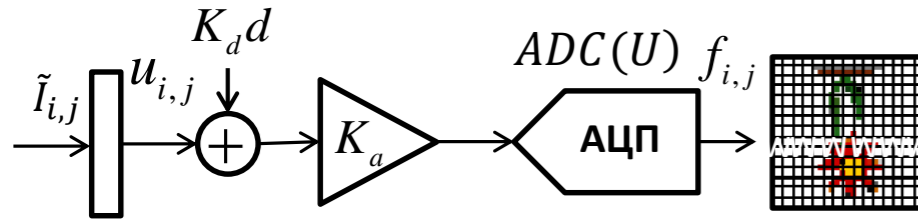
$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

$$U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) \approx U_0 + K_U \cdot \tilde{I}_{i,j}$$

$$ADC(U) = \begin{cases} 0, & U < U_0, \\ f_k, & U_k \leq U < U_{k+1}, \quad k = \overline{0, L-2}, \\ f_{L-1}, & U \geq U_{L-2}. \end{cases}$$

Математическая модель видеокамеры

Для монохромного сенсора



$$f_{i,j} \in \{0, \dots, 2^b - 1\},$$

$$i = \overline{0, W-1}, j = \overline{0, H-1}$$

$$f_{i,j}(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) + K_d \cdot d\right) K_a\right) =$$

$$= ADC\left(\underbrace{K_u \cdot K_a \cdot S \cdot E \cdot I'_{i,j}}_{\tilde{E}} + \underbrace{K_d \cdot K_a \cdot d}_{C_1} + \underbrace{U_0 \cdot K_a}_{C_2}\right) = ADC(\tilde{E} \cdot I'_{i,j} + C_1 \cdot d + C_2)$$

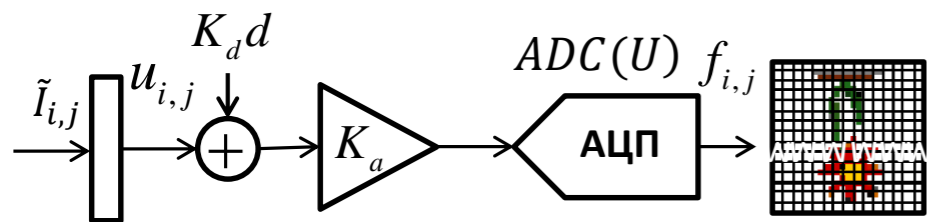
$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

$$U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) \approx U_0 + K_U \cdot \tilde{I}_{i,j}$$

$$ADC(U) = \begin{cases} 0, & U < U_0, \\ f_k, & U_k \leq U < U_{k+1}, \quad k = \overline{0, L-2}, \\ f_{L-1}, & U \geq U_{L-2}. \end{cases}$$

Математическая модель видеокамеры

Для монохромного сенсора



$$f_{i,j} \in \{0, \dots, 2^b - 1\},$$

$$i = \overline{0, W-1}, j = \overline{0, H-1}$$

$$f_{i,j}(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) + K_d \cdot d\right) K_a\right) =$$

$$= ADC\left(\underbrace{K_u \cdot K_a \cdot S \cdot E \cdot I'_{i,j}}_{\tilde{E}} + \underbrace{K_d \cdot K_a \cdot d}_{C_1} + \underbrace{U_0 \cdot K_a}_{C_2}\right) = ADC(\tilde{E} \cdot I'_{i,j} + C_1 \cdot d + C_2)$$

$$\tilde{I}_{i,j}(t) = S \cdot E \cdot I'_{i,j}(t)$$

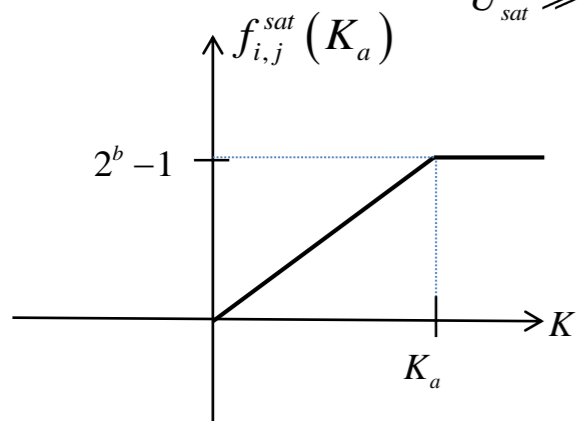
$$U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) \approx U_0 + K_U \cdot \tilde{I}_{i,j}$$

$$ADC(U) = \begin{cases} 0, & U < U_0, \\ f_k, & U_k \leq U < U_{k+1}, \quad k = \overline{0, L-2}, \\ f_{L-1}, & U \geq U_{L-2}. \end{cases}$$

K_a, C_1, C_2 - находятся из условий калибровки:

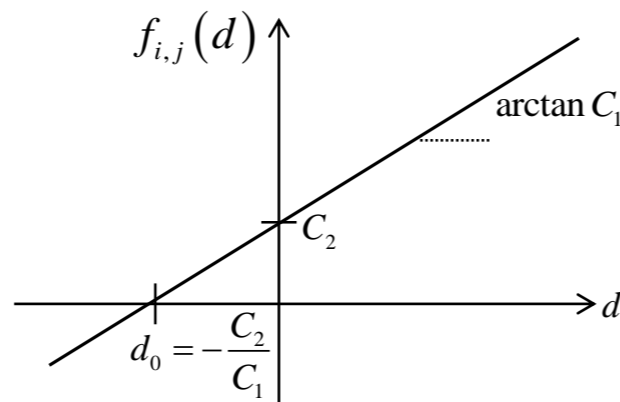
$$K_a: f_{i,j}(\tilde{E}_{\max}, I'_{sat}, K_a) = ADC(U_{sat} \cdot K_a) = 2^b - 1$$

$$U_{sat} \gg K_d \cdot d$$



объектив засвечен

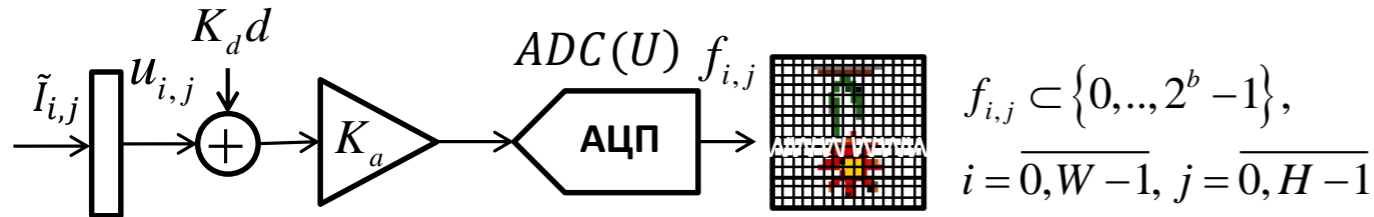
$$C_1, C_2: f_{i,j}(\tilde{E} = 0, d_0) = ADC(C_1 \cdot d_0 + C_2) = 0$$



диафрагма закрыта

Математическая модель видеокамеры

Для монохромного сенсора



$$f_{i,j} \in \{0, \dots, 2^b - 1\},$$

$$i = \overline{0, W-1}, j = \overline{0, H-1}$$

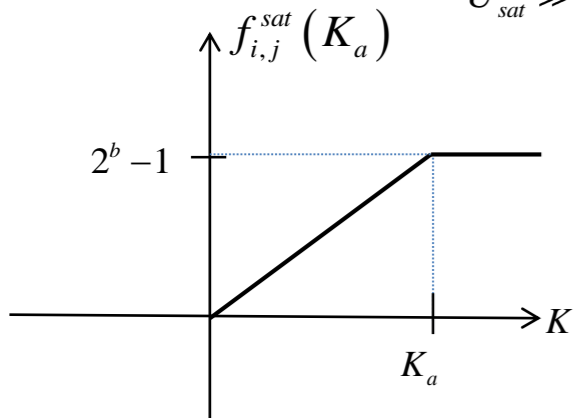
$$f_{i,j}(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(U_{i,j}(\tilde{I}_{i,j}) + K_d \cdot d\right) K_a\right) =$$

$$= ADC\left(\underbrace{K_u \cdot K_a \cdot S \cdot E \cdot I'_{i,j}}_{\tilde{E}} + \underbrace{K_d \cdot K_a \cdot d}_{C_1} + \underbrace{U_0 \cdot K_a}_{C_2}\right) = ADC(\tilde{E} \cdot I'_{i,j} + C_1 \cdot d + C_2)$$

K_a, C_1, C_2 - находятся из условий калибровки:

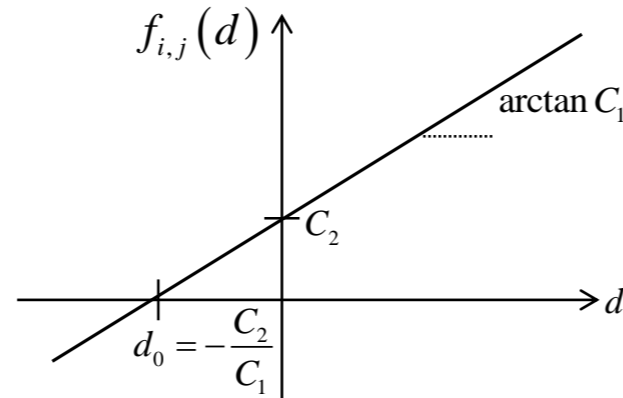
$$K_a: f_{i,j}(\tilde{E}_{\max}, I'_{\text{sat}}, K_a) = ADC(U_{\text{sat}} \cdot K_a) = 2^b - 1$$

$$U_{\text{sat}} \gg K_d \cdot d$$



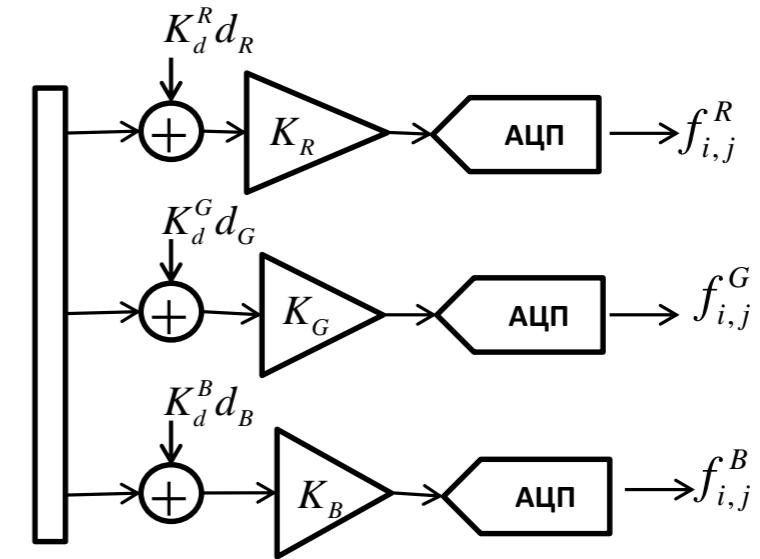
объектив засвечен

$$C_1, C_2: f_{i,j}(\tilde{E} = 0, d_0) = ADC(C_1 \cdot d_0 + C_2) = 0$$



диафрагма закрыта

Для цветного сенсора:



$$f_{i,j}^C(E, S, I'_{i,j}) = ADC\left(\left(K_u^C \cdot S \cdot E \cdot I'_{i,j} + U_0^C + K_d^C \cdot d_C\right) K_C\right)$$

$$C = \{R, G, B\}$$

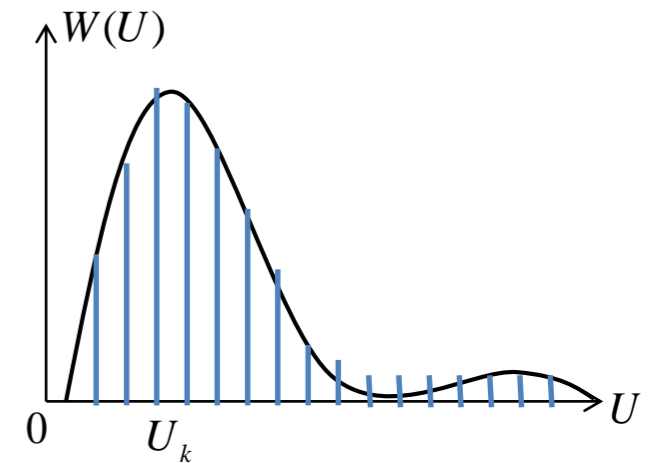
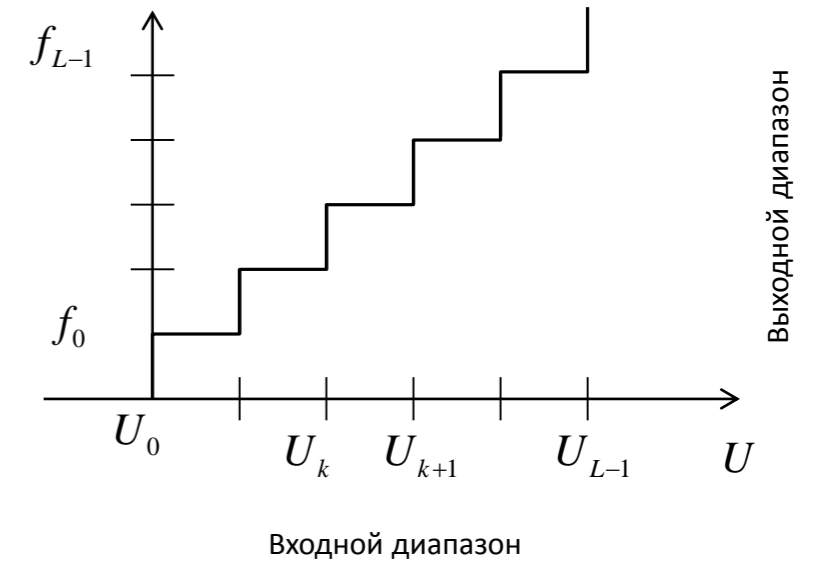
K_R, K_G, K_B - аналоговые усилители для каждого набора пикселей с соответствующим световым фильтром. Фиксируются при калибровке для выравнивания характеристик цветных каналов.

Квантователь

Задача - найти оптимальные пары порога и выходного уровня $U_k \in \{U_0, \dots, U_{L-1}\}$, $f_k \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

Ошибка квантования: $\varepsilon = U - f_k$

$$M[\varepsilon^2] = M[(U - f_k)^2] \rightarrow \min_{\{U_k, f_k\}}$$



Квантователь

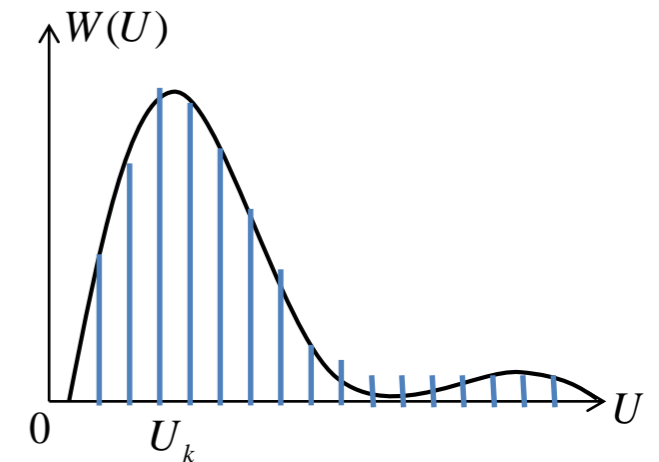
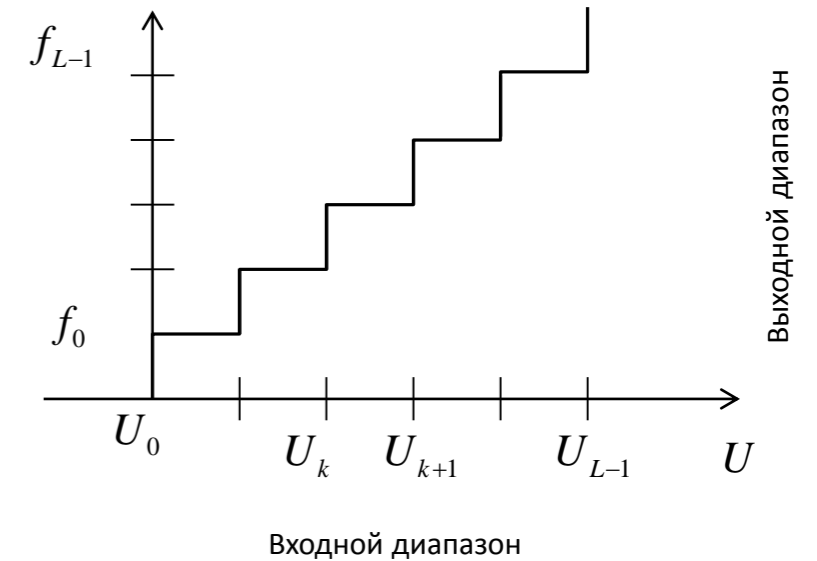
Задача - найти оптимальные пары порога и выходного уровня $U_k \in \{U_0, \dots, U_{L-1}\}$, $f_k \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

Ошибка квантования: $\varepsilon = U - f_k$

$$M[\varepsilon^2] = M[(U - f_k)^2] \rightarrow \min_{\{U_k, f_k\}}$$

$$M[\varepsilon^2] = \int_{U_0}^{U_L} (U - f_k)^2 W(U) dU = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 W(U) dU,$$

где $W(U)$ - плотность распределения U по диапазону.



Квантователь

Задача - найти оптимальные пары порога и выходного уровня $U_k \in \{U_0, \dots, U_{L-1}\}$, $f_k \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

Ошибка квантования: $\varepsilon = U - f_k$

$$M[\varepsilon^2] = M[(U - f_k)^2] \rightarrow \min_{\{U_k, f_k\}}$$

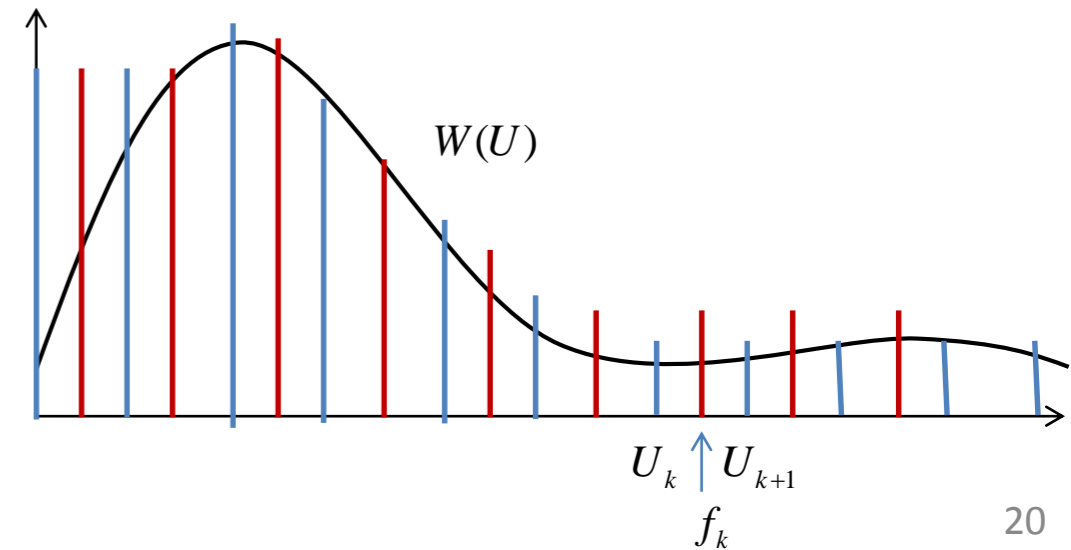
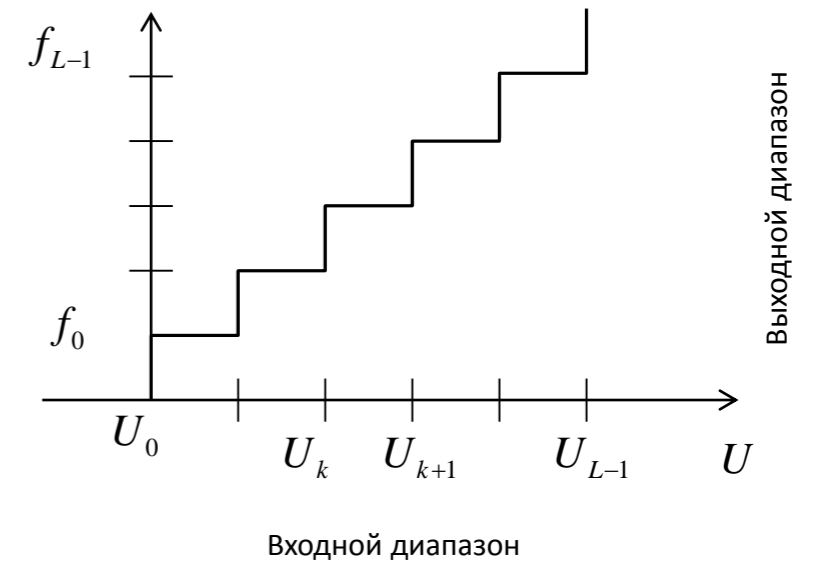
$$M[\varepsilon^2] = \int_{U_0}^{U_L} (U - f_k)^2 W(U) dU = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 W(U) dU,$$

где $W(U)$ - плотность распределения U по диапазону.

Случай 1

Для $(U_{k+1} - U_k) \ll (U_L - U_0)$, $L \gg 1 \Rightarrow W(U) \approx const$ при $U \in (U_{k+1} - U_k) \rightarrow W(U) \approx W_{f_k}$

$$M[\varepsilon^2] = \sum_{k=0}^{L-1} W_{f_k} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 dU = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{L-1} W_{f_k} \left((U_{k+1} - f_k)^3 - (U_k - f_k)^3 \right) \rightarrow \min_{f_k}$$



Квантователь

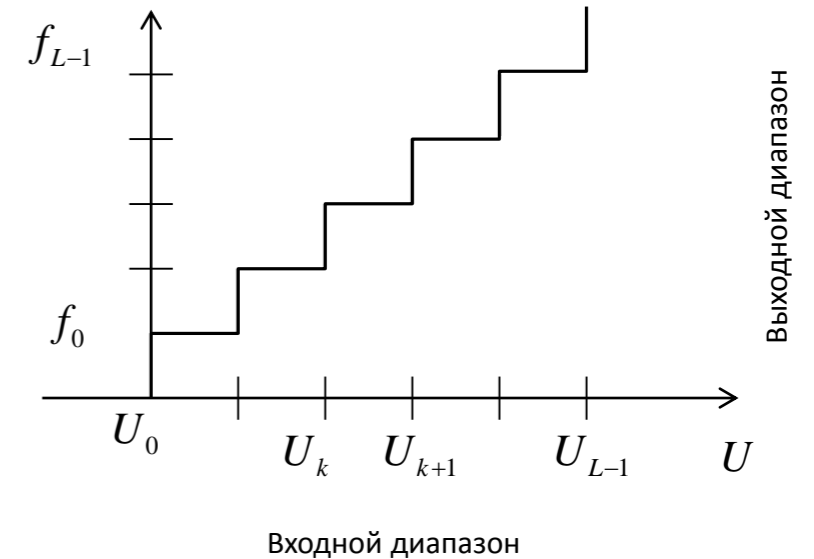
Задача - найти оптимальные пары порога и выходного уровня $U_k \in \{U_0, \dots, U_{L-1}\}$, $f_k \in \{f_0, \dots, f_{L-1}\}$.

Ошибка квантования: $\varepsilon = U - f_k$

$$M[\varepsilon^2] = M[(U - f_k)^2] \rightarrow \min_{\{U_k, f_k\}}$$

$$M[\varepsilon^2] = \int_{U_0}^{U_L} (U - f_k)^2 W(U) dU = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 W(U) dU,$$

где $W(U)$ - плотность распределения U по диапазону.

