

Графические модели: введение

Александр Адуенко

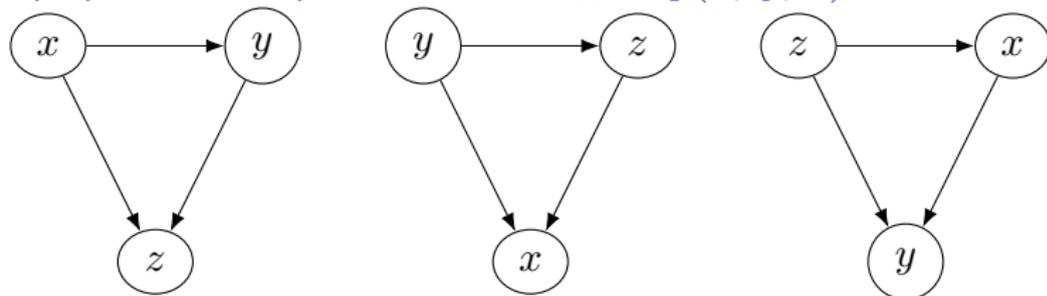
14е марта 2025

- Фильтр Калмана.
- EM-алгоритм. Использование EM-алгоритма для отбора признаков в байесовской линейной регрессии.
- Вариационный EM-алгоритм и его использование для вывода в смеси моделей линейной регрессии.

Идея: Представим совместное распределение переменных в виде графа.

Пример: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x, y)$.

Графическая вероятностная модель $p(x, y, z)$



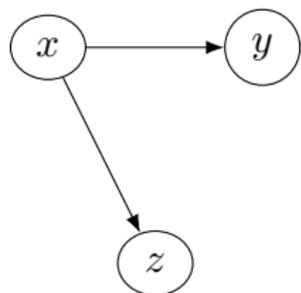
Вопрос 1: Чему соответствуют представления на средней и правой картинке?

$$p(x_1, \dots, x_K) = p(x_1)p(x_2|x_1) \cdot \dots \cdot p(x_K|x_1, \dots, x_{K-1}).$$

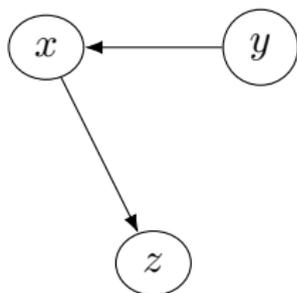
Вопрос 2: Для каких распределений выполнено разложение выше?

Вопрос 3: Какое представление получается для $p(x_1, \dots, x_K)$ при таком разложении?

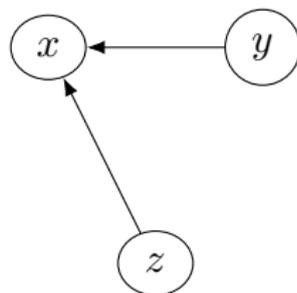
Идея: Представим совместное распределение переменных в виде графа.



Граф 1



Граф 2



Граф 3

Вопрос: Одинаковые ли совместные распределения соответствуют графическим представлениям выше?

Граф 1: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x)$;

Граф 2: $p(x, y, z) = p(y)p(x|y)p(z|x)$;

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.

Понятие условной независимости

Независимость: $p(y, z) = p(y)p(z)$.

Условная независимость: $p(y, z|x) = p(y|x)p(z|x)$.

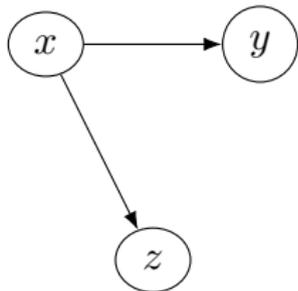
Вопрос: Какое из определений более требовательное? Следует ли из независимости условная независимость и наоборот?

Свойство: $p(x|y, z) \propto p(x|y)p(x|z)$.

Граф 1: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x)$;

Граф 2: $p(x, y, z) = p(y)p(x|y)p(z|x)$;

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.



$p(y, z|x) = p(z|x)p(y|x, z) = p(z|x)p(y|x) \implies$
 (y, z) условно независимы при x .

$p(y, z) = \int p(x)p(y|x)p(z|x)dx \neq p(y)p(z) \implies$
 (y, z) зависимы.

Пример:

$x \rightarrow \mathbf{w}, y \rightarrow y_1 = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_1 + \varepsilon_1, z \rightarrow y_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_2 + \varepsilon_2$.

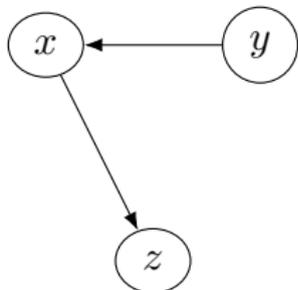
Граф 1

Понятие условной независимости (продолжение)

Граф 1: $p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|x)$;

Граф 2: $p(x, y, z) = p(y)p(x|y)p(z|x)$;

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.



$p(y, z|x) = p(z|x)p(y|x, z) = p(z|x)p(y|x) \implies$
 (y, z) условно независимы при x .

$p(y, z) = \int p(y)p(x|y)p(z|x)dx \neq p(y)p(z) \implies$
 (y, z) зависимы.

Пример:

$x \rightarrow \mathbf{w}$; $y \rightarrow \mathbf{A}$, $\alpha_j \sim \Gamma(\nu, \eta)$; $z \rightarrow y = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + \varepsilon$.

$p(y, z|x) \neq p(z|x)p(y|x)$, т.к.

$p(x|y, z) \neq p(x|y)p(x|z) \implies$

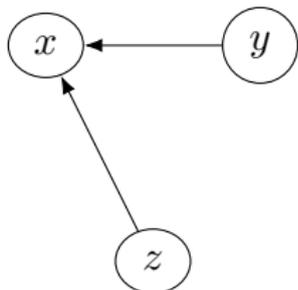
(y, z) условно зависимы при x .

$p(y, z) = \int p(y)p(z)p(x|y, z)dx = p(y)p(z) \implies$

(y, z) независимы.

Вопрос: Приведите пример модели с таким правдоподобием.

Граф 2



Граф 3

Смесь моделей линейной регрессии

Вероятностная модель генерации данных

- Веса моделей в смеси π получены из априорного распределения $p(\pi|\mu)$;
- Векторы параметров моделей \mathbf{w}_k получены из нормального распределения $p(\mathbf{w}_k|\mathbf{A}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1})$, $k = 1, \dots, K$;
- Для каждого объекта \mathbf{x}_i выбрана модель f_{k_i} , которой он описывается, причем $p(k_i = k) = \pi_k$;
- Для каждого объекта \mathbf{x}_i целевая переменная y_i определена в соответствии с моделью f_{k_i} : $y_i \sim \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_{k_i}^\top \mathbf{x}_i, \sigma_{k_i}^2)$.

Совместное правдоподобие модели