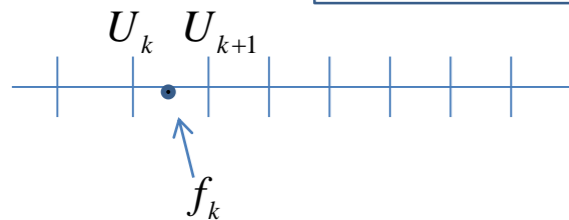


Случай 1

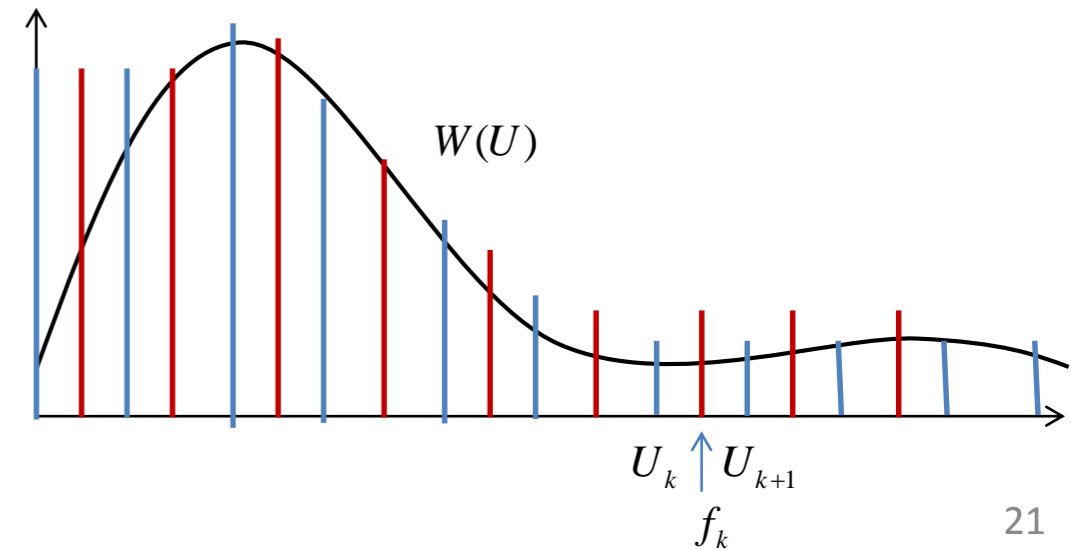
Для $(U_{k+1} - U_k) \ll (U_L - U_0)$, $L \gg 1 \Rightarrow W(U) \approx const$ при $U \in (U_{k+1} - U_k) \rightarrow W(U) \approx W_{f_k}$

$$M[\varepsilon^2] = \sum_{k=0}^{L-1} W_{f_k} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 dU = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{L-1} W_{f_k} ((U_{k+1} - f_k)^3 - (U_k - f_k)^3) \rightarrow \min_{f_k}$$

$$\frac{\partial M[\varepsilon^2]}{\partial f_k} = 0 \Rightarrow f_k = \frac{(U_{k+1} + U_k)}{2} \leftarrow \text{середина между порогами}$$



$$M[\varepsilon^2] = \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{L-1} W_{f_k} (U_{k+1} - U_k)^3$$



Квантователь

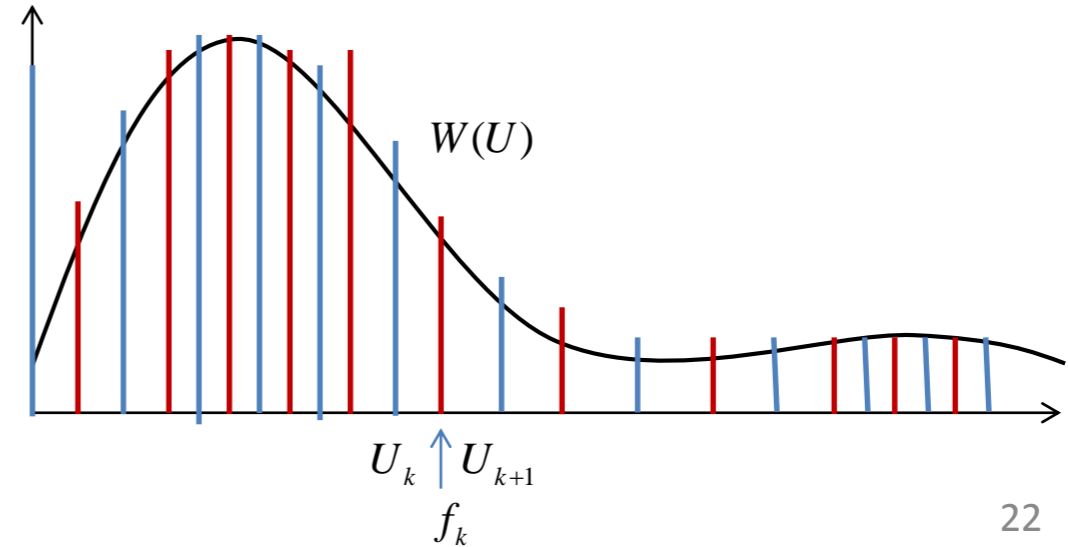
Случай 2

Дифференцируя $M[\varepsilon^2]$ по U_k, f_k получаем $2L-1$ уравнений:

$$\begin{cases} (U_k - f_k)^2 W(U_k) - (U_k - f_{k-1})^2 W(U_k) = 0, & k = \overline{1, L-1} \\ \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k) W(U) dU = 0, & k = \overline{0, L-1} \end{cases}$$

$[U_0, U_{L-1}]$ - диапазон сенсора

$$M[\varepsilon^2] = \int_{U_0}^{U_L} (U - f_k)^2 W(U) dU = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 W(U) dU,$$



Квантователь

Случай 2

Дифференцируя $M[\varepsilon^2]$ по U_k, f_k получаем $2L-1$ уравнений:

$$\begin{cases} (U_k - f_k)^2 W(U_k) - (U_k - f_{k-1})^2 W(U_k) = 0, & k = \overline{1, L-1} \\ \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k) W(U) dU = 0, & k = \overline{0, L-1} \end{cases}$$

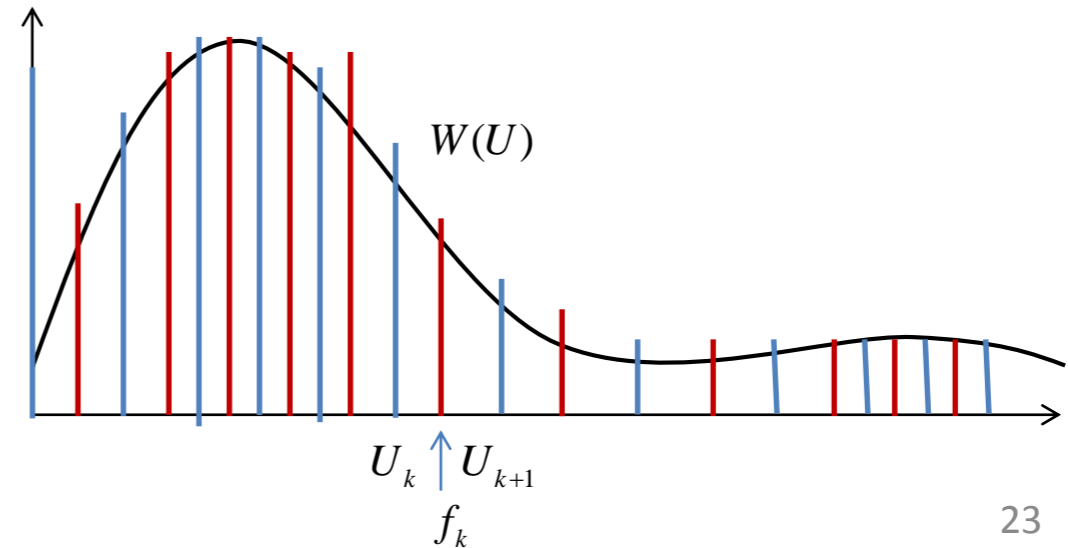
$[U_0, U_{L-1}]$ - диапазон сенсора

$$\Rightarrow \begin{cases} U_k = (f_k + f_{k-1})/2, & k = \overline{1, L-1} \\ f_k = \frac{\int_{U_k}^{U_{k+1}} UW(U) dU}{\int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU}, & k = \overline{0, L-1} \end{cases} \quad \text{- Квантователь Ллойда-Макса}$$

Оптимальные пороги U_k лежат по середине между соседними уровнями f_k .

$$M[\varepsilon^2] = M[U^2] - \sum_{k=0}^{L-1} f_k^2 \int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU$$

$$M[\varepsilon^2] = \int_{U_0}^{U_L} (U - f_k)^2 W(U) dU = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k)^2 W(U) dU,$$



Квантователь

Случай 2

Дифференцируя $M[\varepsilon^2]$ по U_k, f_k получаем $2L-1$ уравнений:

$$\begin{cases} (U_k - f_k)^2 W(U_k) - (U_k - f_{k-1})^2 W(U_k) = 0, & k = \overline{1, L-1} \\ \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k) W(U) dU = 0, & k = \overline{0, L-1} \end{cases}$$

$[U_0, U_{L-1}]$ - диапазон сенсора

$$\Rightarrow \begin{cases} U_k = (f_k + f_{k-1})/2, & k = \overline{1, L-1} \\ f_k = \frac{\int_{U_k}^{U_{k+1}} U W(U) dU}{\int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU}, & k = \overline{0, L-1} \end{cases} \quad \text{- Квантователь Ллойда-Макса}$$

Оптимальные пороги U_k лежат по середине между соседними уровнями f_k .

$$M[\varepsilon^2] = M[U^2] - \sum_{k=0}^{L-1} f_k^2 \int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU$$

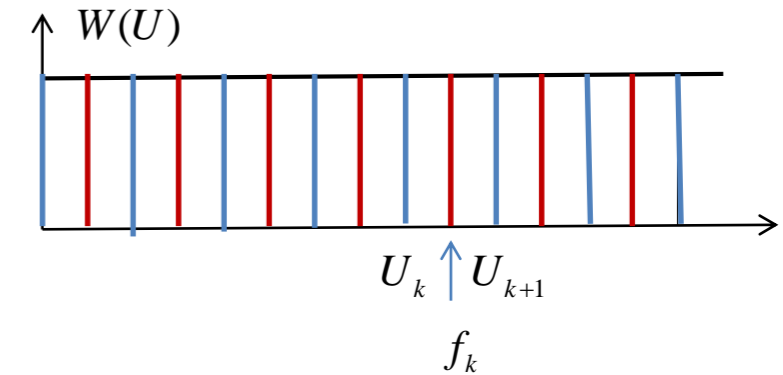
Пусть $W(U)$ - равномерное распределение

$$U_k = U_0 + (k-1)\Delta U, \quad k = \overline{1, L-1}$$

$$f_k = U_k + \frac{\Delta U}{2}, \quad k = \overline{0, L-1}$$

$$\Delta U = \frac{U_L - U_0}{L}$$

$$M[\varepsilon^2] = \frac{\Delta U^2}{12}$$



Квантователь

Случай 2

Дифференцируя $M[\varepsilon^2]$ по U_k, f_k получаем $2L-1$ уравнений:

$$\begin{cases} (U_k - f_k)^2 W(U_k) - (U_k - f_{k-1})^2 W(U_k) = 0, & k = \overline{1, L-1} \\ \int_{U_k}^{U_{k+1}} (U - f_k) W(U) dU = 0, & k = \overline{0, L-1} \end{cases}$$

$[U_0, U_{L-1}]$ - диапазон сенсора

$$\Rightarrow \begin{cases} U_k = (f_k + f_{k-1})/2, & k = \overline{1, L-1} \\ f_k = \frac{\int_{U_k}^{U_{k+1}} U W(U) dU}{\int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU}, & k = \overline{0, L-1} \end{cases} \quad \text{- Квантователь Ллойда-Макса}$$

Оптимальные пороги U_k лежат по середине между соседними уровнями f_k .

$$M[\varepsilon^2] = M[U^2] - \sum_{k=0}^{L-1} f_k^2 \int_{U_k}^{U_{k+1}} W(U) dU$$

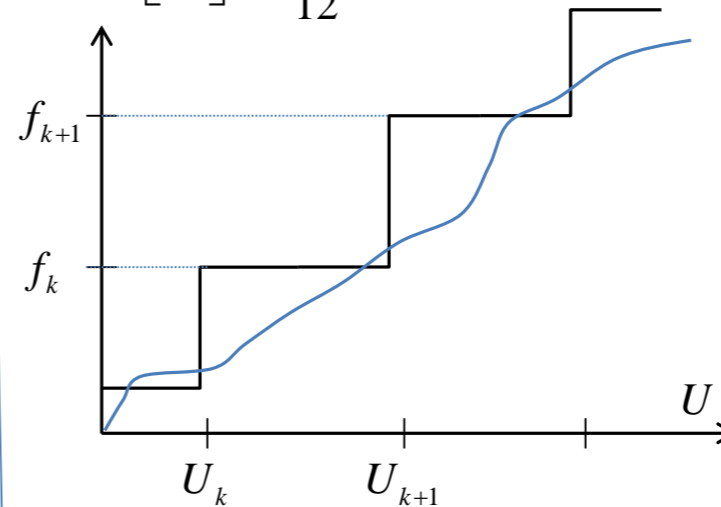
Пусть $W(U)$ - равномерное распределение

$$U_k = U_0 + (k-1)\Delta U, \quad k = \overline{1, L-1}$$

$$f_k = U_k + \frac{\Delta U}{2}, \quad k = \overline{0, L-1}$$

$$\Delta U = \frac{U_L - U_0}{L}$$

$$M[\varepsilon^2] = \frac{\Delta U^2}{12}$$



При равномерном квантовании для неискаженного визуального восприятия требуется не менее $L = 64$.

При небольшом L возникают ложные контуры

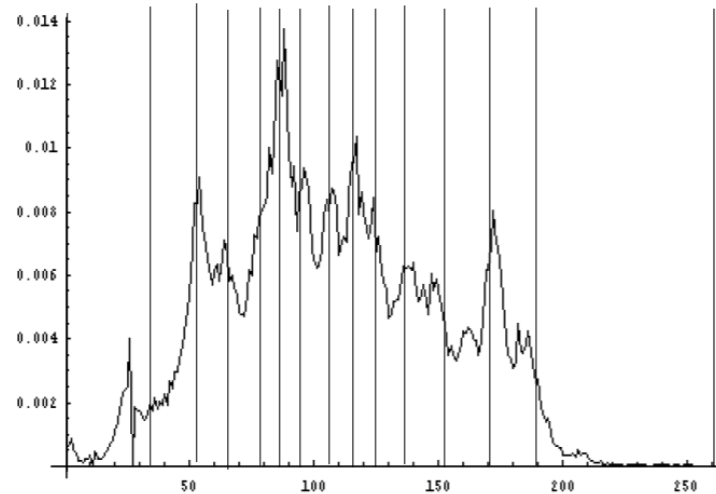


$L = 256$



$L = 14$

Неравномерное квантование

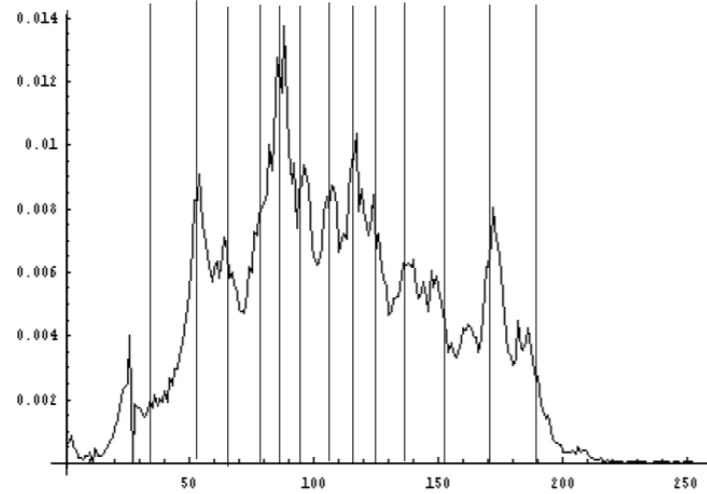


$L = 14$

Неравномерное квантование



$L=14$



Равномерное квантование с добавлением шума

Для разрушения ложных контуров можно добавлять равномерно распределенный шум в диапазоне:

$$\left[-\frac{\Delta U}{2}, \frac{\Delta U}{2} \right]$$

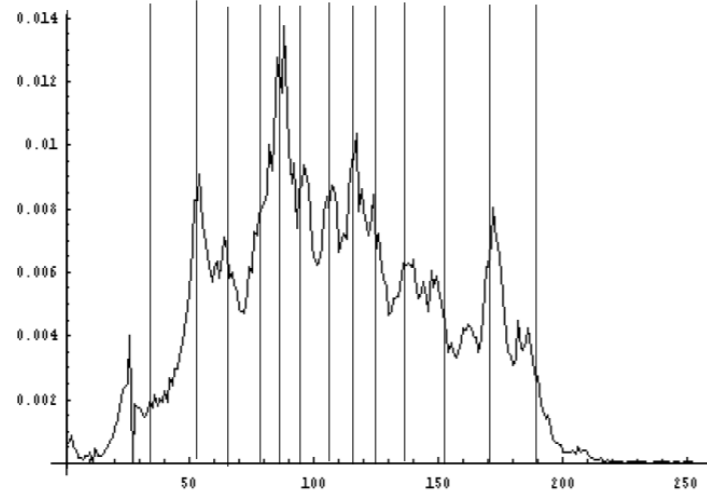


$L=14$

Неравномерное квантование



$L=14$



Равномерное квантование с добавлением шума

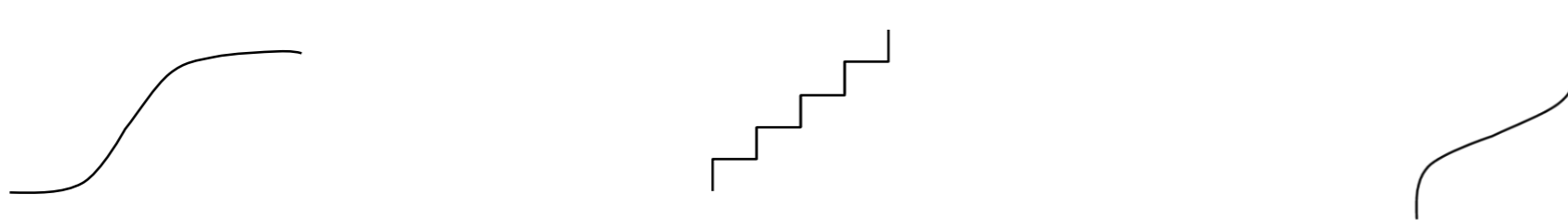
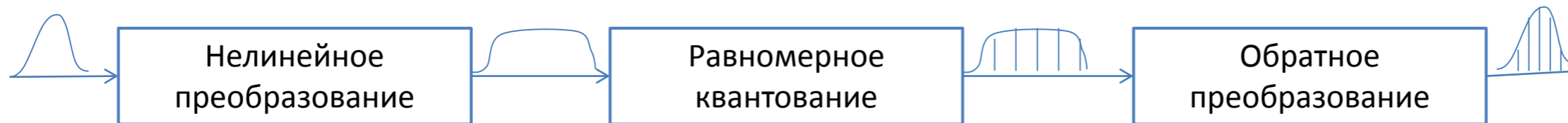


$L=14$

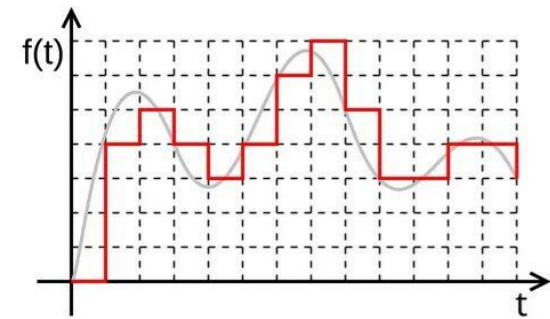
Для разрушения ложных контуров можно добавлять равномерно распределенный шум в диапазоне:

$$\left[-\frac{\Delta U}{2}, \frac{\Delta U}{2} \right]$$

Для неравномерного квантования можно использовать нелинейное преобразование



Некоторые прикладные задачи квантования



Преобразование из непрерывного (аналогового) сигнала в дискретный (цифровой) сигнал.

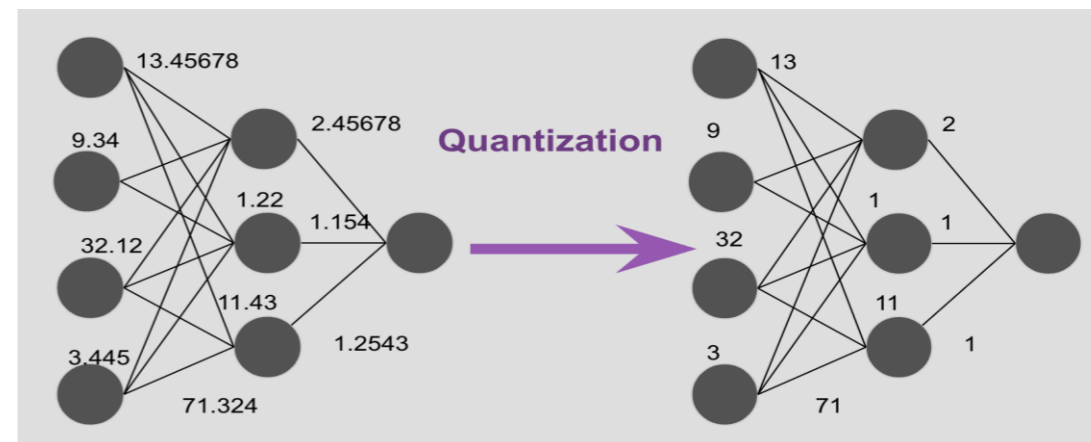


Удаление визуальной избыточности изображения путем округления представления.

Сжатие изображения с минимальными по СКО потерями в видео кодеках семейства **JPEG/MPEG/H.26x** путем квантования декоррелированных коэффициентов в ортогональном разложении.



Сжатие весов и активаций в нейросетевых моделях с целью удаления избыточности и ускорения вычислений мало битных значений.



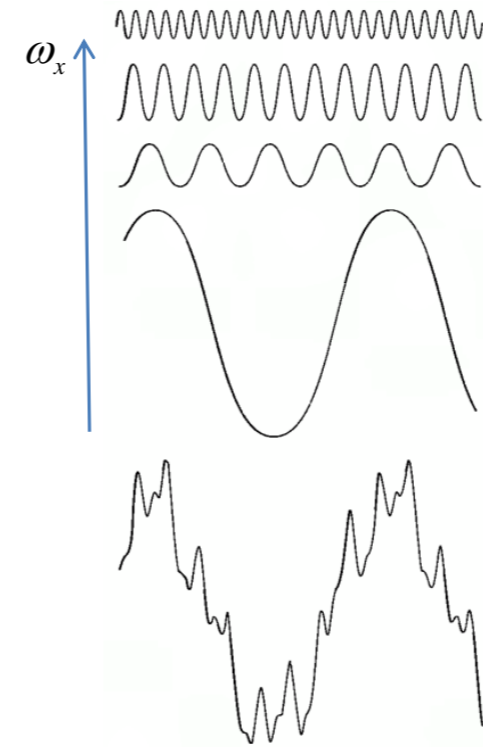
Свойства Фурье преобразования

Прямое Фурье преобразование

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

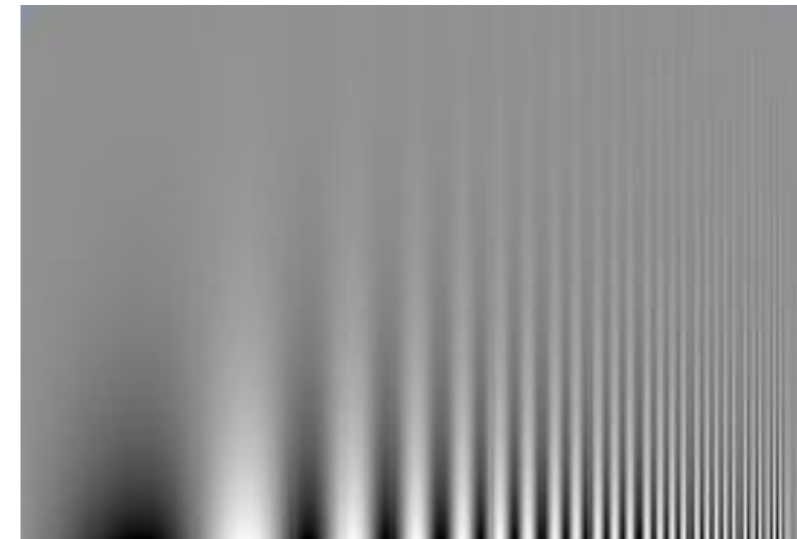
$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.



$$e^{j\omega_x x} = \cos(\omega_x x) + j \sin(\omega_x x)$$

Нижняя функция является суммой расположенных над ней функций.



увеличение пространственной частоты ω_x

Свойства Фурье преобразования

Прямое Фурье преобразование

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

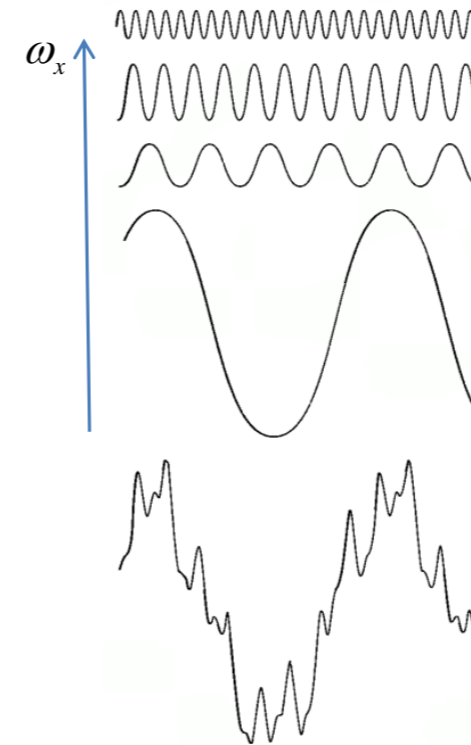
В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = (\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y))^{\frac{1}{2}},$$

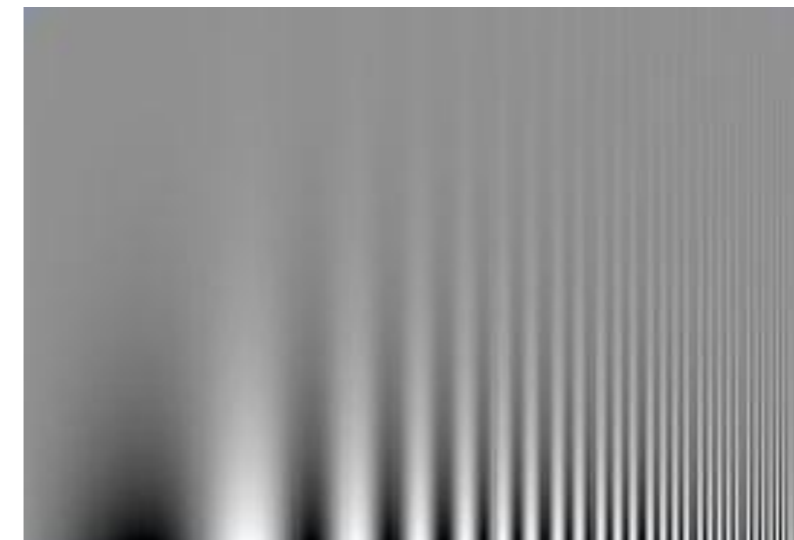
$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \arctg \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)} \quad \text{- спектр}$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \quad \text{- энергетический спектр, спектральная плотность}$$



$$e^{j\omega_x x} = \cos(\omega_x x) + j \sin(\omega_x x)$$

Нижняя функция является суммой расположенных над ней функций.



увеличение пространственной частоты ω_x

Свойства Фурье преобразования

Прямое Фурье преобразование

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$ то существует :

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(-j\omega_x x - j\omega_y y)} dx dy,$$

ω_x, ω_y - пространственные частоты.

В комплексном виде:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + j\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y) = |F(\omega_x, \omega_y)| e^{j\varphi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$|F(\omega_x, \omega_y)| = (\mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y))^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \arctg \frac{\mathcal{J}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}. \quad \begin{array}{l} \text{- спектр} \\ \text{- фазовый спектр} \end{array}$$

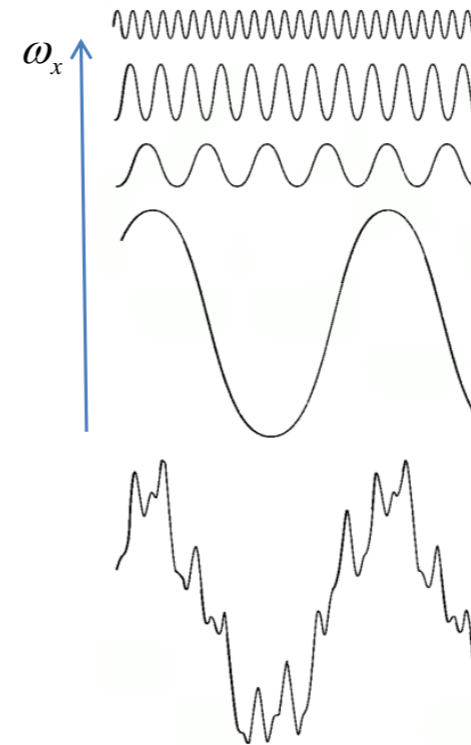
$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{J}^2(\omega_x, \omega_y) \quad \begin{array}{l} \text{- энергетический спектр,} \\ \text{спектральная плотность} \end{array}$$

Обратное Фурье преобразование:

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(\omega_x, \omega_y) \} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j\omega_x x + j\omega_y y} d\omega_x d\omega_y$$

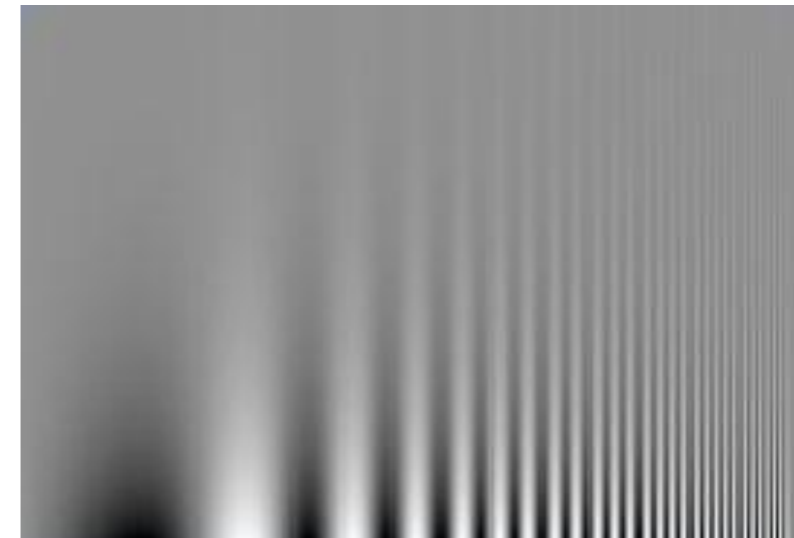
Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y$$



$$e^{j\omega_x x} = \cos(\omega_x x) + j \sin(\omega_x x)$$

Нижняя функция является суммой расположенных над ней функций.



увеличение пространственной частоты ω_x

Дискретизация

Дискретизация с прямоугольным растром – разложение непрерывной функции по дельта-функциям (ортогональным):

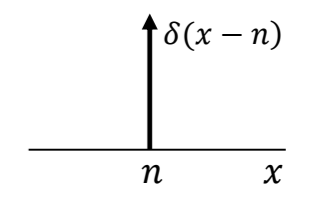
$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \underbrace{I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)}_{\text{дискретные отсчеты непрерывной функции}} \delta(t_1 - i_1\Delta t_1, t_2 - i_2\Delta t_2)$$

$I(i_1, i_2) = I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)$ - дискретная функция

$\Delta t_1, \Delta t_2$ - шаги дискретизации

Потери при дискретизации отсутствуют если можно восстановить непрерывный сигнал в промежутках между узлами (2D интерполяцией)

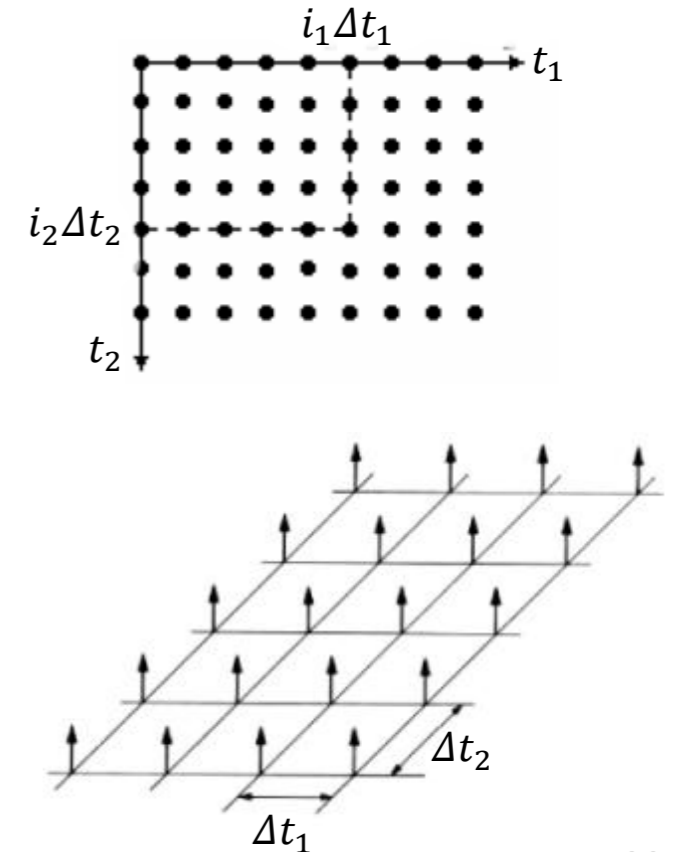
$I(i_1, i_2) \rightarrow I_H(t_1, t_2)$, для всех t_1, t_2

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$


$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\alpha^2 e^{-\alpha^2 \pi (x^2 + y^2)})$$



Дискретизация

Дискретизация с прямоугольным растром – разложение непрерывной функции по дельта-функциям (ортогональным):

$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \underbrace{I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)}_{\text{дискретные отсчеты непрерывной функции}} \delta(t_1 - i_1\Delta t_1, t_2 - i_2\Delta t_2)$$

$I(i_1, i_2) = I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)$ - дискретная функция

$\Delta t_1, \Delta t_2$ - шаги дискретизации

Потери при дискретизации отсутствуют если можно восстановить непрерывный сигнал в промежутках между узлами (2D интерполяцией)

$I(i_1, i_2) \rightarrow I_H(t_1, t_2)$, для всех t_1, t_2

Пусть $X_H(\omega_1, \omega_2)$ - Фурье-спектр непрерывного изображения $I_H(t_1, t_2)$:

$$X_H(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_H(t_1, t_2) e^{(-j\omega_1 t_1 - j\omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

Обратное Фурье преобразование

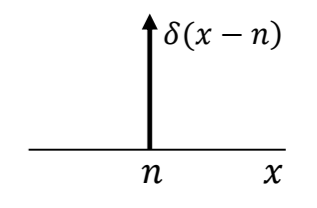
$$I_H(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2$$

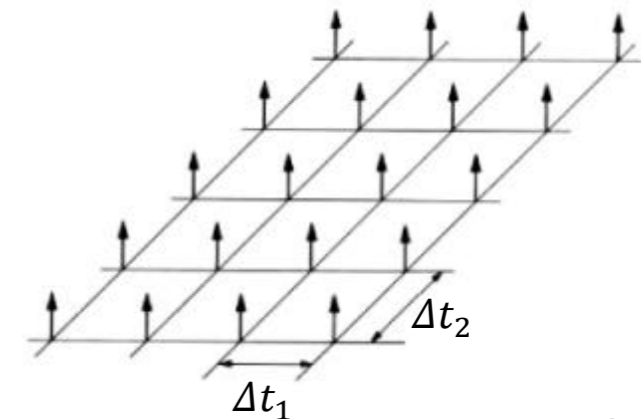
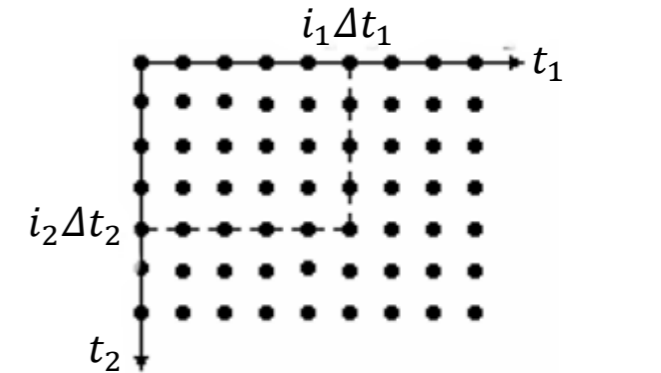
верно для всех t_1, t_2 , значит верно и для подвыборки узлов $t_1 = i_1\Delta t_1, t_2 = i_2\Delta t_2$.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\alpha^2 e^{-\alpha^2 \pi (x^2 + y^2)})$$




Дискретизация

Дискретизация с прямоугольным растром – разложение непрерывной функции по дельта-функциям (ортогональным):

$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \underbrace{I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)}_{\text{дискретные отсчеты непрерывной функции}} \delta(t_1 - i_1\Delta t_1, t_2 - i_2\Delta t_2)$$

$I(i_1, i_2) = I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2)$ - дискретная функция

$\Delta t_1, \Delta t_2$ - шаги дискретизации

Потери при дискретизации отсутствуют если можно восстановить непрерывный сигнал в промежутках между узлами (2D интерполяцией)

$I(i_1, i_2) \rightarrow I_H(t_1, t_2)$, для всех t_1, t_2

Пусть $X_H(\omega_1, \omega_2)$ - Фурье-спектр непрерывного изображения $I_H(t_1, t_2)$:

$$X_H(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_H(t_1, t_2) e^{(-j\omega_1 t_1 - j\omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

Обратное Фурье преобразование

$$I_H(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2$$

верно для всех t_1, t_2 , значит верно и для подвыборки узлов $t_1 = i_1\Delta t_1, t_2 = i_2\Delta t_2$.

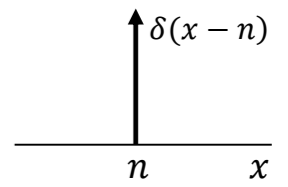
Значит для дискретной функции в узлах $t_1 = i_1\Delta t_1, t_2 = i_2\Delta t_2$ верно выражение:

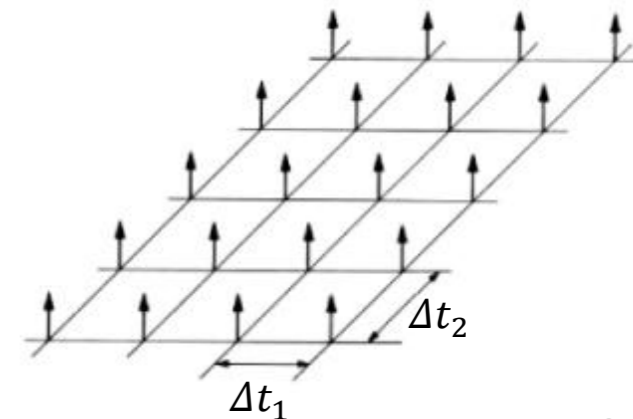
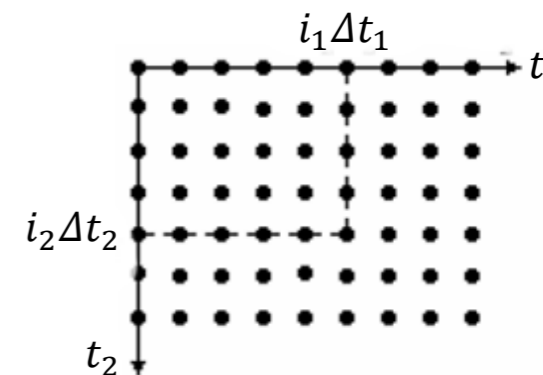
$$I(i_1, i_2) = I_H(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1\Delta t_1 + j\omega_2 i_2\Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2$$

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \varepsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, m) \delta(x - n, y - m) dn dm = f(x, y)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\alpha^2 e^{-\alpha^2 \pi (x^2 + y^2)})$$


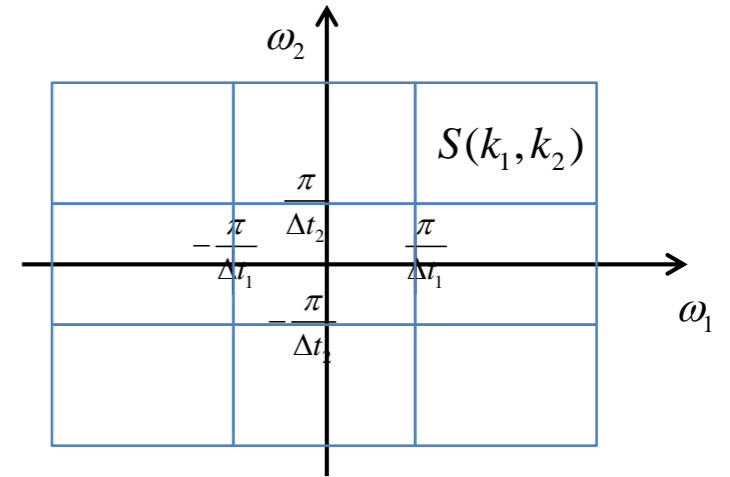


Дискретизация

$$I(i_1, i_2) = I_n(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_n(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Разобьем всю частотную область $\omega_1 \times \omega_2$ на прямоугольники $S(k_1, k_2)$ размером $\frac{2\pi}{\Delta t_1} \times \frac{2\pi}{\Delta t_2}$:

$$S(k_1, k_2): \left\{ \frac{-\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{-\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \leq \omega_2 \leq \frac{\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right\}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$



Дискретизация

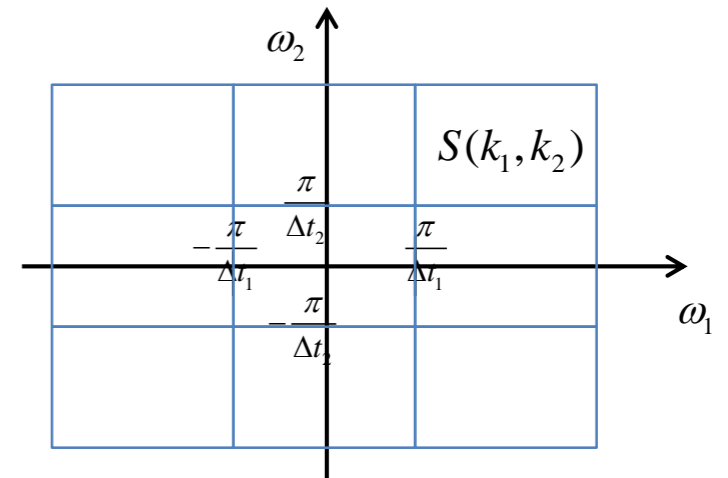
$$I(i_1, i_2) = I_n(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_n(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Разобьем всю частотную область $\omega_1 \times \omega_2$ на прямоугольники $S(k_1, k_2)$ размером $\frac{2\pi}{\Delta t_1} \times \frac{2\pi}{\Delta t_2}$:

$$S(k_1, k_2): \left\{ \frac{-\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{-\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \leq \omega_2 \leq \frac{\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right\}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем интегрирование в сумму интегралов по отдельным прямоугольникам:

$$I(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \iint_{S(k_1, k_2)} X_n(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$



Дискретизация

$$I(i_1, i_2) = I_n(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_n(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Разобьем всю частотную область $\omega_1 \times \omega_2$ на прямоугольники $S(k_1, k_2)$ размером $\frac{2\pi}{\Delta t_1} \times \frac{2\pi}{\Delta t_2}$:

$$S(k_1, k_2): \left\{ \frac{-\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{-\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \leq \omega_2 \leq \frac{\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right\}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

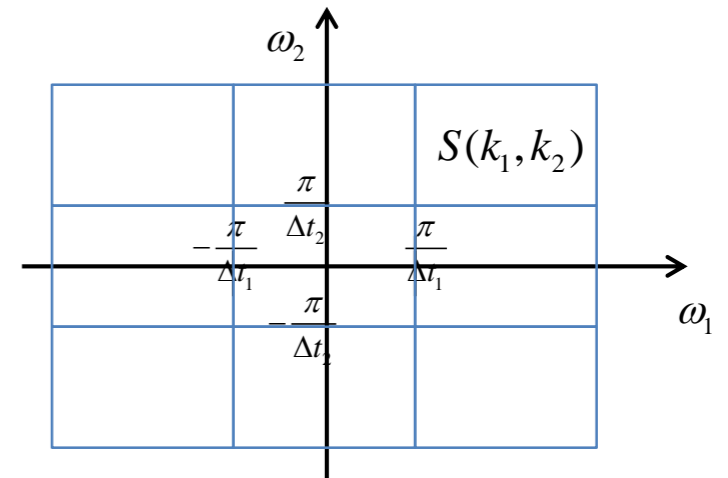
Преобразуем интегрирование в сумму интегралов по отдельным прямоугольникам:

$$I(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \iint_{S(k_1, k_2)} X_n(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Замена, $\omega_1 = \frac{\tilde{\omega}_1 - 2\pi k_1}{\Delta t_1}$, $\omega_2 = \frac{\tilde{\omega}_2 - 2\pi k_2}{\Delta t_2}$, чтобы область интегрирования не зависит от индексов разбиения на прямоугольники

$$I(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} X_n \left(\frac{\tilde{\omega}_1 - 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{\tilde{\omega}_2 - 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right)}_{\text{Спектр дискретного изображения}} e^{j\tilde{\omega}_1 i_1 + j\tilde{\omega}_2 i_2} d\tilde{\omega}_1 d\tilde{\omega}_2,$$

Спектр дискретного изображения



Дискретизация

$$I(i_1, i_2) = I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Разобьем всю частотную область $\omega_1 \times \omega_2$ на прямоугольники $S(k_1, k_2)$ размером $\frac{2\pi}{\Delta t_1} \times \frac{2\pi}{\Delta t_2}$:

$$S(k_1, k_2): \left\{ \frac{-\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi + 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{-\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \leq \omega_2 \leq \frac{\pi + 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right\}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем интегрирование в сумму интегралов по отдельным прямоугольникам:

$$I(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \iint_{S(k_1, k_2)} X_H(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 i_1 \Delta t_1 + j\omega_2 i_2 \Delta t_2} d\omega_1 d\omega_2.$$

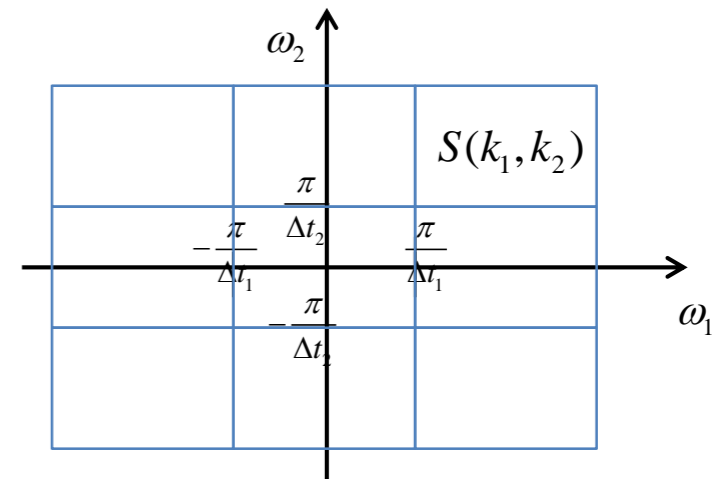
Замена, $\omega_1 = \frac{\tilde{\omega}_1 - 2\pi k_1}{\Delta t_1}$, $\omega_2 = \frac{\tilde{\omega}_2 - 2\pi k_2}{\Delta t_2}$, чтобы область интегрирования не зависит от индексов разбиения на прямоугольники

$$I(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} X_H \left(\frac{\tilde{\omega}_1 - 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{\tilde{\omega}_2 - 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right)}_{\text{Спектр дискретного изображения}} e^{j\tilde{\omega}_1 i_1 + j\tilde{\omega}_2 i_2} d\tilde{\omega}_1 d\tilde{\omega}_2,$$

Спектр дискретного изображения

$$X(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} X_H \left(\frac{\tilde{\omega}_1 - 2\pi k_1}{\Delta t_1}, \frac{\tilde{\omega}_2 - 2\pi k_2}{\Delta t_2} \right).$$

Фурье-спектр дискретного изображения – сумма бесконечного количества масштабированных копий Фурье-спектров непрерывного изображения, выровненных по центрам каждого прямоугольника $S(k_1, k_2)$.

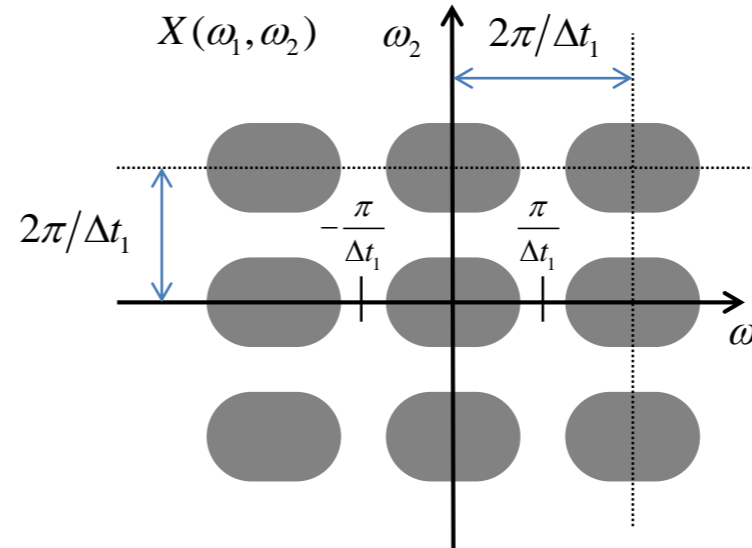
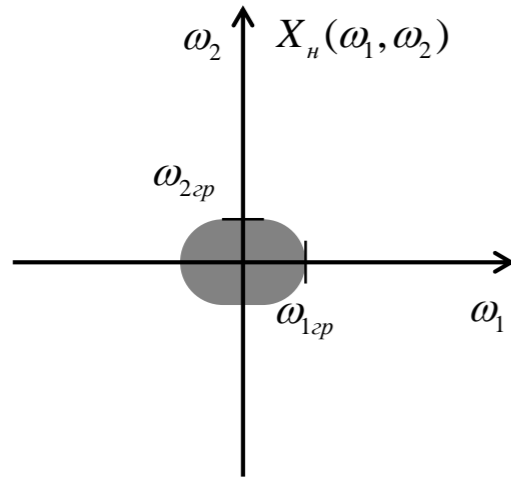


После замены $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \Delta t_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 \Delta t_2$:

$$X(\omega_1 \Delta t_1, \omega_2 \Delta t_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} X_H \left(\omega_1 - \frac{2\pi k_1}{\Delta t_1}, \omega_2 - \frac{2\pi k_2}{\Delta t_2} \right).$$

Фурье-спектр дискретного изображения - прямоугольно периодическая функция с периодами: $T_1 = \frac{2\pi}{\Delta t_1}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\Delta t_2}$.

Функция $X(\omega_1, \omega_2)$ образуется суммой бесконечного количества Фурье-спектров непрерывного изображения $X_H(\omega_1, \omega_2)$ со сдвигами $2\pi/\Delta t_1$, $2\pi/\Delta t_2$.

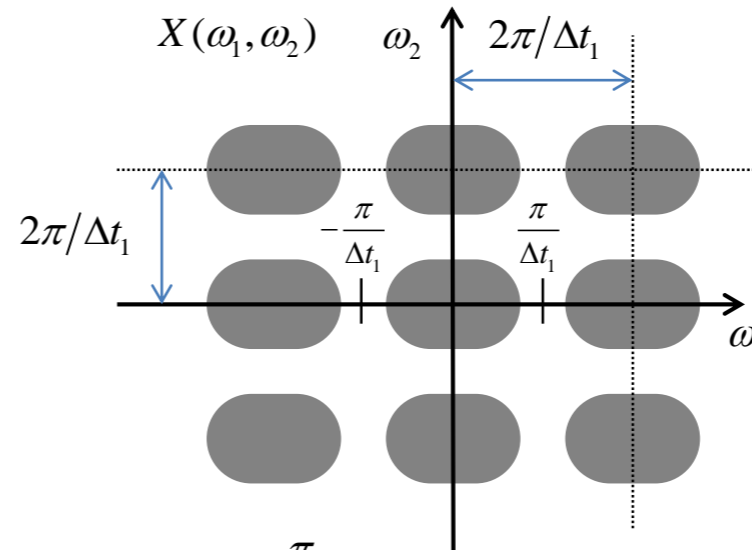
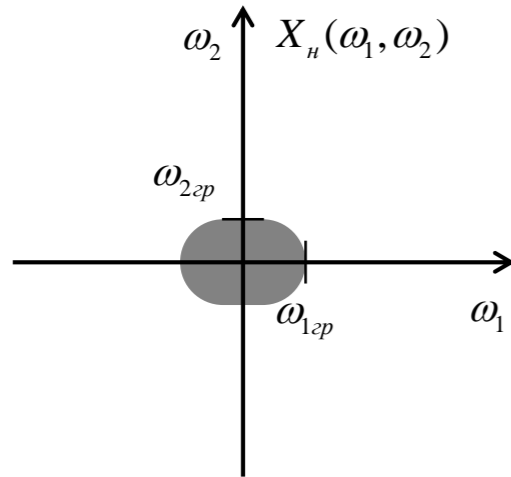


После замены $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \Delta t_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 \Delta t_2$:

$$X(\omega_1 \Delta t_1, \omega_2 \Delta t_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} X_H \left(\omega_1 - \frac{2\pi k_1}{\Delta t_1}, \omega_2 - \frac{2\pi k_2}{\Delta t_2} \right).$$

Фурье-спектр дискретного изображения - прямоугольно периодическая функция с периодами: $T_1 = \frac{2\pi}{\Delta t_1}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\Delta t_2}$.

Функция $X(\omega_1, \omega_2)$ образуется суммой бесконечного количества Фурье-спектров непрерывного изображения $X_H(\omega_1, \omega_2)$ со сдвигами $2\pi/\Delta t_1$, $2\pi/\Delta t_2$.



Если спектр $X_H(\omega_1, \omega_2)$ ограничен в области $|\omega_1| \leq \omega_{1cp} = \frac{\pi}{\Delta t_1}$, $|\omega_2| \leq \omega_{2cp} = \frac{\pi}{\Delta t_2}$,

то при $k_1 = k_2 = 0$ спектр дискретного изображения с точностью до масштаба совпадет со спектром непрерывного изображения:

$X(\omega_1 \Delta t_1, \omega_2 \Delta t_2) = \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} X_H(\omega_1, \omega_2)$ - возможно восстановить непрерывное изображение без потерь информации.

Условие для шага дискретизации для восстановления без потерь:

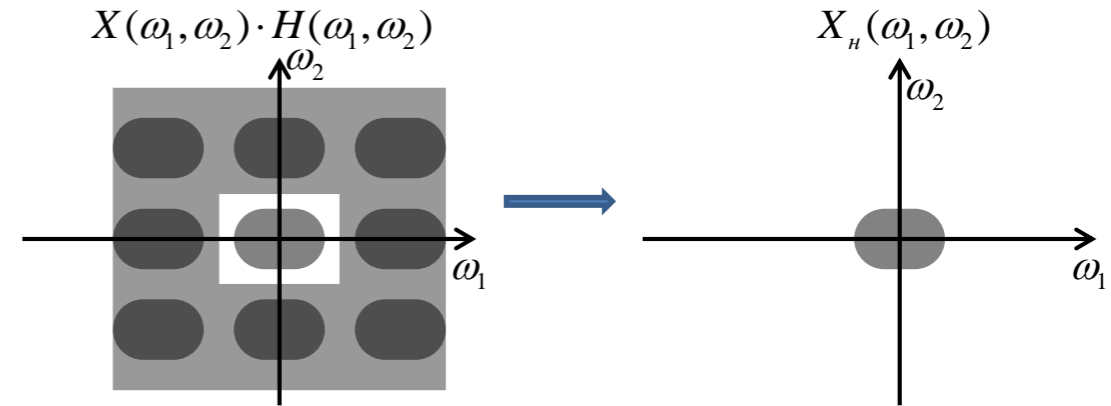
$$\Delta t_1 \leq \frac{\pi}{\omega_{1cp}}, \quad \Delta t_2 \leq \frac{\pi}{\omega_{2cp}}$$

или для частоты дискретизации:

$$f_{\Delta t_1} = \frac{1}{\Delta t_1} \geq 2f_{1cp}, \quad f_{\Delta t_2} = \frac{1}{\Delta t_2} \geq 2f_{2cp}, \quad \text{где } f_{cp} = \omega_{cp}/2\pi$$

Для восстановления $I_n(t_1, t_2)$ из $I(i_1, i_2)$ можно использовать фильтр с частотной характеристикой, подавляющий сдвинутые спектры:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \Delta t_1 \Delta t_2, & |\omega_1| \leq \frac{\pi}{\Delta t_1}, |\omega_2| \leq \frac{\pi}{\Delta t_2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

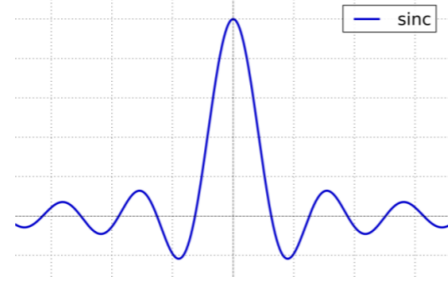


Для восстановления $I_H(t_1, t_2)$ из $I(i_1, i_2)$ можно использовать фильтр с частотной характеристикой, подавляющий сдвинутые спектры:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \Delta t_1 \Delta t_2, & |\omega_1| \leq \frac{\pi}{\Delta t_1}, |\omega_2| \leq \frac{\pi}{\Delta t_2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

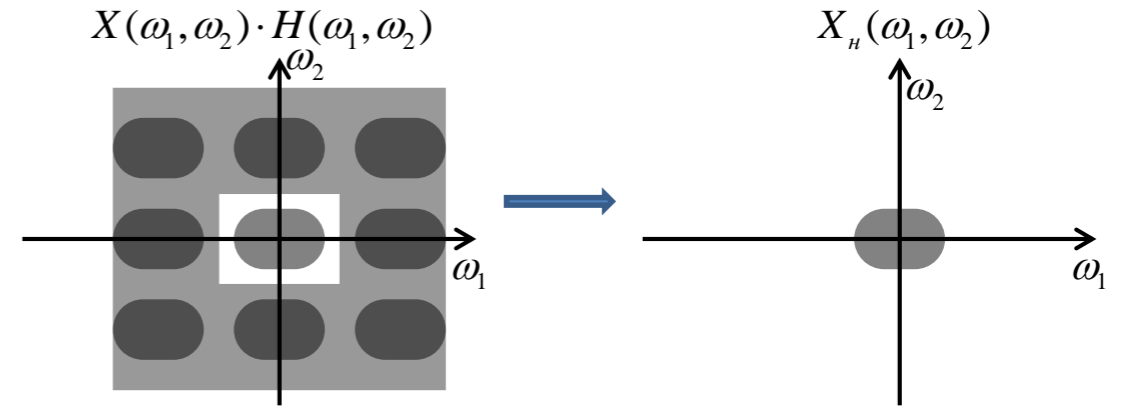
Импульсная характеристика (обратное Фурье преобразование):

$$h(t_1, t_2) = \frac{\sin \pi t_1 / \Delta t_1}{\pi t_1 / \Delta t_1} \frac{\sin \pi t_2 / \Delta t_2}{\pi t_2 / \Delta t_2}$$



$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \sum_{t_2=-\infty}^{\infty} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \delta(t_1 - i_1 \Delta t_1, t_2 - i_2 \Delta t_2)$$

$$\Rightarrow I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \frac{\sin \pi (t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1}{\pi (t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1} \frac{\sin \pi (t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}{\pi (t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}$$

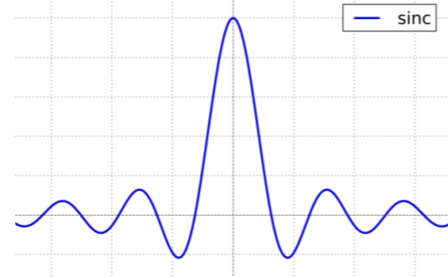


Для восстановления $I_H(t_1, t_2)$ из $I(i_1, i_2)$ можно использовать фильтр с частотной характеристикой, подавляющий сдвинутые спектры:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \Delta t_1 \Delta t_2, & |\omega_1| \leq \frac{\pi}{\Delta t_1}, |\omega_2| \leq \frac{\pi}{\Delta t_2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Импульсная характеристика (обратное Фурье преобразование):

$$h(t_1, t_2) = \frac{\sin \pi t_1 / \Delta t_1}{\pi t_1 / \Delta t_1} \frac{\sin \pi t_2 / \Delta t_2}{\pi t_2 / \Delta t_2}$$



$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \sum_{t_2=-\infty}^{\infty} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \delta(t_1 - i_1 \Delta t_1, t_2 - i_2 \Delta t_2)$$

$$\Rightarrow I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \frac{\sin \pi(t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1}{\pi(t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1} \frac{\sin \pi(t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}{\pi(t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}$$

Теорема Котельникова (Найквиста)

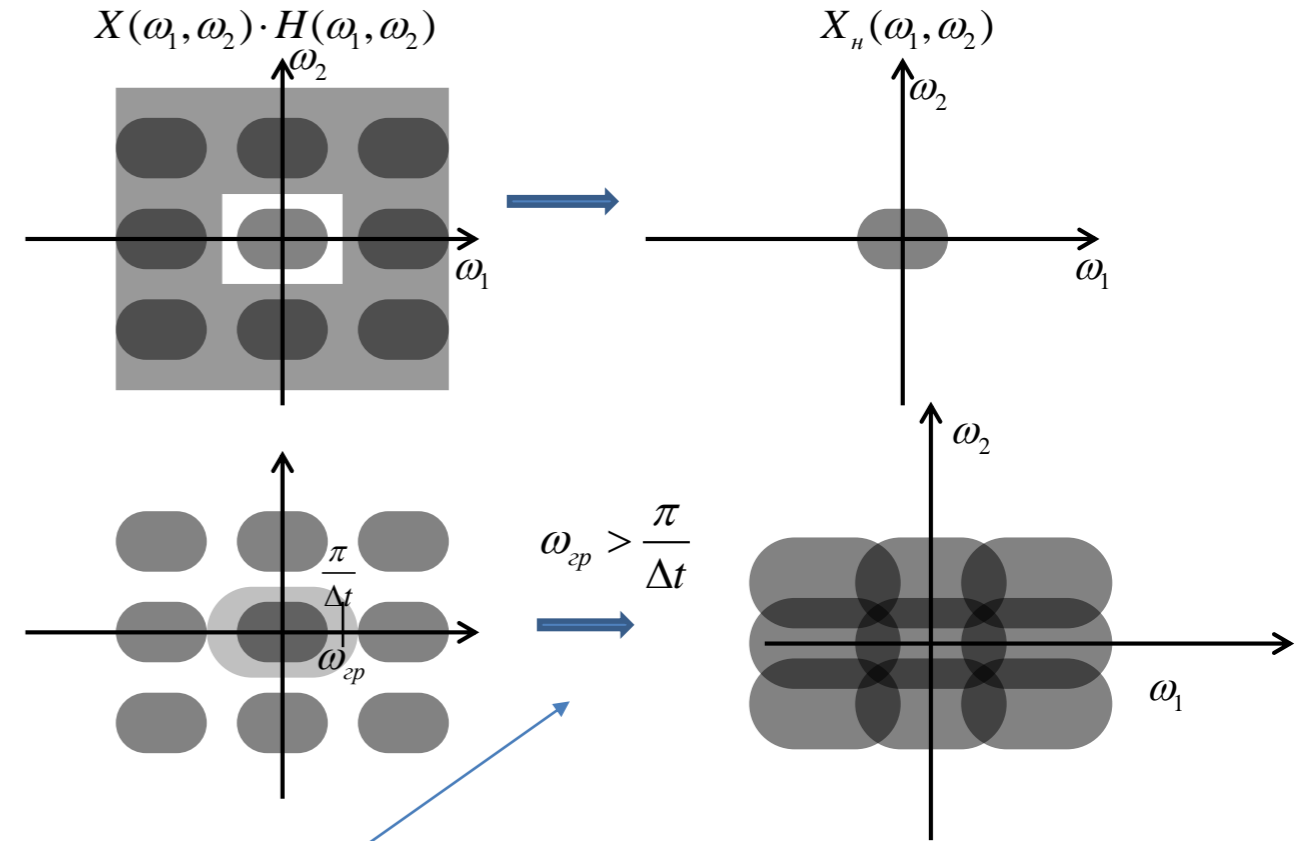
Условия восстановления непрерывного изображения без потерь:

1. Изображение должно иметь **ограниченный Фурье-спектр** $|\omega_1| \leq \omega_{1zp}, |\omega_2| \leq \omega_{2zp}$
2. **Интервал дискретизации** должен быть $\Delta t_1 \leq \pi / \omega_{1zp}, \Delta t_2 \leq \pi / \omega_{2zp}$
3. **Восстанавливающий фильтр** $h(t_1, t_2)$ должен подавлять сдвинутые спектры.

Реальные изображения не имеют четкого ограничения спектра из-за границ и контуров.

Можно сузить спектр перед дискретизацией путем размытия.

Наложение спектра приводит к искажениям.

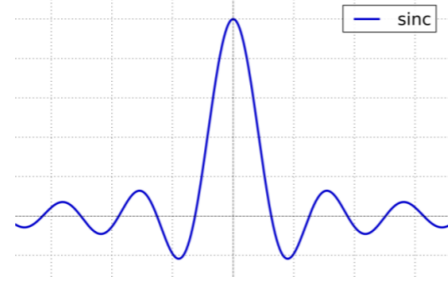


Для восстановления $I_H(t_1, t_2)$ из $I(i_1, i_2)$ можно использовать фильтр с частотной характеристикой, подавляющий сдвинутые спектры:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \Delta t_1 \Delta t_2, & |\omega_1| \leq \frac{\pi}{\Delta t_1}, |\omega_2| \leq \frac{\pi}{\Delta t_2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Импульсная характеристика (обратное Фурье преобразование):

$$h(t_1, t_2) = \frac{\sin \pi t_1 / \Delta t_1}{\pi t_1 / \Delta t_1} \frac{\sin \pi t_2 / \Delta t_2}{\pi t_2 / \Delta t_2}$$



$$I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \delta(t_1 - i_1 \Delta t_1, t_2 - i_2 \Delta t_2)$$

$$\Rightarrow I_H(t_1, t_2) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} I_H(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) \frac{\sin \pi(t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1}{\pi(t_1 - i_1 \Delta t_1) / \Delta t_1} \frac{\sin \pi(t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}{\pi(t_2 - i_2 \Delta t_2) / \Delta t_2}$$

Теорема Котельникова (Найквиста)

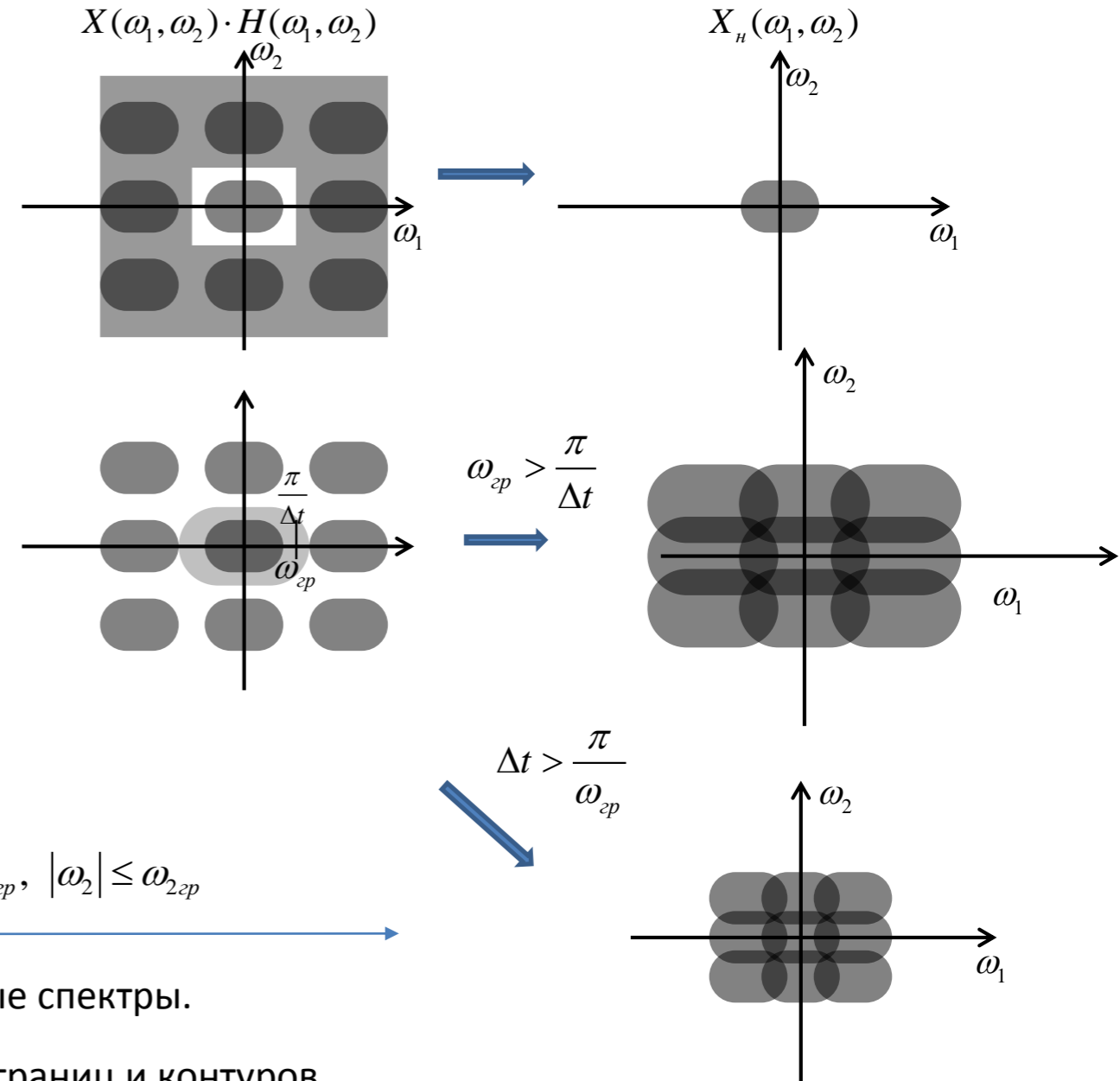
Условия восстановления непрерывного изображения без потерь:

1. Изображение должно иметь **ограниченный Фурье-спектр** $|\omega_1| \leq \omega_{1zp}, |\omega_2| \leq \omega_{2zp}$
2. **Интервал дискретизации** должен быть $\Delta t_1 \leq \pi / \omega_{1zp}, \Delta t_2 \leq \pi / \omega_{2zp}$
3. **Восстанавливающий фильтр** $h(t_1, t_2)$ должен подавлять сдвинутые спектры.

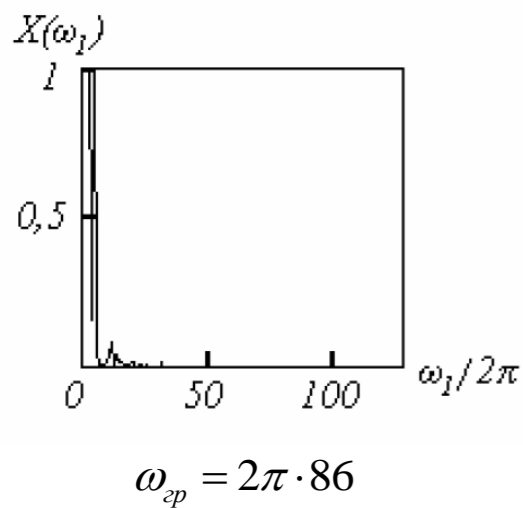
Реальные изображения не имеют четкого ограничения спектра из-за границ и контуров.

Можно сузить спектр перед дискретизацией путем размытия.

Наложение спектра приводит к искажениям.



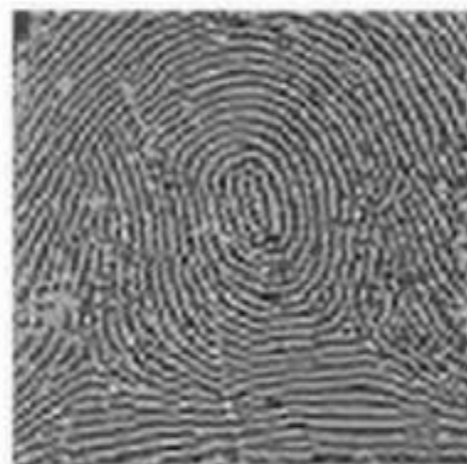
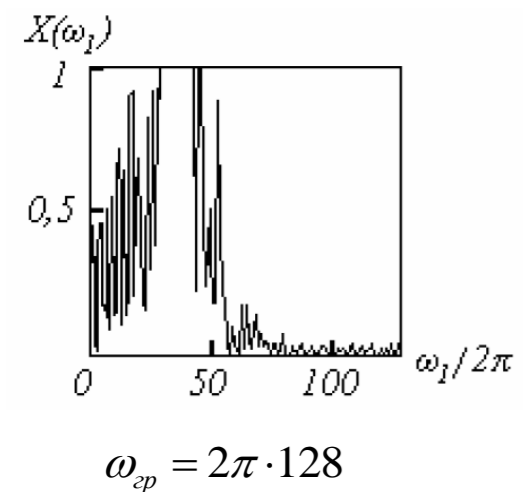
Влияние интервала дискретизации на искажения восстановленного изображения



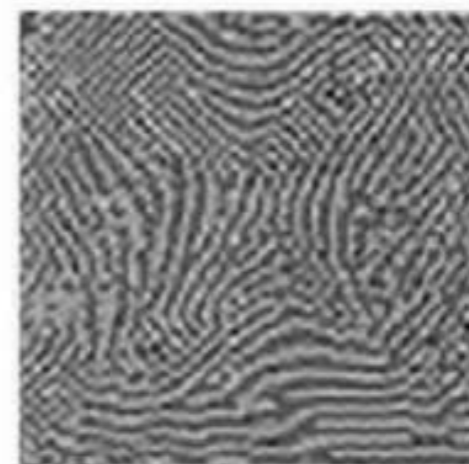
$4\Delta t$



$6\Delta t$



$3\Delta t$



$4\Delta t$

Модели представления изображений.

Функциональное представление изображения

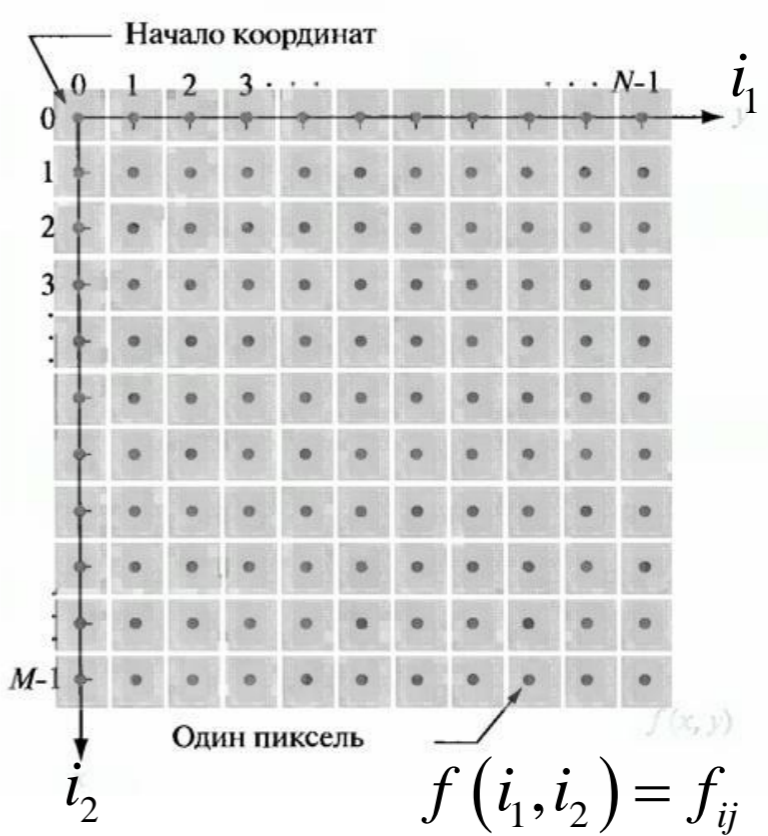
$$f(i_1, i_2) = f_k(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2)$$

$$i_1 = \{0, \dots, W - 1\}$$

$$i_2 = \{0, \dots, H - 1\}$$

$$f_k = \{0, \dots, 2^b - 1\}, b = 8..12$$

Размер изображения = $W \cdot H \cdot b$, бит



Модели представления изображений.

Функциональное представление изображения

$$f(i_1, i_2) = f_k(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2)$$

$$i_1 = \{0, \dots, W - 1\}$$

$$i_2 = \{0, \dots, H - 1\}$$

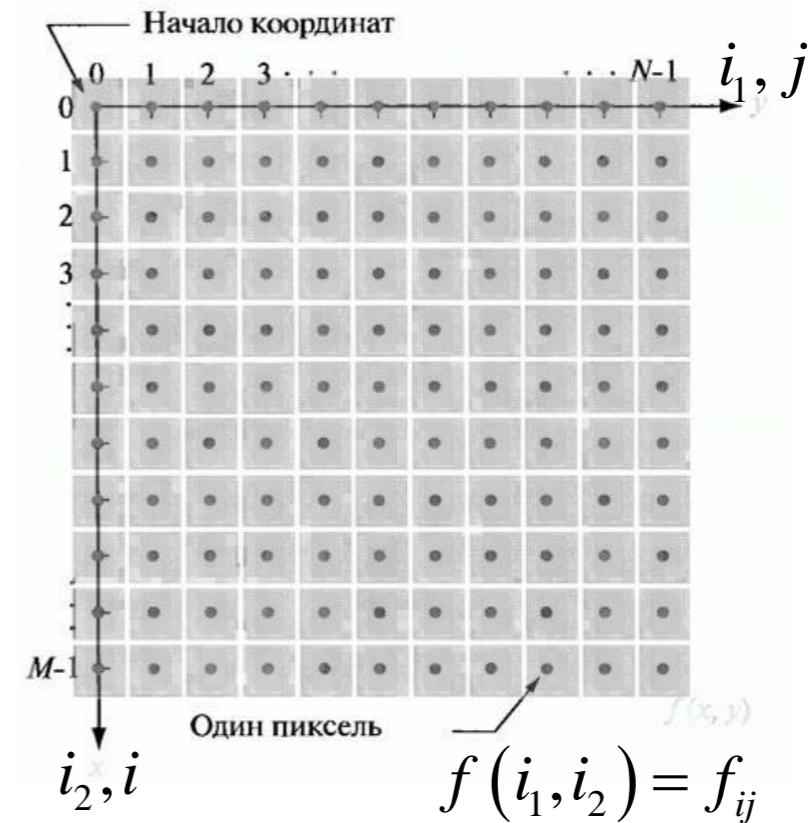
$$f_k = \{0, \dots, 2^b - 1\}, \quad b = 8..12$$

Размер изображения = $W \cdot H \cdot b$, бит

Матричное представление изображения

$$f(i_1, i_2) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(1,0) & \dots & f(W-1,0) \\ f(0,1) & f(1,1) & \dots & f(W-1,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(0,H-1) & f(1,H-1) & \dots & f(W-1,H-1) \end{bmatrix}$$

$$f_{ij} = \begin{bmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \dots & f_{0,W-1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,W-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{0,H-1} & f_{1,H-1} & \dots & f_{W-1,H-1} \end{bmatrix}$$



Модели представления изображений.

Функциональное представление (действительное) изображения

$$f(x = i_1, y = i_2) = f(i_1, i_2) = f_k(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2)$$

$$f(x, y) \in L^2(\mathbb{Z}) \quad - \text{ограниченная на } [0, 2^b - 1]$$

$$\iint_{(x,y) \in (W,H)} f^2(x, y) dx dy < \infty$$

Модели представления изображений.

Функциональное представление (действительное) изображения

$$f(x = i_1, y = i_2) = f(i_1, i_2) = f_k(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2)$$

$$f(x, y) \in L^2(\mathbb{Z}) \quad - \text{ограниченная на } [0, 2^b - 1]$$

$$\iint_{(x,y) \in (W,H)} f^2(x, y) dx dy < \infty$$

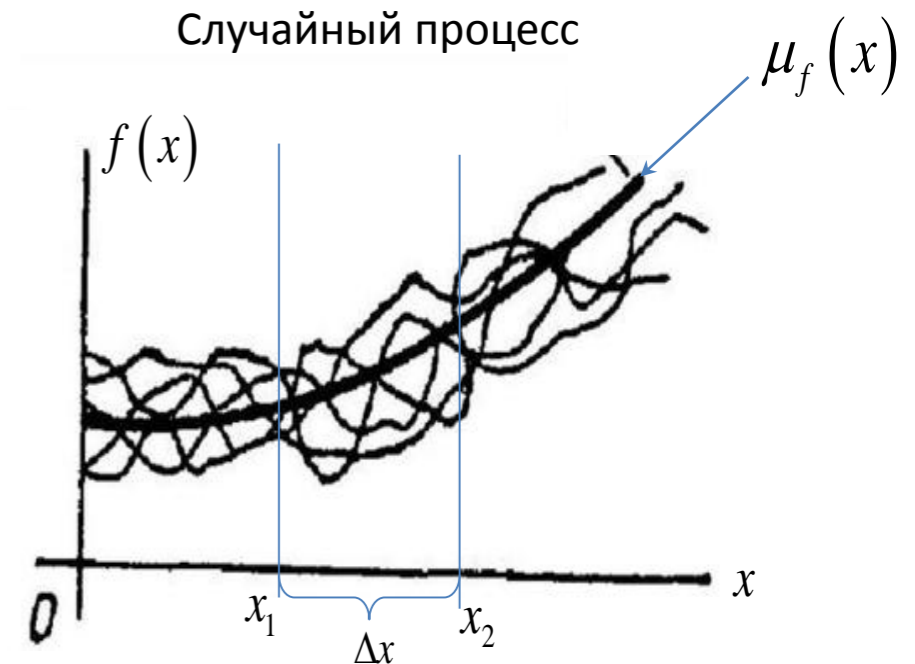
Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2)\} = \quad - \text{автокорреляционная функция}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2) p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\} df_1 df_2$$



Модели представления изображений.

Функциональное представление (действительное) изображения

$$f(x = i_1, y = i_2) = f(i_1, i_2) = f_k(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2)$$

$$f(x, y) \in L^2(\mathbb{Z}) \quad - \text{ограниченная на } [0, 2^b - 1]$$

$$\iint_{(x,y) \in (W,H)} f^2(x, y) dx dy < \infty$$

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

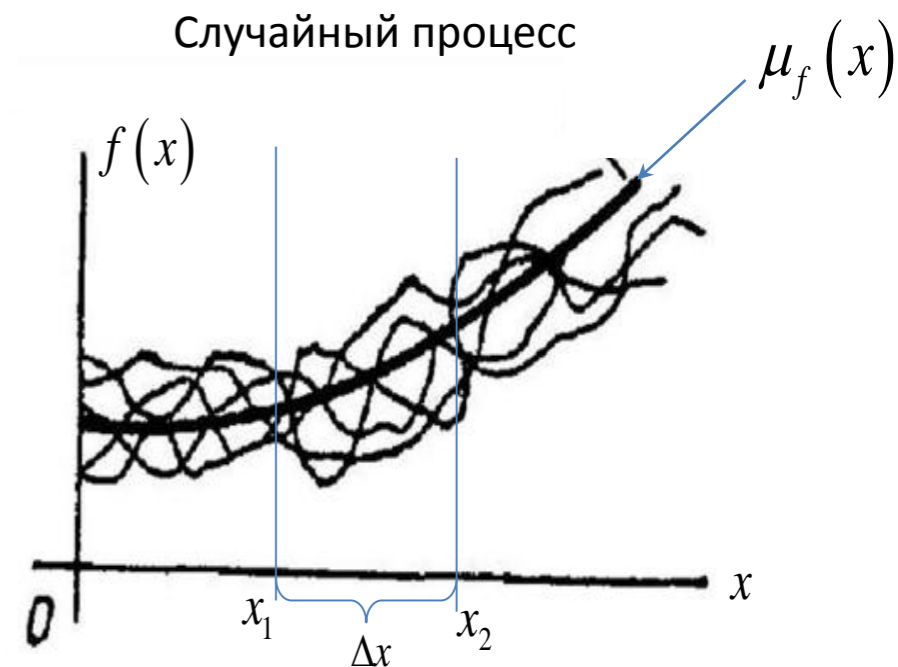
$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2)\} = \quad - \text{автокорреляционная функция}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2) p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\} df_1 df_2$$

$$K(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{[f(x_1, y_1, t_1) - \mu_f(x_1, y_1, t_1)][f^*(x_2, y_2, t_2) - \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)]\} =$$

$$= R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) - \mu_f(x_1, y_1, t_1) \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)$$

$$\sigma_f^2(x, y, t) = K(x, y, t; x, y, t)$$



Модели представления изображений

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

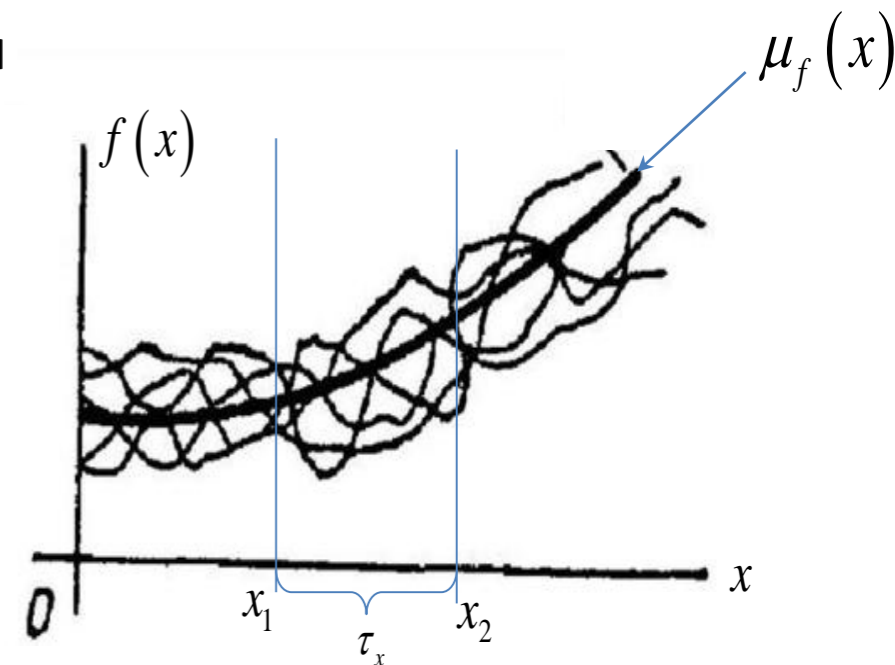
$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2)\} =$ - автокорреляционная функция

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2) p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\} df_1 df_2$$

$$K(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\left\{\left[f(x_1, y_1, t_1) - \mu_f(x_1, y_1, t_1)\right]\left[f^*(x_2, y_2, t_2) - \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)\right]\right\} =$$

$$= R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) - \mu_f(x_1, y_1, t_1) \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)$$

$$\sigma_f^2(x, y, t) = K(x, y, t; x, y, t)$$



$f(x, y, t)$ - **стационарный** случайный процесс (в узком смысле):
 $p\{f; x, y, t\} = p\{f; x - \tau_x, y - \tau_y, t - \tau_t\}$

Модели представления изображений

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

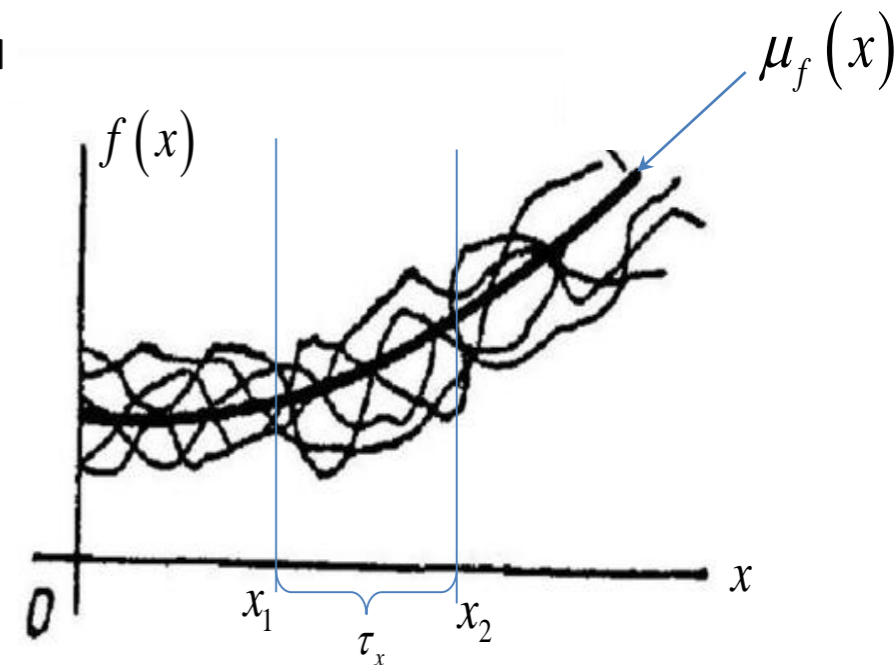
$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2)\} =$ - автокорреляционная функция

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2) p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\} df_1 df_2$$

$$K(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\left\{\left[f(x_1, y_1, t_1) - \mu_f(x_1, y_1, t_1)\right]\left[f^*(x_2, y_2, t_2) - \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)\right]\right\} =$$

$$= R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) - \mu_f(x_1, y_1, t_1) \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)$$

$$\sigma_f^2(x, y, t) = K(x, y, t; x, y, t)$$



$f(x, y, t)$ - **стационарный** случайный процесс (в узком смысле):

$$p\{f; x, y, t\} = p\{f; x - \tau_x, y - \tau_y, t - \tau_t\}$$

$f(x, y, t)$ - **стационарный** случайный процесс (в широком смысле):

$$M\{f(x, y, t)\} = \mu_f$$

$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = R(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2) = R(\tau_x, \tau_y, \tau_t)$$

$$R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) = R_{xy}(\tau_x, \tau_y) R_t(\tau_t)$$

Модели представления изображений

Статистическое описание изображения

$f(x, y, t)$ - случайный процесс (с.п.), описывается совместной плотностью распределения: $p\{f; x, y, t\}$

$$\mu_f(x, y, t) = M\{f(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) p\{f; x, y, t\} df$$

$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\{f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2)\} =$ - автокорреляционная функция

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, t_1) f^*(x_2, y_2, t_2) p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\} df_1 df_2$$

$$K(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = M\left\{\left[f(x_1, y_1, t_1) - \mu_f(x_1, y_1, t_1)\right]\left[f^*(x_2, y_2, t_2) - \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)\right]\right\} =$$

$$= R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) - \mu_f(x_1, y_1, t_1) \mu_f^*(x_2, y_2, t_2)$$

$$\sigma_f^2(x, y, t) = K(x, y, t; x, y, t)$$

$f(x, y, t)$ - **стационарный** случайный процесс (в узком смысле):

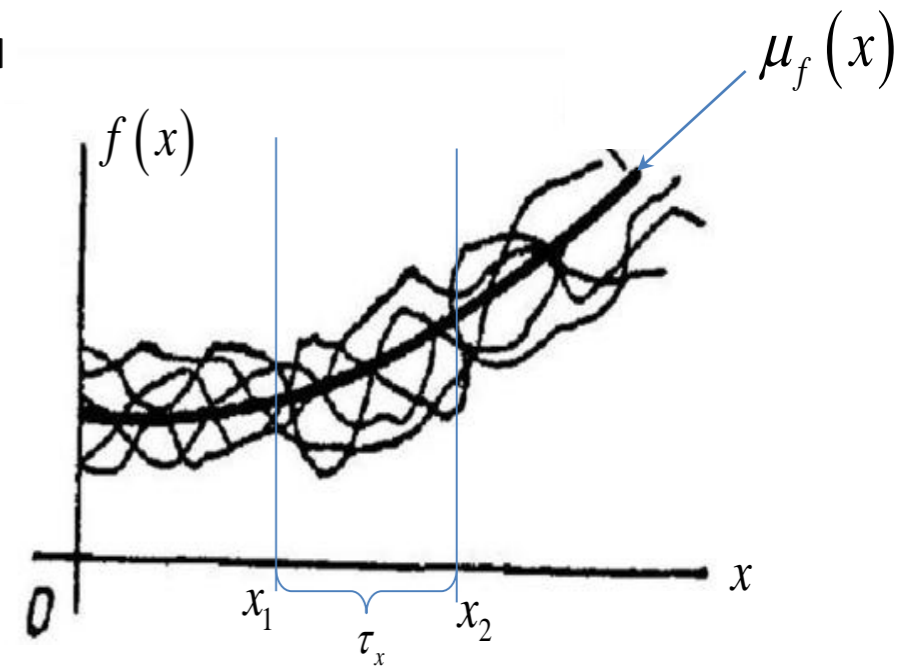
$$p\{f; x, y, t\} = p\{f; x - \tau_x, y - \tau_y, t - \tau_t\}$$

$f(x, y, t)$ - **стационарный** случайный процесс (в широком смысле):

$$M\{f(x, y, t)\} = \mu_f$$

$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = R(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2) = R(\tau_x, \tau_y, \tau_t)$$

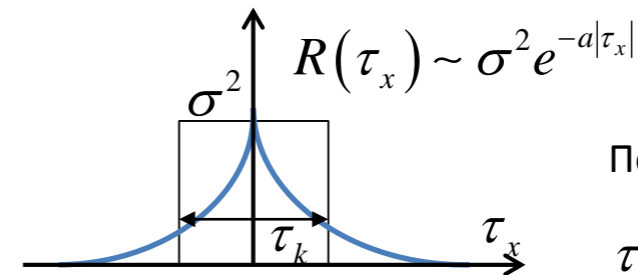
$$R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) = R_{xy}(\tau_x, \tau_y) R_t(\tau_t)$$



Эргодический процесс – процесс при котором

$$\lim_{\tau_x, \tau_y, \tau_t \rightarrow \infty} R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) = 0$$

Двумерный гауссовский марковский процесс:



Показатель избыточности:

$$\tau_k = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau_x)| d\tau_x$$

$$P(f(x, y, t) | f(x-1, y-1, t-1), x-1, y-1, t-1; \dots; f(x_0, y_0, t_0), x_0, y_0, t_0) = P(f(x, y, t) | f(x-1, y-1, t-1), x-1, y-1, t-1)$$

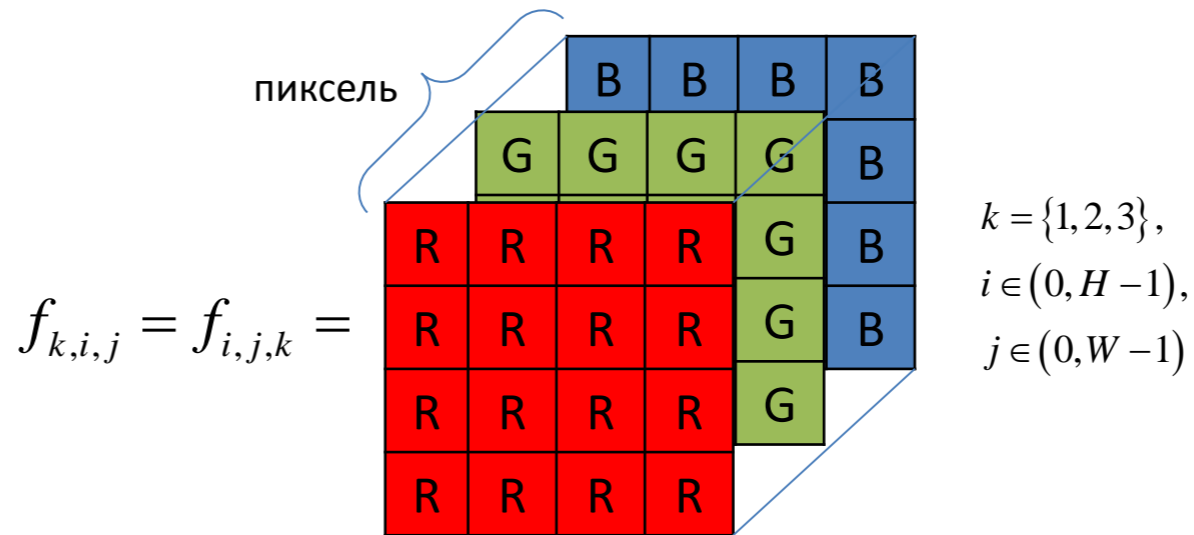
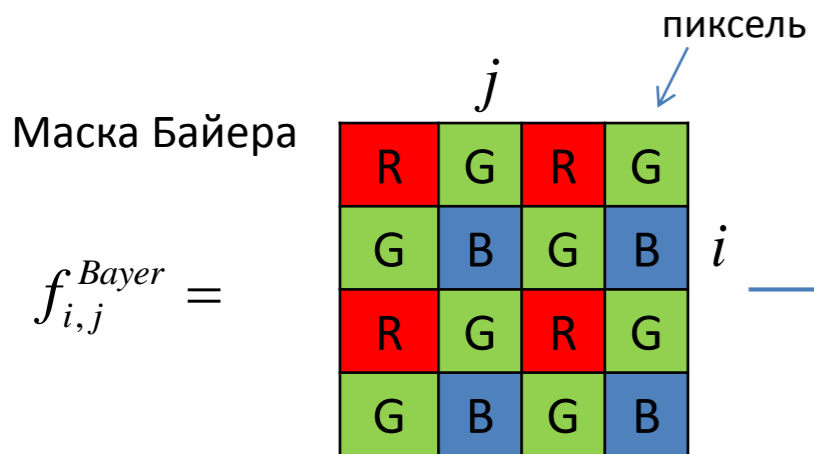
Модели представления изображений.

Представление цветных изображений

$f^R(x, y), f^G(x, y), f^B(x, y)$ - функции цветных каналов изображения

$f_{i,j}^R, f_{i,j}^G, f_{i,j}^B$ - матрицы цветных каналов изображения

Цветовые плоскости



Основания трех-цветовой модели. Источники света.

Мощность излучения источника – лучистый поток:

$$P = \int_0^{\infty} C(\lambda) d\lambda$$

Субъективное ощущение яркости – световой поток:

$$F = K_m \int_0^{\infty} C(\lambda) V(\lambda) d\lambda, \quad K_m = 685 \text{ лм/Вт}$$

$V(\lambda)$ - относительная спектральная световая эффективность, нормированная в максимуме на единицу чувствительности среднего человеческого глаза.



Рис. 6.1. Разложение белого света на спектральные составляющие при прохождении через призму. (Изображение предоставлено General Electric Co., Lamp Business Division).

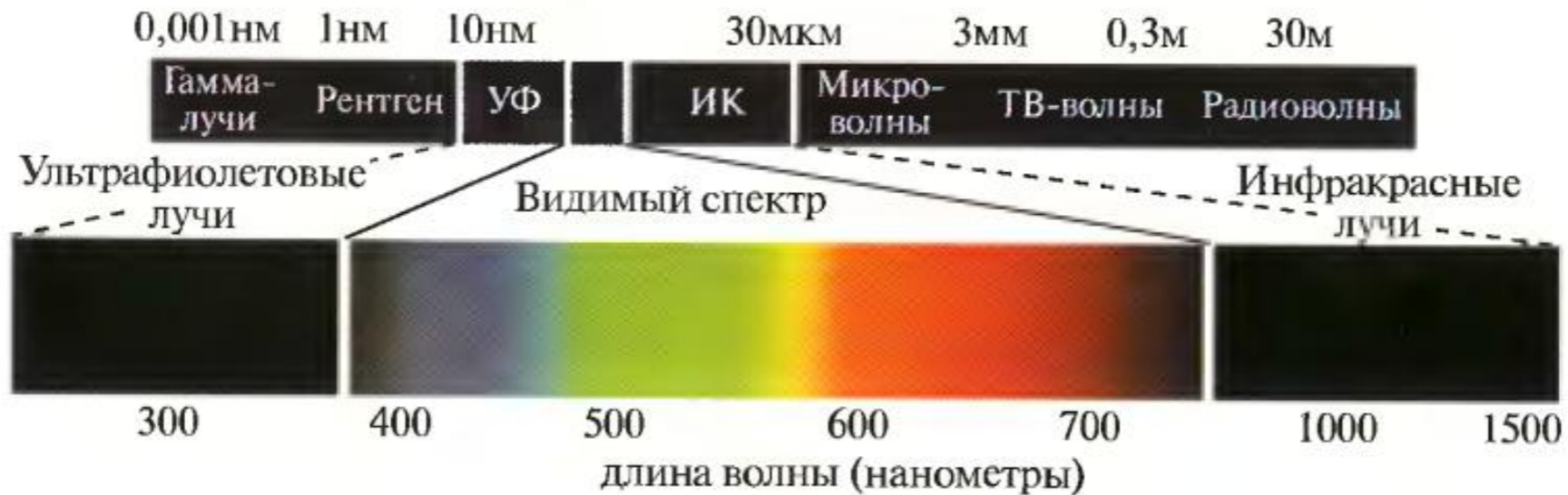


Рис. 6.2. Длины волн видимой части электромагнитного спектра. (Изображение предоставлено General Electric Co., Lamp Business Division).

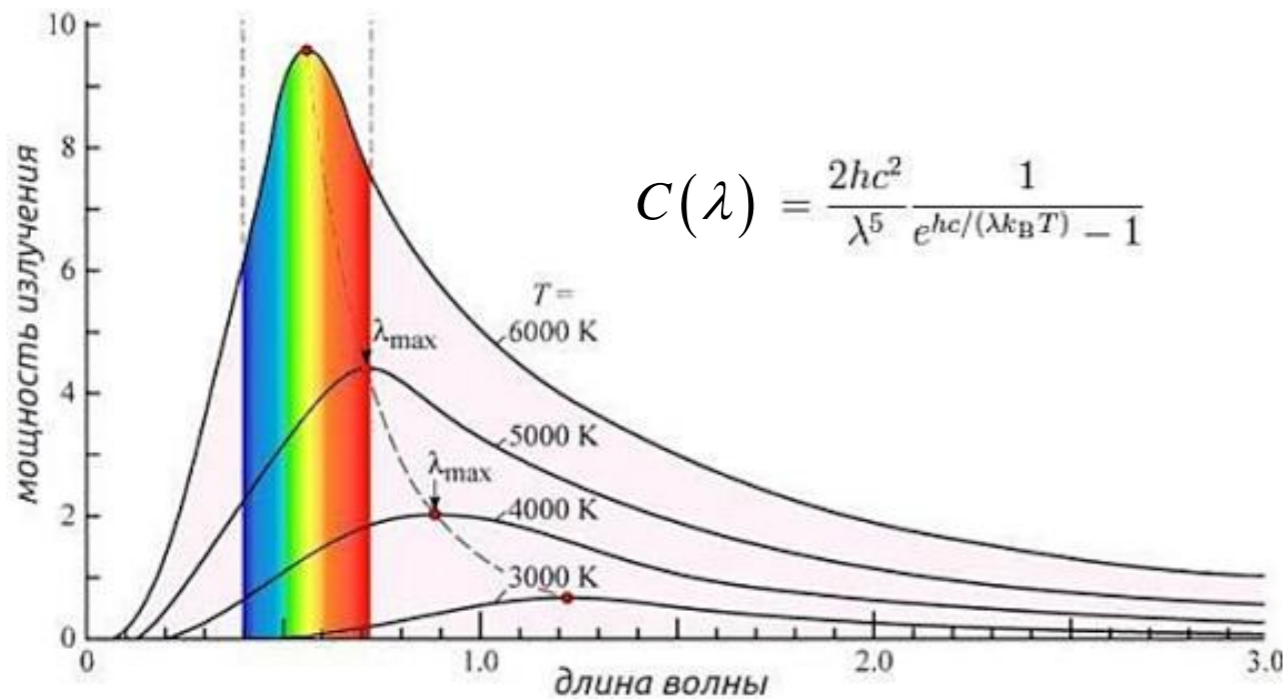
Основания трех-цветовой модели. Источники света.

Мощность излучения источника – лучистый поток: $P = \int_0^{\infty} C(\lambda) d\lambda$

Субъективное ощущение яркости – световой поток: $F = K_m \int_0^{\infty} C(\lambda) V(\lambda) d\lambda$, $K_m = 685 \text{ лм/Вт}$

$V(\lambda)$ - относительная спектральная световая эффективность, нормированная в максимуме на единицу чувствительности среднего человеческого глаза .

Идеальный излучатель – абсолютно черное тело, нагретое до температуры T . Спектральная плотность – закон Планка:



Закон смещения Вина: $\lambda_{\max} = \frac{0.002898}{T}$

Закон Стефана — Больцмана: $P = \sigma T^4$, Вт/м^2 , $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$

Основания трех-цветовой модели. Источники света.

Мощность излучения источника – лучистый поток:

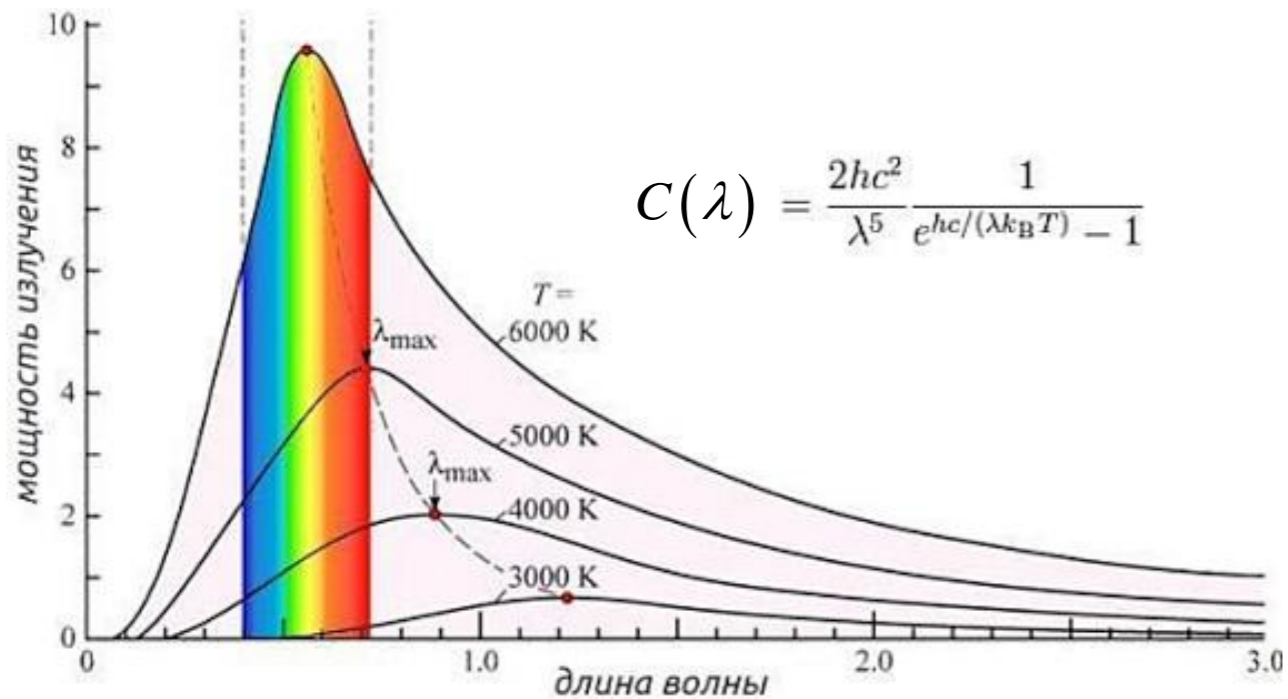
$$P = \int_0^{\infty} C(\lambda) d\lambda$$

Субъективное ощущение яркости – световой поток:

$$F = K_m \int_0^{\infty} C(\lambda) V(\lambda) d\lambda, \quad K_m = 685 \text{ лм/Вт}$$

$V(\lambda)$ - относительная спектральная световая эффективность, нормированная в максимуме на единицу чувствительности среднего человеческого глаза.

Идеальный излучатель – абсолютно черное тело, нагретое до температуры T . Спектральная плотность – закон Планка:



$$C(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$$

Закон смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{0.002898}{T}$$

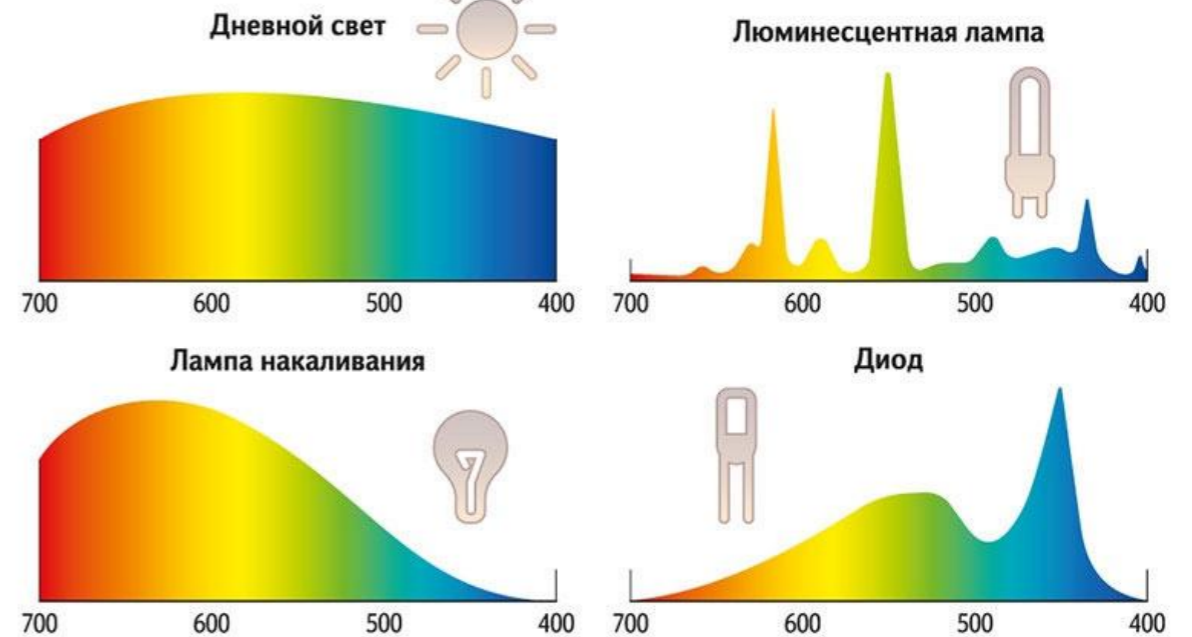
Закон Стефана — Больцмана: $P = \sigma T^4$, Вт/м², $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$

Шкала цветových температур

800 К — начало видимого тёмно-красного свечения раскалённых тел;
 1500-2000 К — свет пламени свечи;
 2200 К — лампа накаливания 40 Вт;
 2680 К — лампа накаливания 60 Вт;
 2800 К — лампа накаливания 100 Вт;
 3000 К — лампа накаливания галогенная;
 3400 К — солнце у горизонта;
 3500 К — люминесцентная лампа белого света;
 4000 К — люминесцентная лампа холодного белого света;

4300-4500 К — утреннее солнце;
 5000 К — солнце в полдень;
 5500 К — облака в полдень;
 5500—5600 К — фотовспышка;
 5600—7000 К — люминесцентная лампа дневного света;
 6200 К — близкий к дневному свету;
 6500—7500 К — облачность;
 7500 К — дневной свет с большой долей рассеянного от чистого голубого неба;
 7500—8500 К — сумерки;
 9500 К — синее безоблачное небо

Спектры излучений



Источник: пресс-служба МФТИ

Трёх-цветовая модели. Колориметрия.

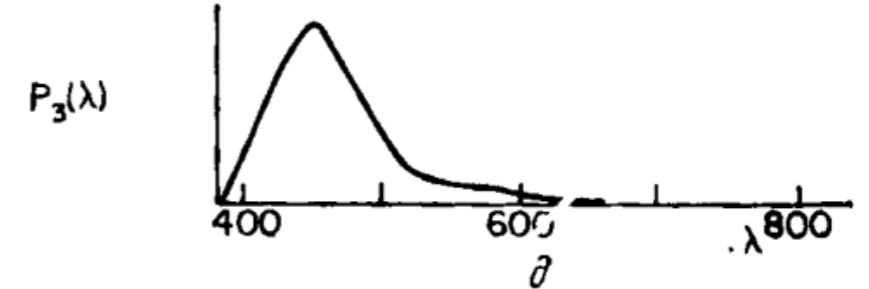
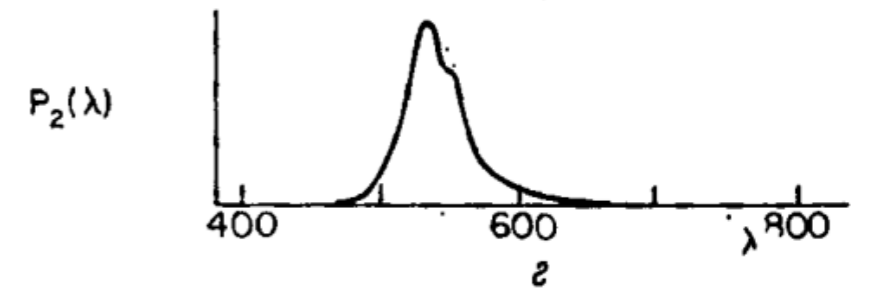
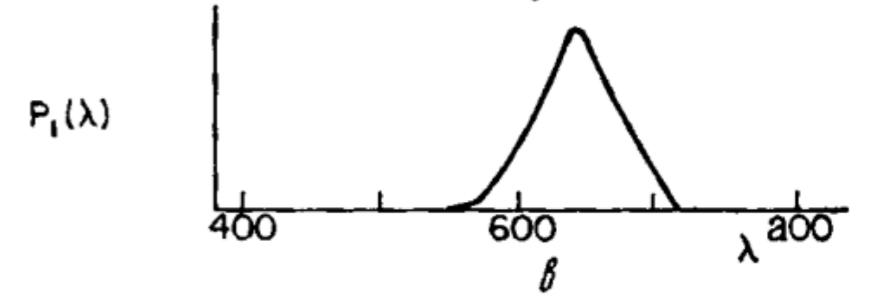
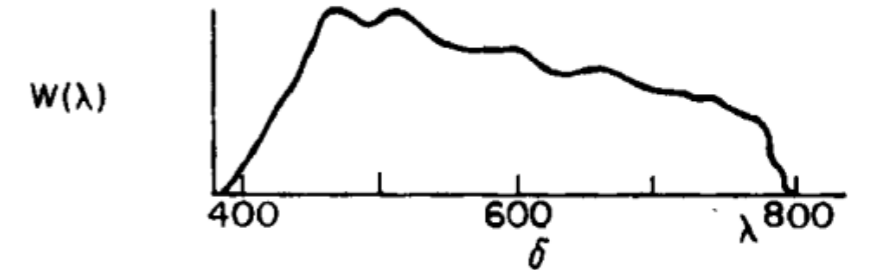
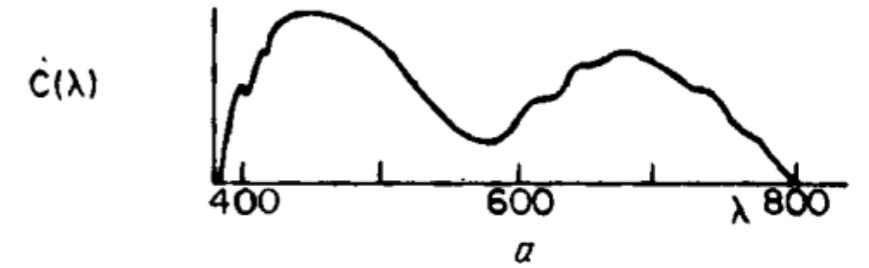
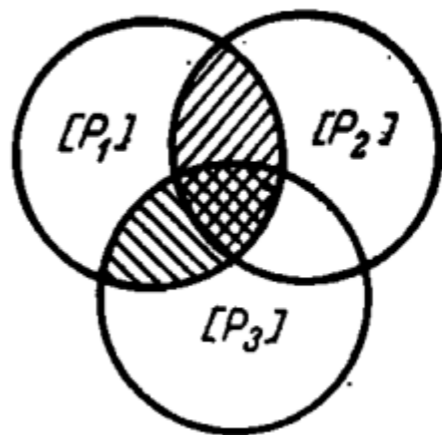
Уравнивание цветов

$$C(\lambda) \propto A_1(C)P_1(\lambda) + A_2(C)P_2(\lambda) + A_3(C)P_3(\lambda) = \sum_{j=1}^3 A_j(C)P_j(\lambda)$$

$$W(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 A_j(W)P_j(\lambda) \quad \text{- спектральная плотность белого (опорного) цвета}$$

$$T_j(C) = A_j(C)/A_j(W) \quad \text{- координаты цвета относительно опорного белого цвета:}$$

$$\Rightarrow C(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 T_j(C)A_j(W)P_j(\lambda)$$



Трех-цветовая модели. Колориметрия.

Уравнивание цветов

$$C(\lambda) \propto A_1(C)P_1(\lambda) + A_2(C)P_2(\lambda) + A_3(C)P_3(\lambda) = \sum_{j=1}^3 A_j(C)P_j(\lambda)$$

$$W(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 A_j(W)P_j(\lambda) \quad \text{- спектральная плотность белого (опорного) цвета}$$

$$T_j(C) = A_j(C)/A_j(W) \quad \text{- координаты цвета относительно опорного белого цвета:}$$

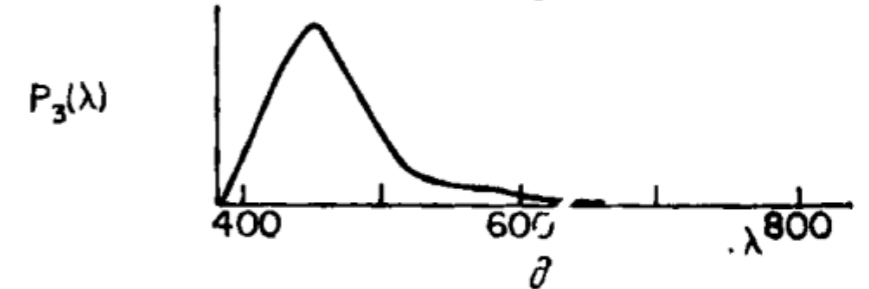
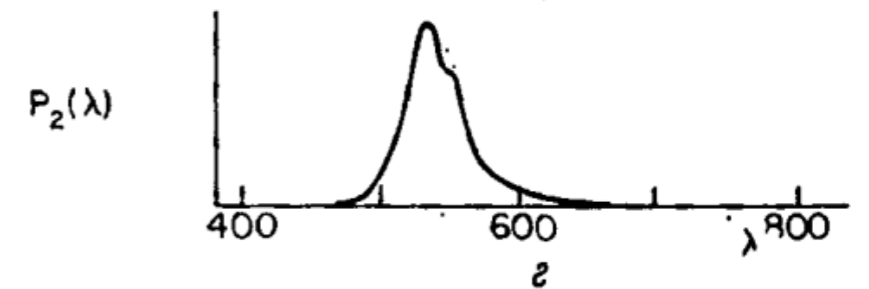
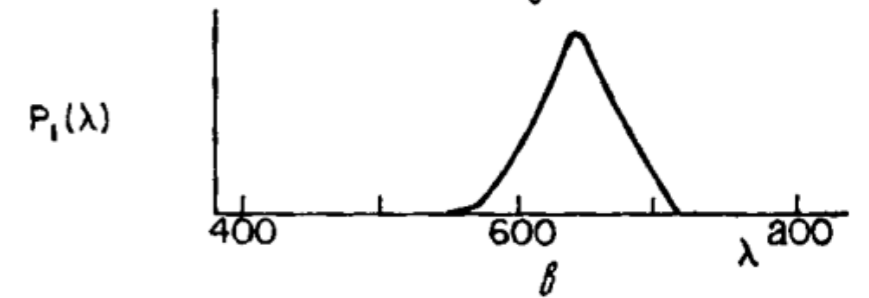
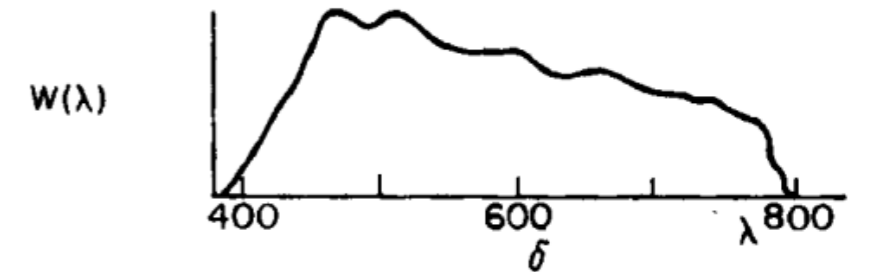
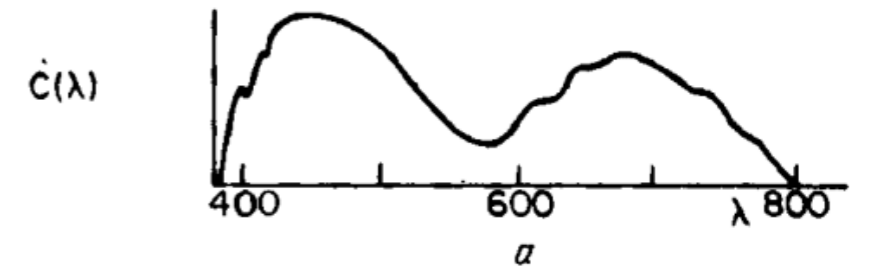
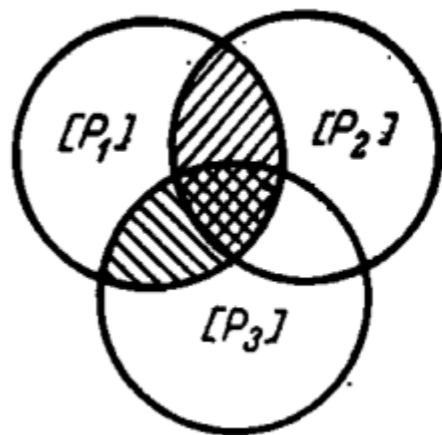
$$\Rightarrow C(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 T_j(C)A_j(W)P_j(\lambda)$$

$$\text{Субъективная яркость цвета: } L(C) \propto \int_0^{\infty} C(\lambda)V(\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^3 T_j(C) \int A_j(W)P_j(\lambda)V(\lambda)d\lambda$$

Яркостные коэффициенты основных цветов:

$$L(P_j) = \int A_j(W)P_j(\lambda)V(\lambda)d\lambda \quad \Rightarrow \quad L(C) \propto \sum_{j=1}^3 T_j(C)L(P_j)$$

$$\text{Координата цветности: } t_j(C) = \frac{T_j(C)}{\sum_{j=1}^3 T_j(C)}$$



Трех-цветовая модели. Колориметрия.

$$C(\lambda) \propto A_1(C)P_1(\lambda) + A_2(C)P_2(\lambda) + A_3(C)P_3(\lambda) = \sum_{j=1}^3 A_j(C)P_j(\lambda)$$

$$W(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 A_j(W)P_j(\lambda) \quad \text{- спектральная плотность белого (опорного) цвета}$$

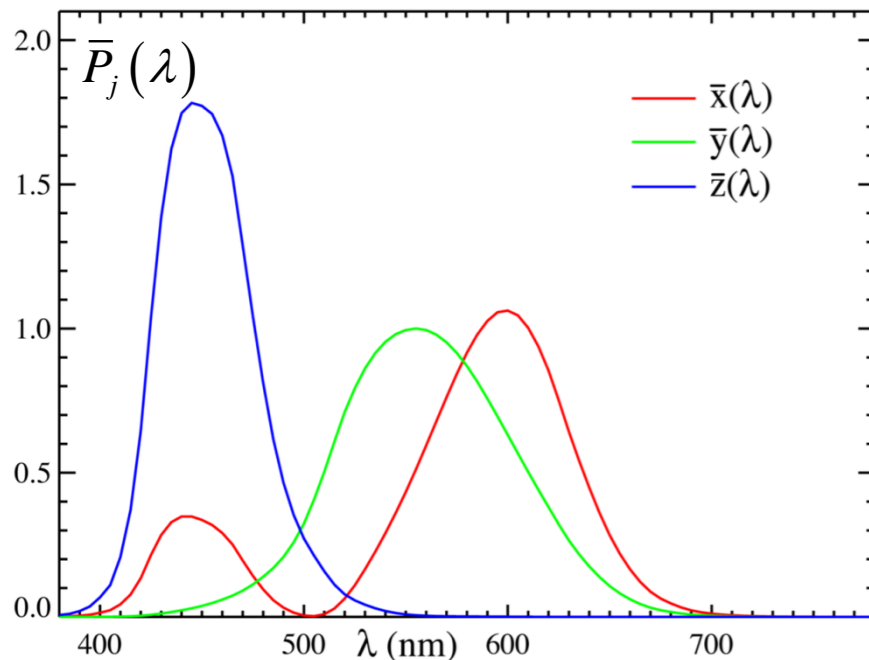
$$T_j(C) = A_j(C)/A_j(W) \quad \text{- координаты цвета относительно опорного белого цвета:}$$

$$\Rightarrow C(\lambda) \propto \sum_{j=1}^3 T_j(C)A_j(W)P_j(\lambda)$$

$$\text{Субъективная яркость цвета: } L(C) \propto \int_0^{\infty} C(\lambda)V(\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^3 T_j(C) \int A_j(W)P_j(\lambda)V(\lambda)d\lambda$$

Яркостные коэффициенты основных цветов:

$$L(P_j) = \int A_j(W)P_j(\lambda)V(\lambda)d\lambda \Rightarrow L(C) \propto \sum_{j=1}^3 T_j(C)L(P_j)$$

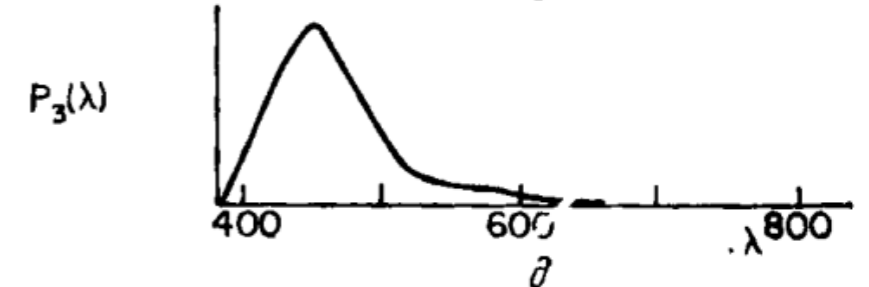
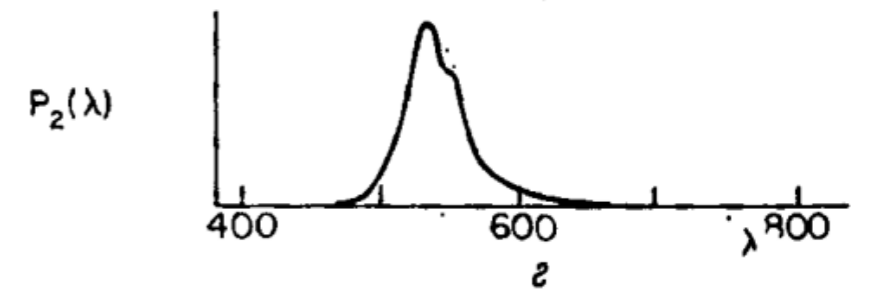
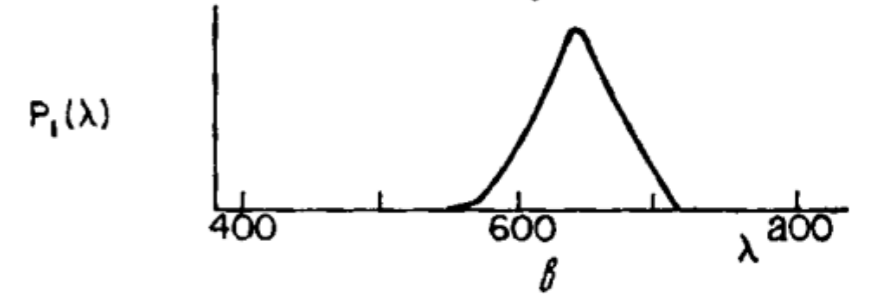
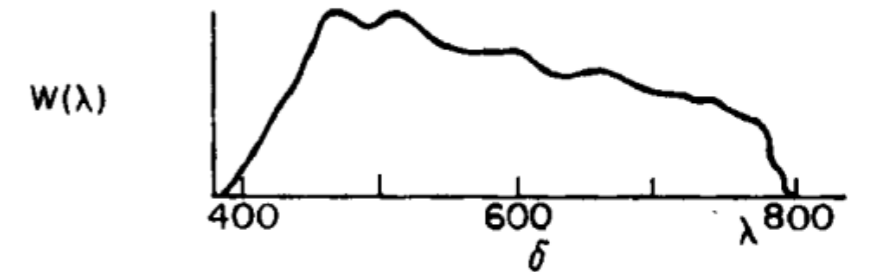
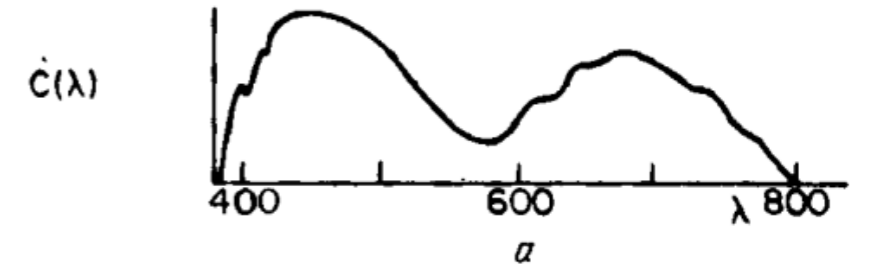


Стандарт основных цветов МКО (CIE XYZ 1931)
(красный – 700 нм, зеленый – 546,1 нм, синий – 435,8 нм, опорный источник D₆₅ (6500 К))

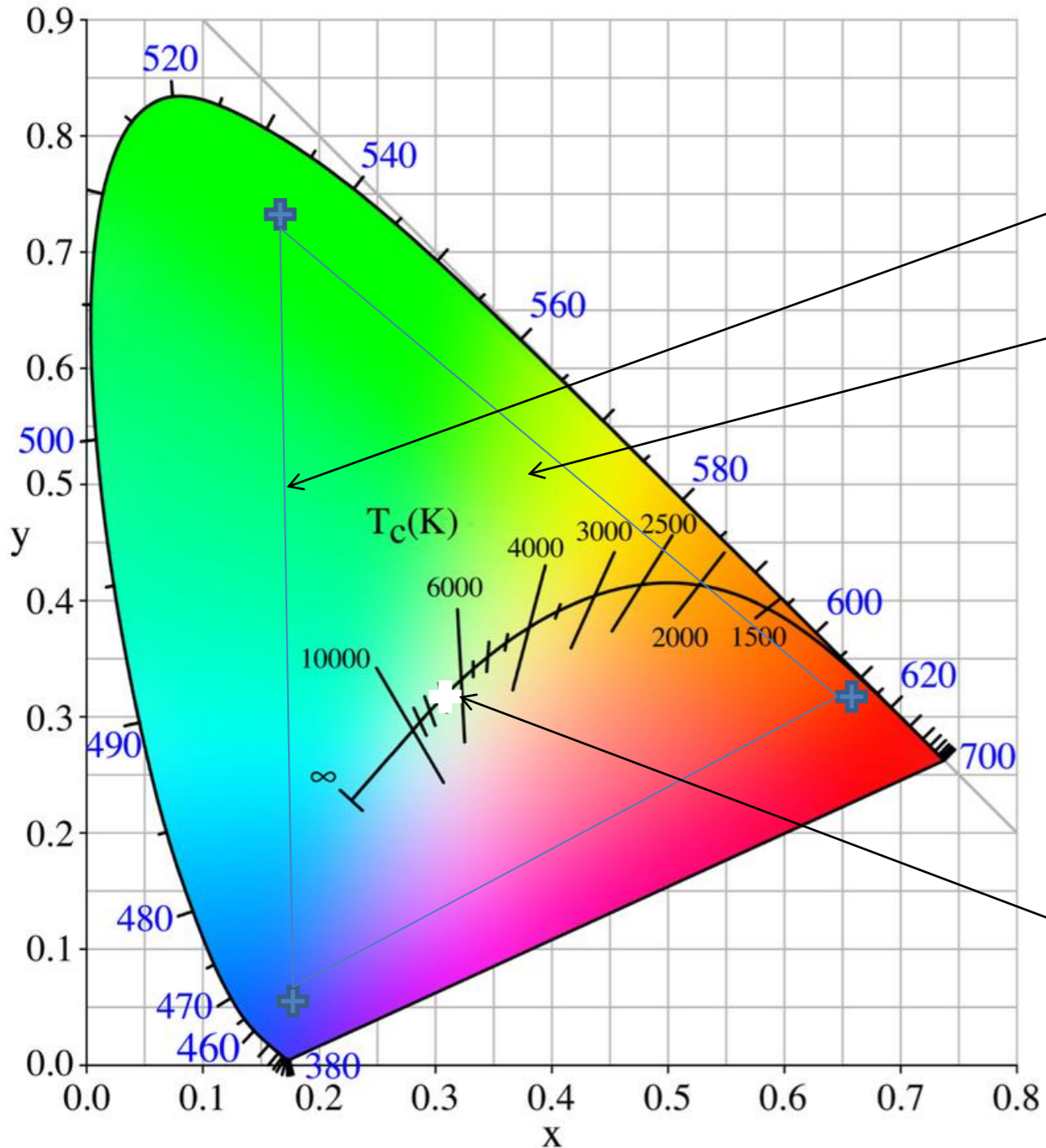
$$T_j(C) = \int_{380}^{780} C(\lambda)\bar{P}_j(\lambda)d\lambda$$

$$\text{Координата цветности: } t_j(C) = \frac{T_j(C)}{\sum_{j=1}^3 T_j(C)}$$

$$x = t_1, y = t_2, z = t_3$$



Трех-цветовая модели. Цветовой охват. RGB модель.



Координаты произвольного цвета как смесь координат опорных цветов.

Цвета точек на отрезках, соединяющих любые другие точки, определяются смешением их цветов.

Цвет точки внутри треугольника определяется линейной комбинацией цветов угловых точек.

Субъективные характеристики света:

Светлота – зрительное ощущение интенсивности света.

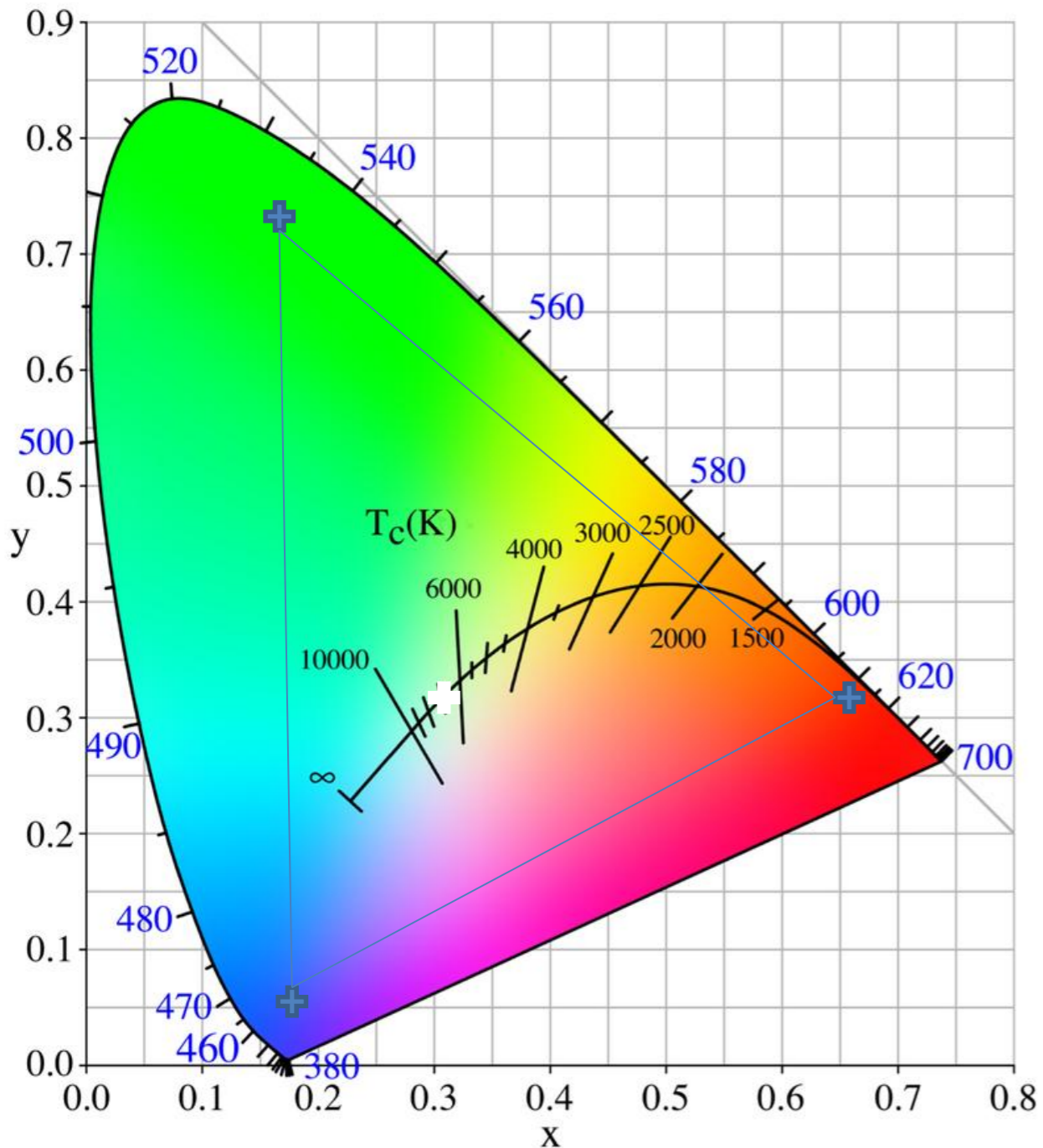
Цветовой тон – воспринимаемый доминирующий цвет.

Насыщенность – относительная белизна, количество белого цвета

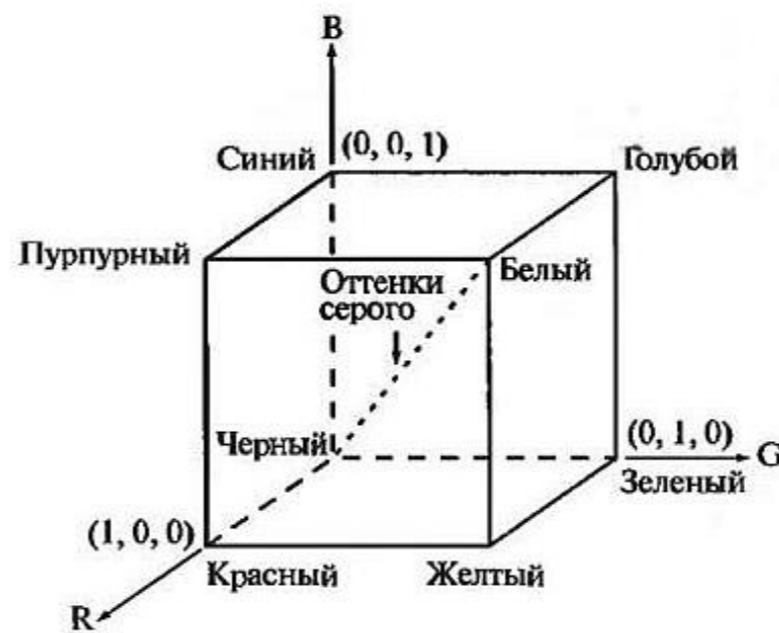
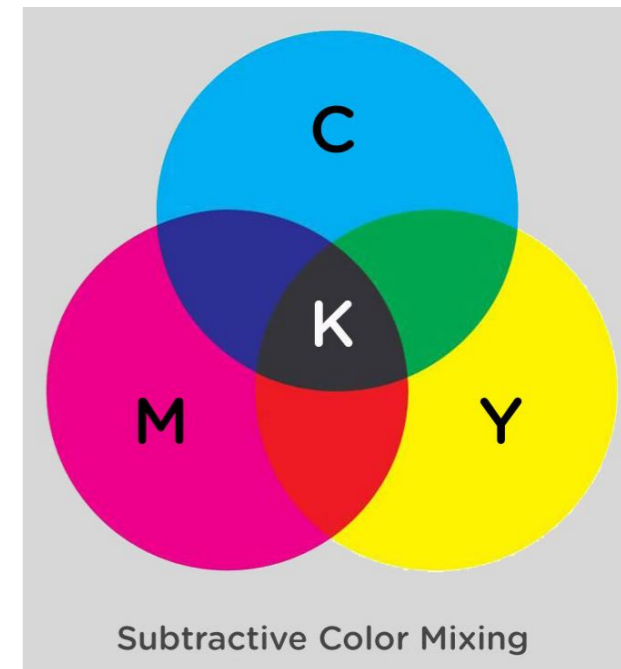
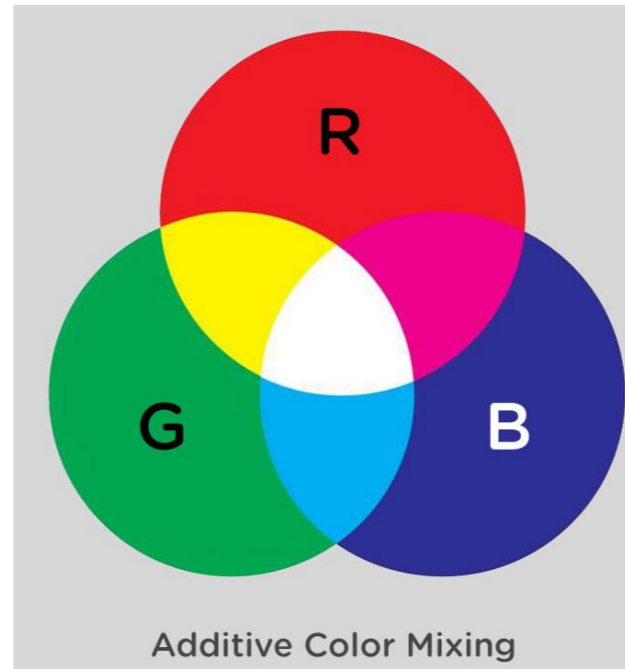
Опорный белый - точка равной энергии

Не все цвета могут быть получены смешением трех зафиксированных цветов

Трех-цветовая модели. Цветовой охват. RGB модель.



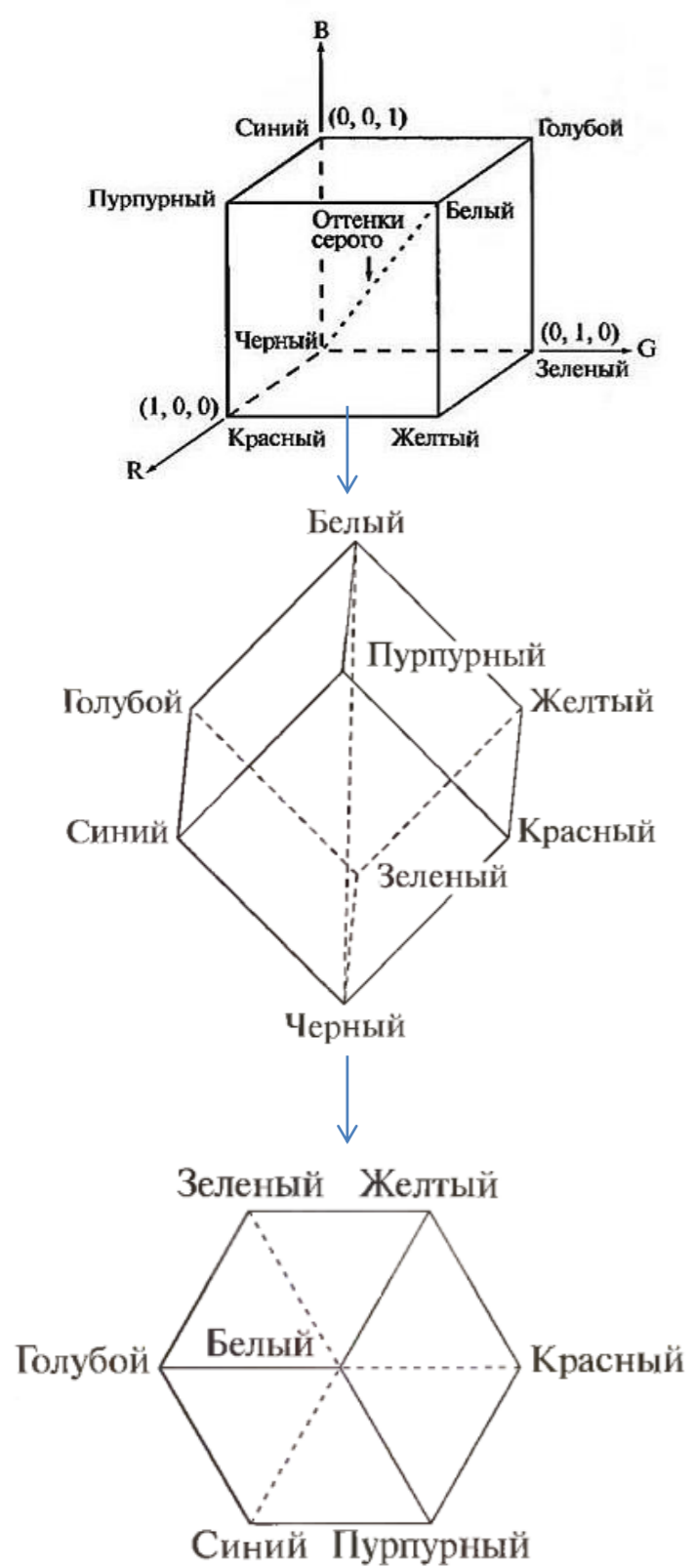
Координаты произвольного цвета как смесь координат опорных цветов.



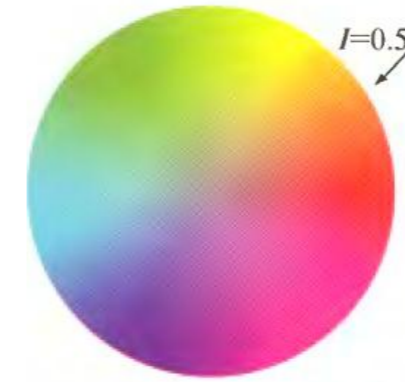
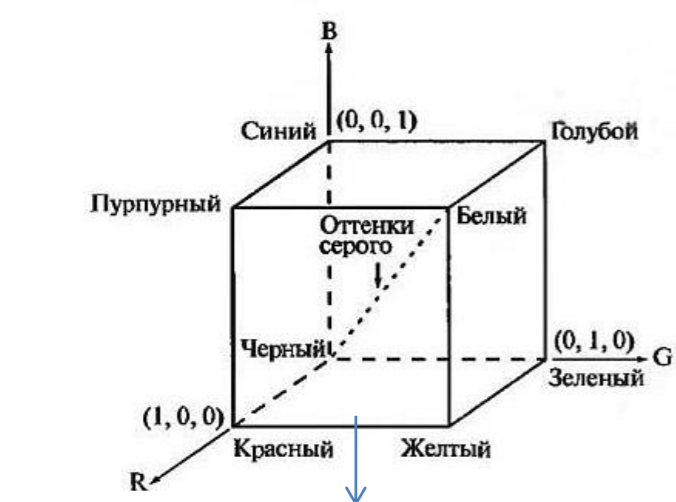
$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$



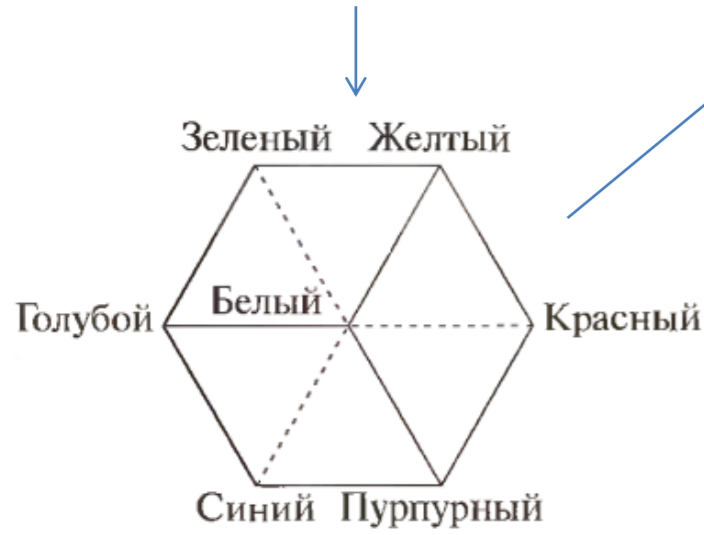
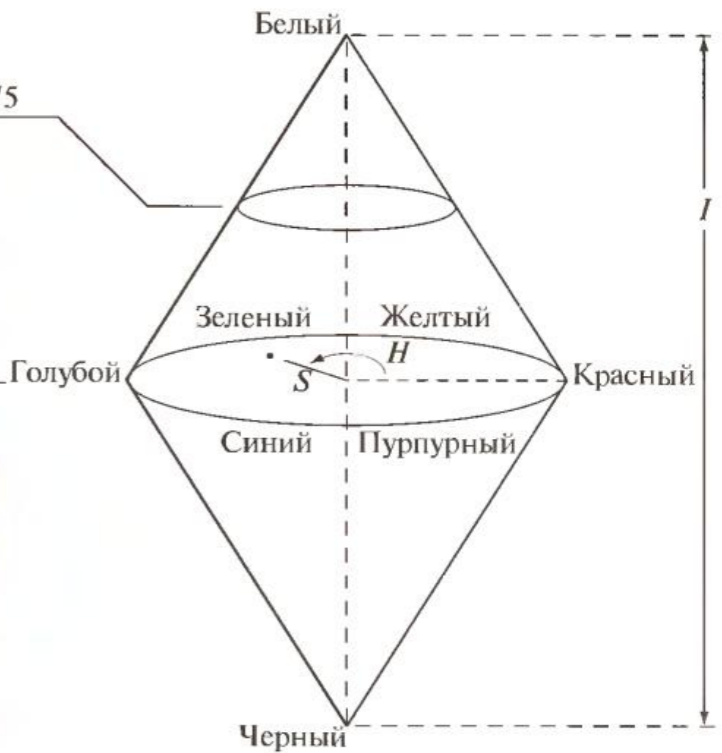
Трех-цветовая модель. HSI модель.



Трех-цветовая модель. HSI модель.



HSI



$$H = \begin{cases} \theta & \text{при } B \leq G, \\ 360 - \theta & \text{при } B > G, \end{cases} \quad \theta = \arccos \left\{ \frac{\frac{1}{2}[(R-G) + (R-B)]}{[(R-G)^2 + (R-B)(G-B)]^{1/2}} \right\}$$

$$S = 1 - \frac{3}{(R+G+B)} [\min(R, G, B)]$$

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B)$$

Трёх-цветовая модель. HSV модель.

RGB → HSV [править | править код]

Считаем, что:

$$H \in [0, 360]$$

$$S, V, R, G, B \in [0, 1]$$

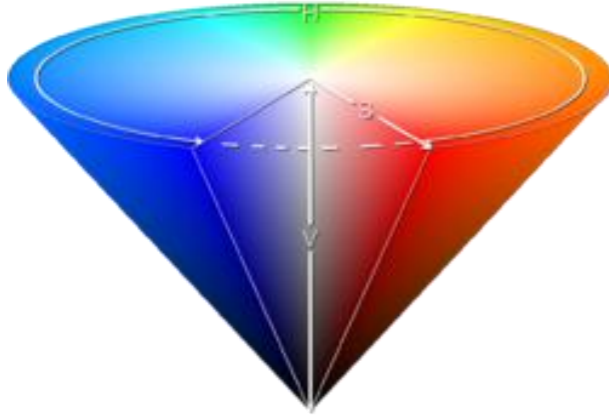
Пусть MAX — максимальное значение из R, G и B , а MIN — минимальное из них.

не определено, если $MAX = MIN$

$$H = \begin{cases} 60 \times \frac{G - B}{MAX - MIN} + 0, & \text{если } MAX = R \text{ и } G \geq B \\ 60 \times \frac{G - B}{MAX - MIN} + 360, & \text{если } MAX = R \text{ и } G < B \\ 60 \times \frac{B - R}{MAX - MIN} + 120, & \text{если } MAX = G \\ 60 \times \frac{R - G}{MAX - MIN} + 240, & \text{если } MAX = B \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 0, & \text{если } MAX = 0; \\ 1 - \frac{MIN}{MAX}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$V = MAX$$



Трёх-цветовая модель. HSV модель.

RGB → HSV [править | править код]

Считаем, что:

$$H \in [0, 360]$$

$$S, V, R, G, B \in [0, 1]$$

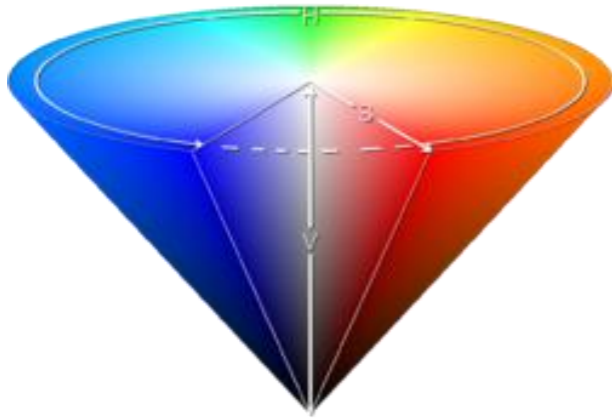
Пусть MAX — максимальное значение из R, G и B , а MIN — минимальное из них.

не определено, если $MAX = MIN$

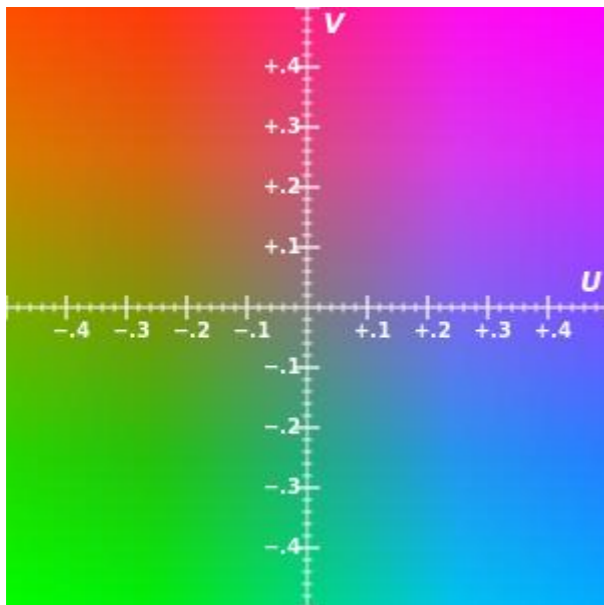
$$H = \begin{cases} 60 \times \frac{G - B}{MAX - MIN} + 0, & \text{если } MAX = R \text{ и } G \geq B \\ 60 \times \frac{G - B}{MAX - MIN} + 360, & \text{если } MAX = R \text{ и } G < B \\ 60 \times \frac{B - R}{MAX - MIN} + 120, & \text{если } MAX = G \\ 60 \times \frac{R - G}{MAX - MIN} + 240, & \text{если } MAX = B \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 0, & \text{если } MAX = 0; \\ 1 - \frac{MIN}{MAX}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$V = MAX$$



YUV, YCbCr модель в JPEG (T-REC-T.871).



$$Y = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B \quad U = B - Y \quad V = R - Y$$

$$C_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{B - Y}{1 - 0.114} + 128 \approx -0.1687 \cdot R - 0.3313 \cdot G + 0.5 \cdot B + 128$$

$$C_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{R - Y}{1 - 0.299} + 128 \approx 0.5 \cdot R - 0.4187 \cdot G - 0.0813 \cdot B + 128$$

- нормировка разностей

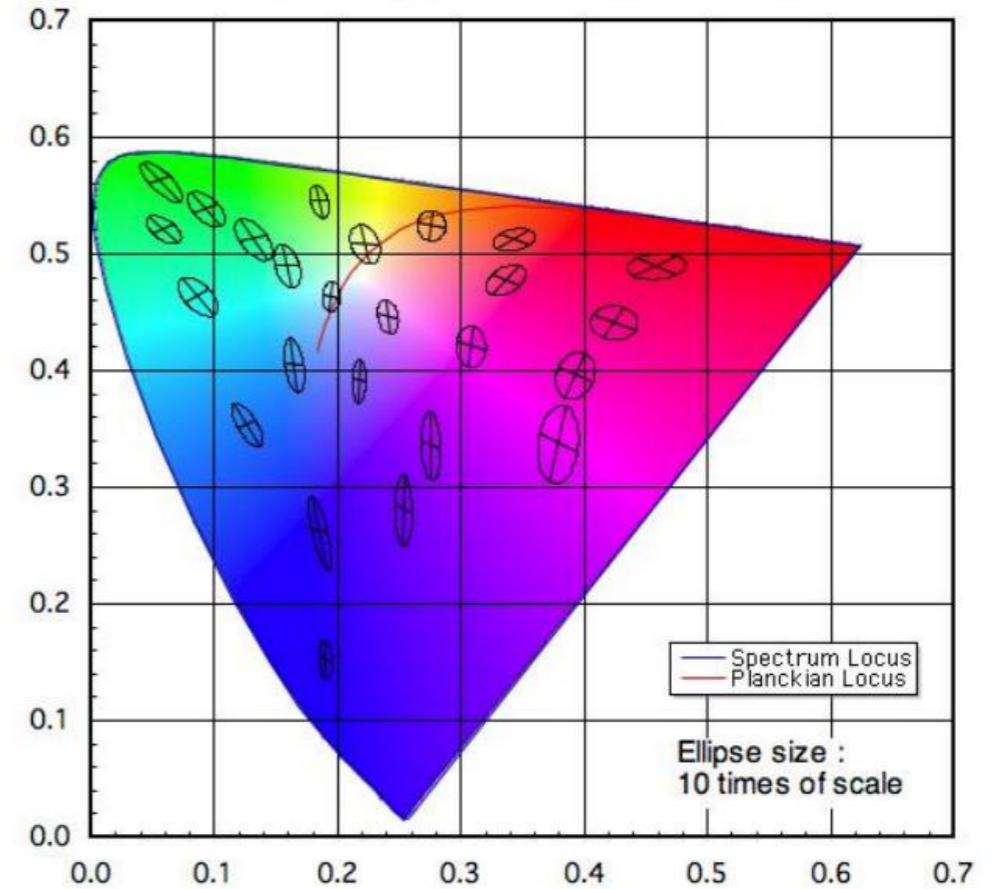
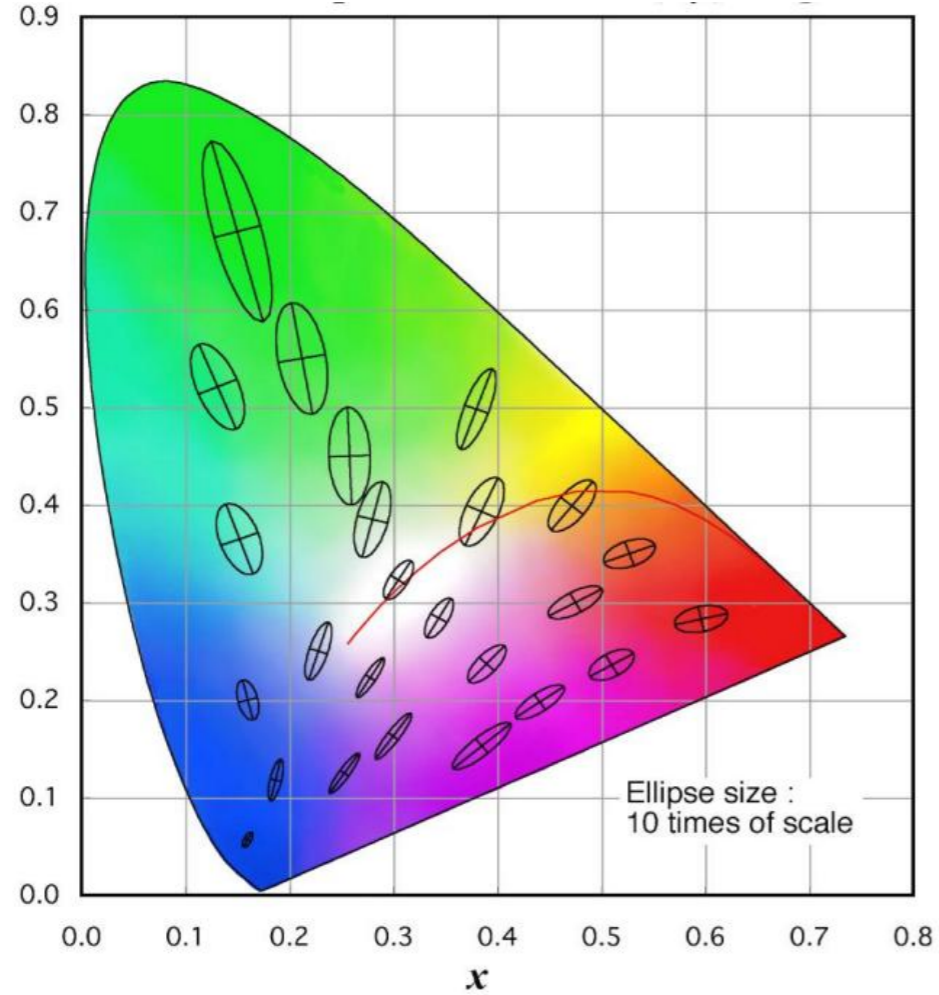
$$R = Y + 1.402 \cdot (C_R - 128)$$

$$G = Y - (0.114 \cdot 1.772 \cdot (C_B - 128) + 0.299 \cdot 1.402 \cdot (C_R - 128)) / 0.587$$

$$B = Y + 1.772 \cdot (C_B - 128)$$

Трёх-цветовая модель.

Равноконтрастный CIE 1976 L*a*b*



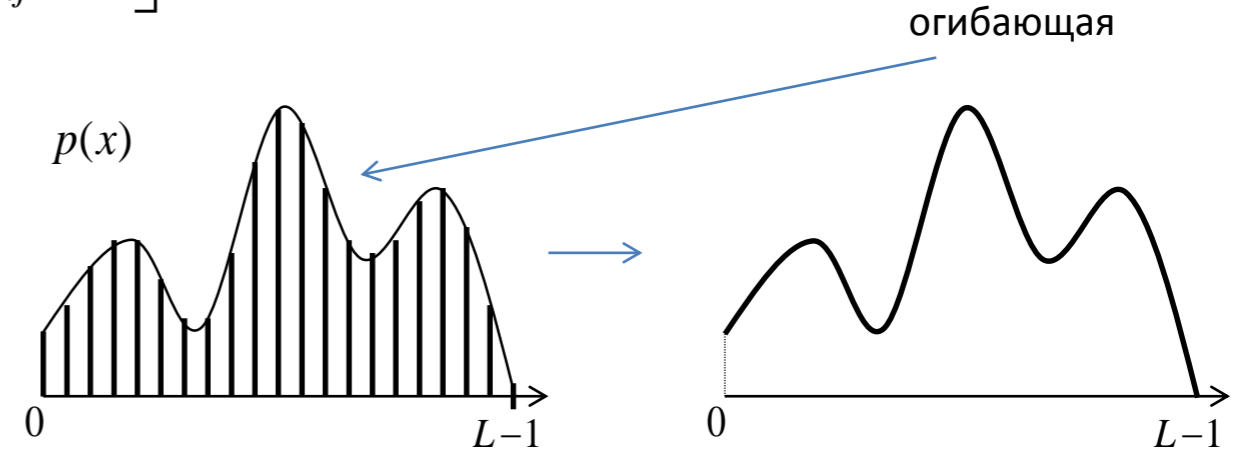
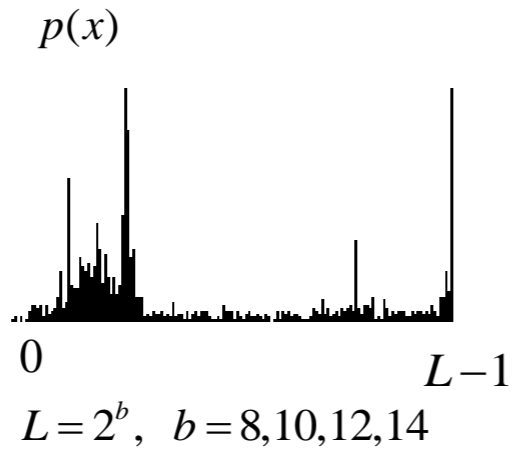
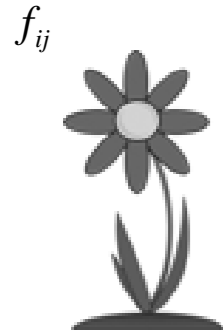
$$\begin{aligned}L^* &= 116 f(Y/Y_n) - 16 \\a^* &= 500 [f(X/X_n) - f(Y/Y_n)] \\b^* &= 200 [f(Y/Y_n) - f(Z/Z_n)]\end{aligned}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} t^{1/3}, & t > (6/29)^3 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{29}{6}\right)^2 t + \frac{4}{29} & \end{cases}$$

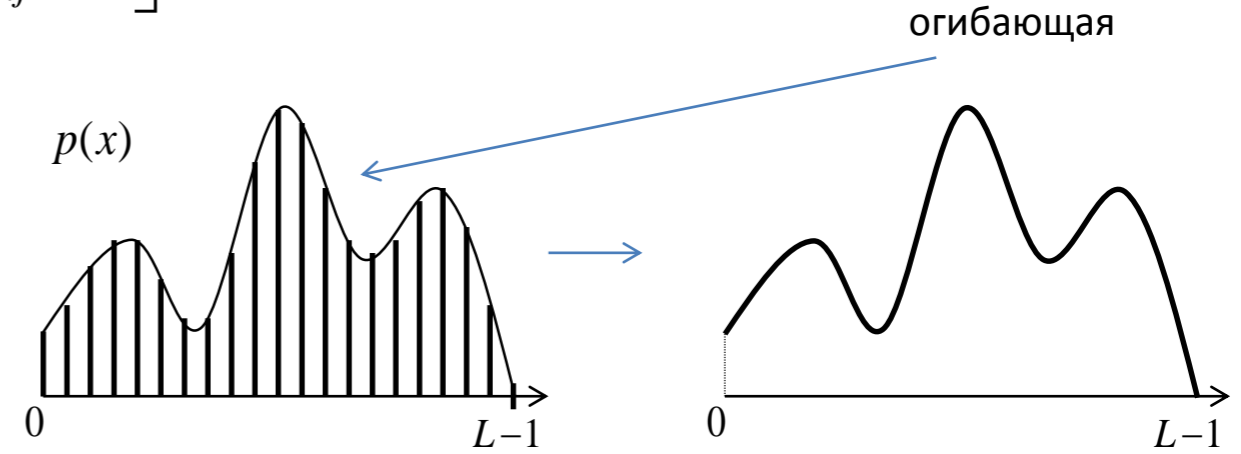
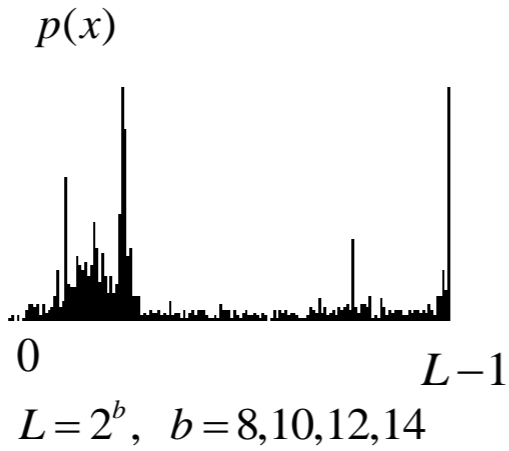
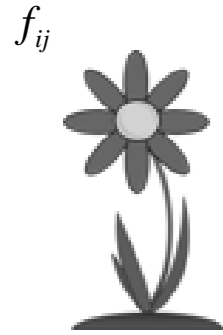
Гистограмма изображения

$$p(x) = \sum_{i,j \in W \times H} 1[f_{ij} = x]$$



Гистограмма изображения

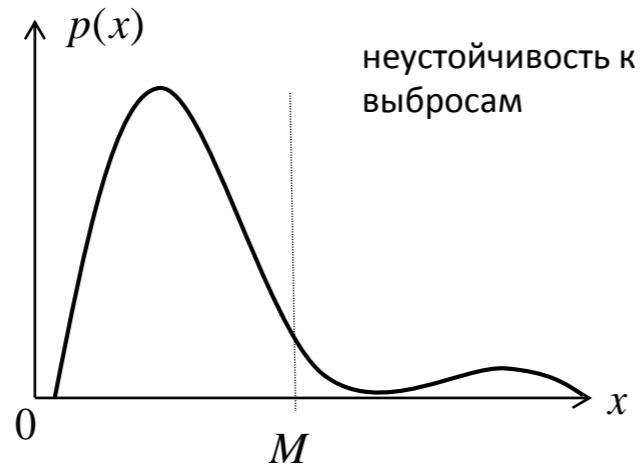
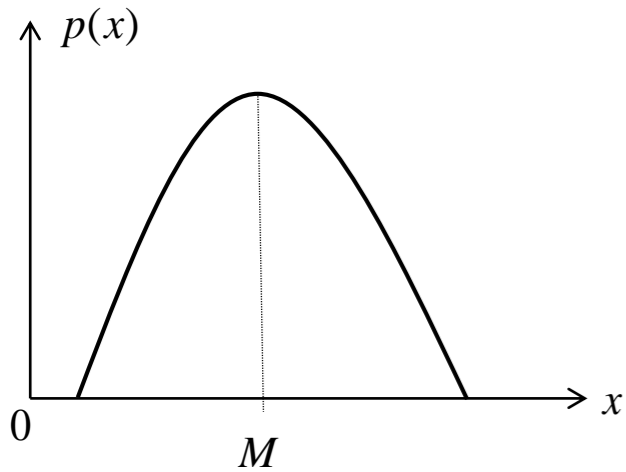
$$p(x) = \sum_{i,j \in W \times H} 1[f_{ij} = x]$$



Характеристики гистограммы

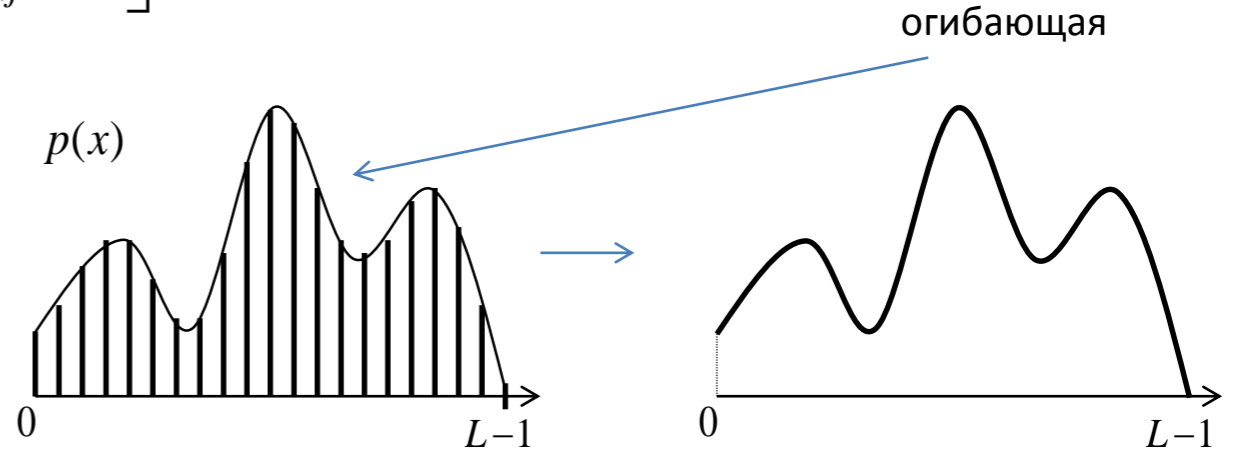
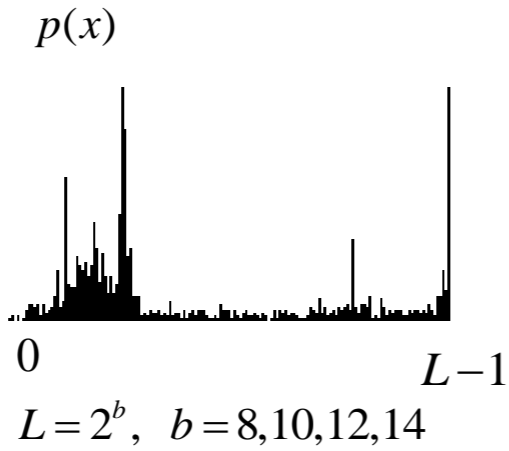
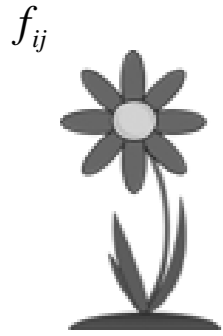
среднее

$$M = \frac{\sum_x x \cdot p(x)}{\sum_x p(x)}$$



Гистограмма изображения

$$p(x) = \sum_{i,j \in W \times H} 1[f_{ij} = x]$$



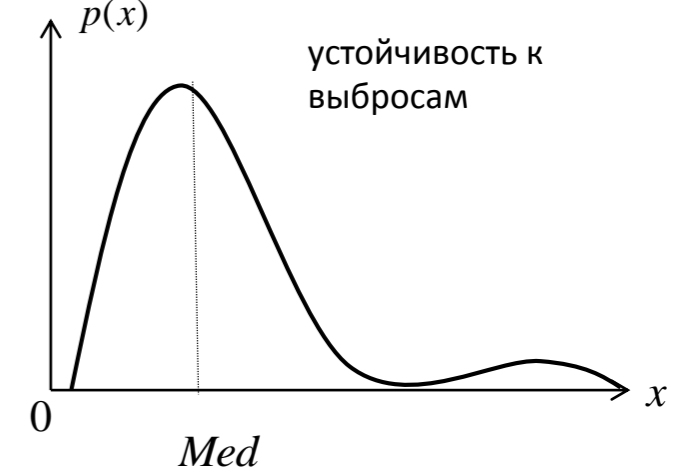
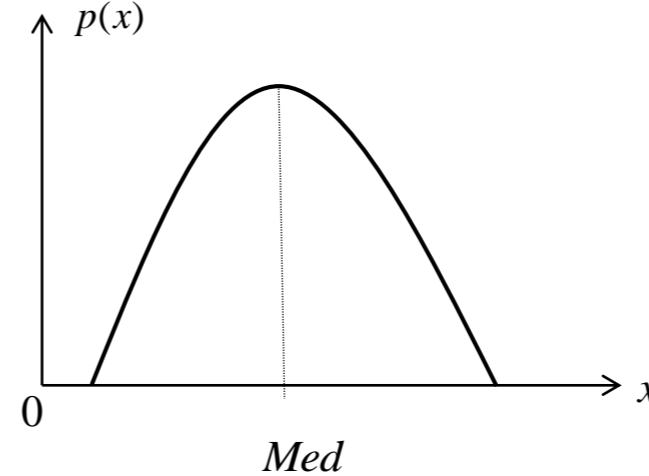
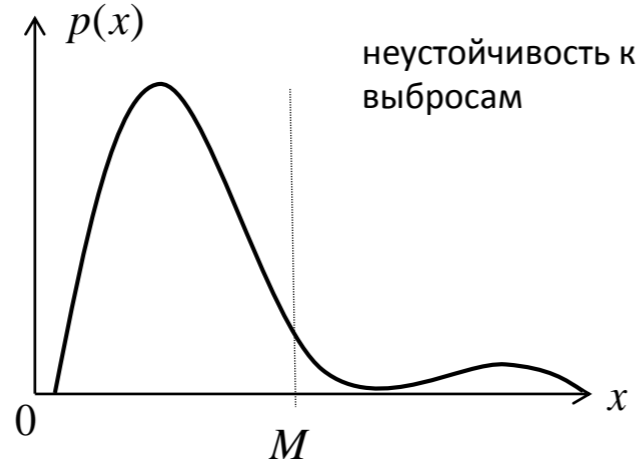
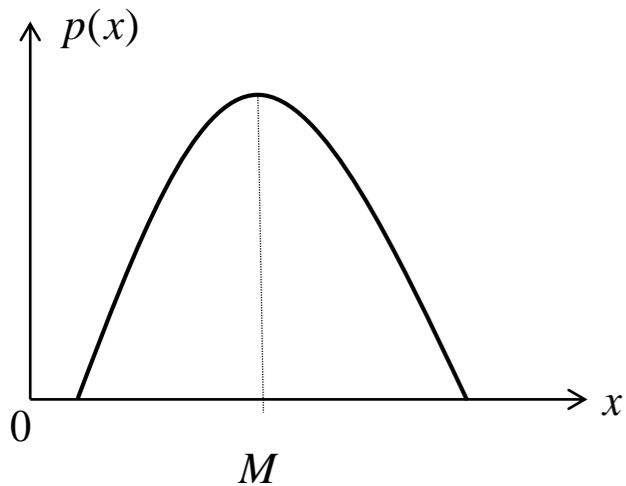
Характеристики гистограммы

среднее

$$M = \langle x \rangle = \frac{\sum_x x \cdot p(x)}{\sum_x p(x)}$$

медиана

$$\sum_0^{Med-1} p(x) = \sum_{Med}^{L-1} p(x)$$



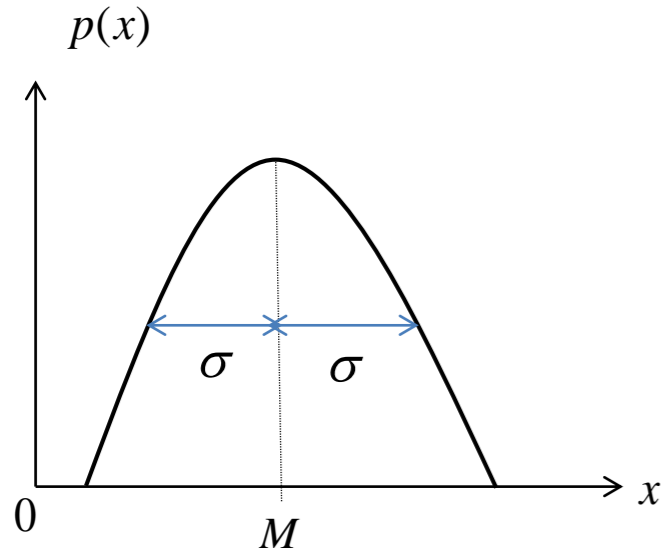
Гистограмма изображения

Характеристики гистограммы

Дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_x p(x)} \sum_x (x - M)^2 p(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(среднеквадратичная контрастность)



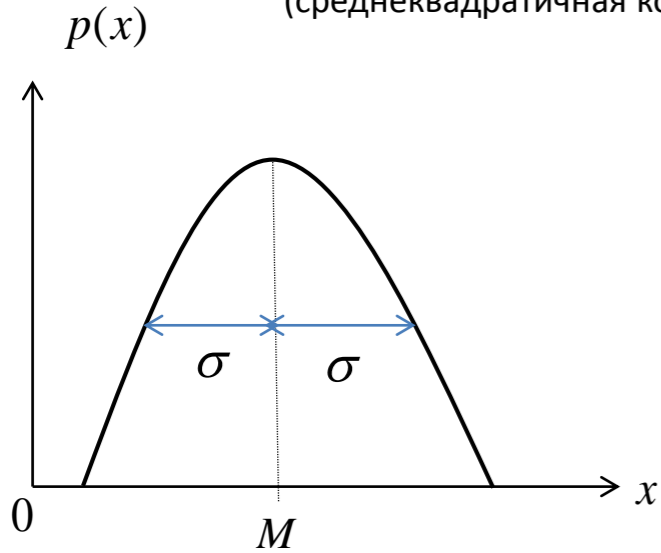
Гистограмма изображения

Характеристики гистограммы

Дисперсия

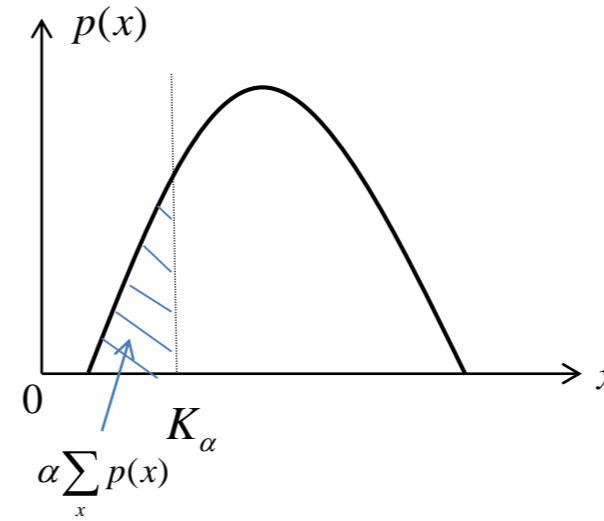
$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_x p(x)} \sum_x (x - M)^2 p(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(среднеквадратичная контрастность)



Квантиль

$$\sum_{x=0}^{K_\alpha} p(x) = \alpha \sum_{x=0}^{L-1} p(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

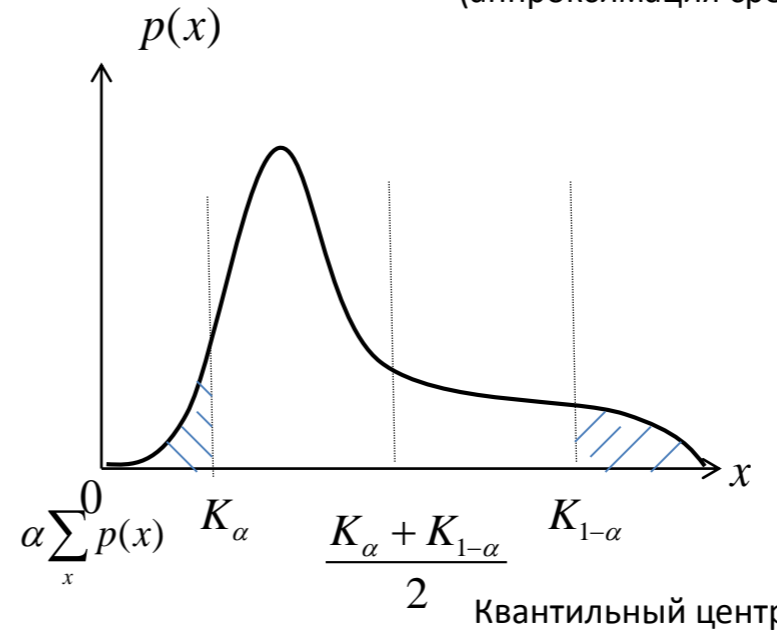


$$Med = K_{0.5}$$

Интерквантильный размах

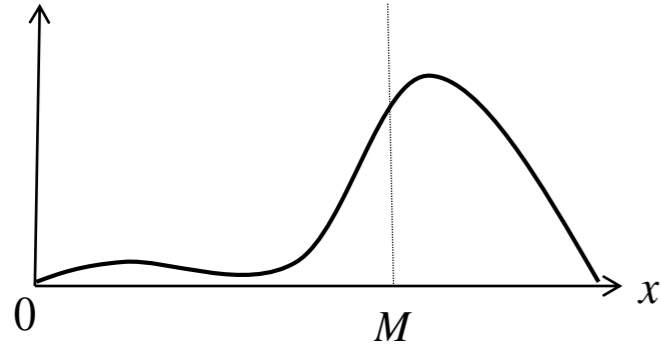
$$\Delta K = K_{1-\alpha} - K_\alpha$$

(аппроксимация среднеквадратичной контрастности)

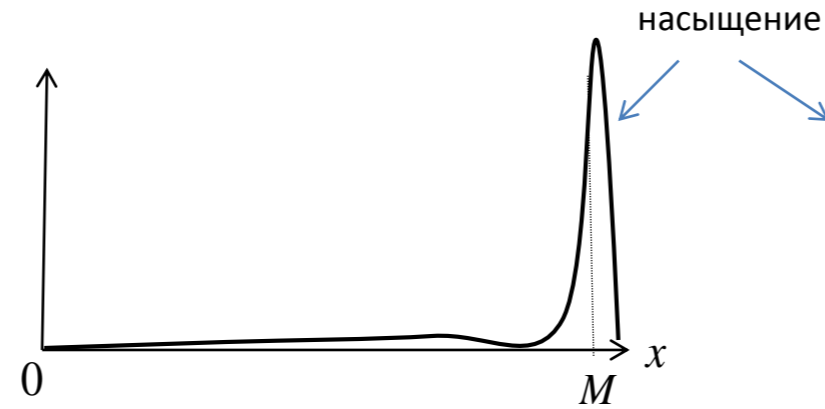


Типы гистограмм

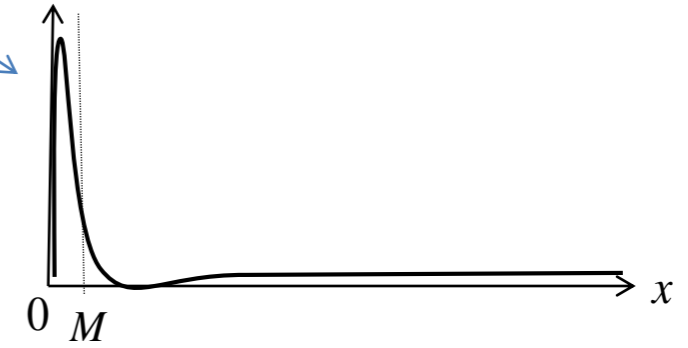
Яркое изображение



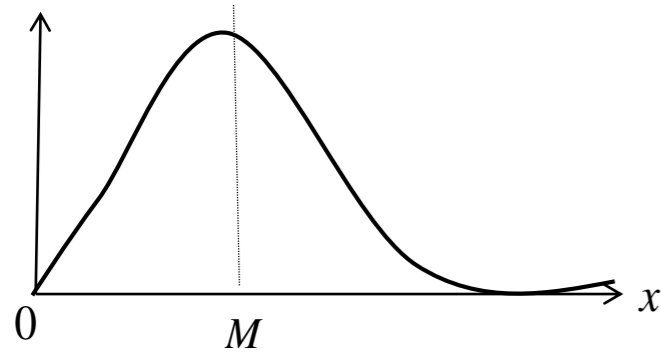
Пересвеченное изображение



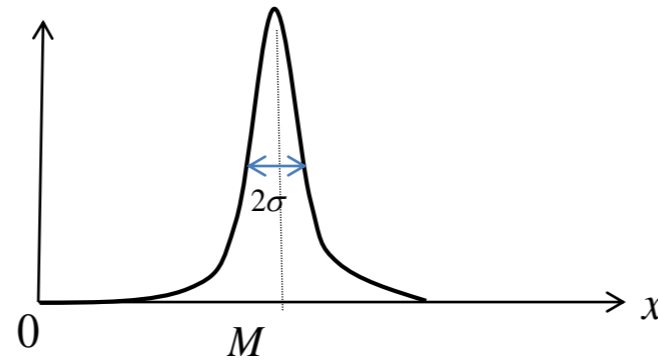
Ночное изображение



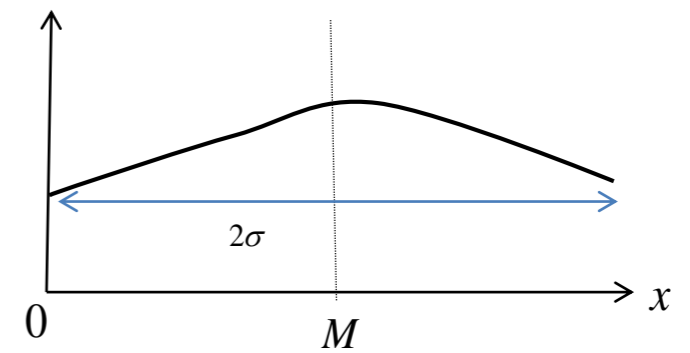
Темное изображение



Низкоконтрастное изображение



Контрастное изображение



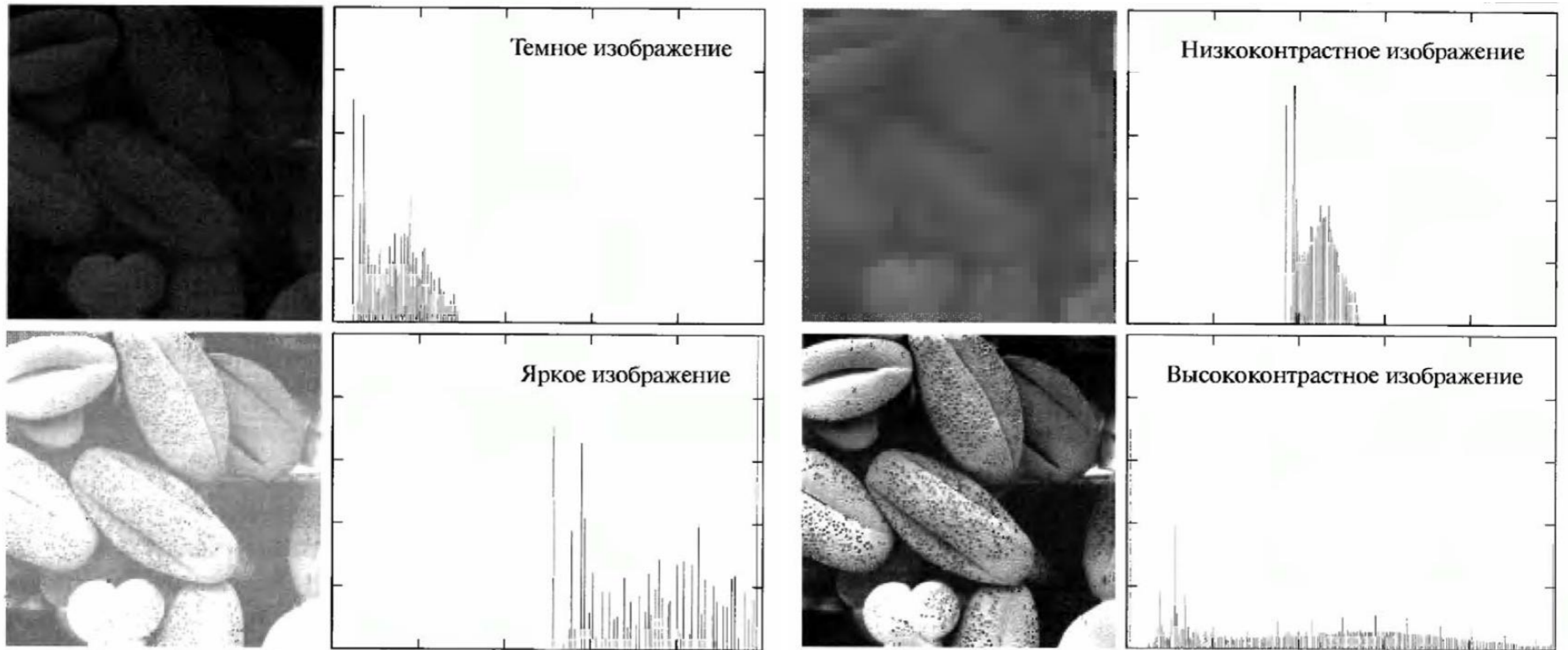
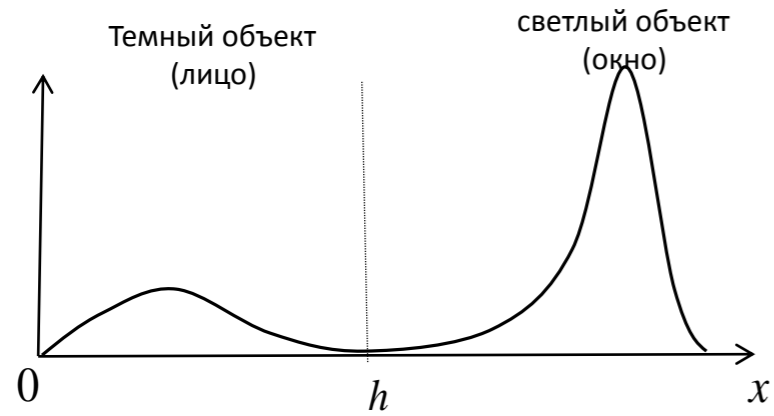


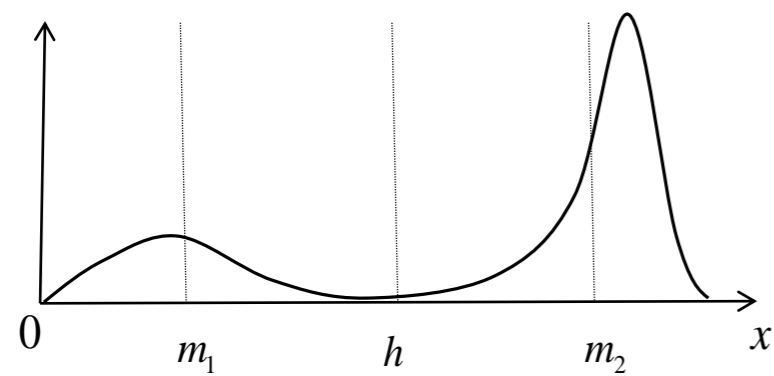
Рис. 3.15. Четыре основных типа изображения: темное, светлое, низкоконтрастное и высококонтрастное. (Исходное изображение предоставил д-р Роджер Хиди, Факультет биологических исследований Австралийского национального университета, Канберра, Австралия).

Бимодальная гистограмма



Методы нахождения h

- Алгоритм Отсу (Otsu)
- Итеративным половинным делением:



$$h = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

Бинаризация по порогу h

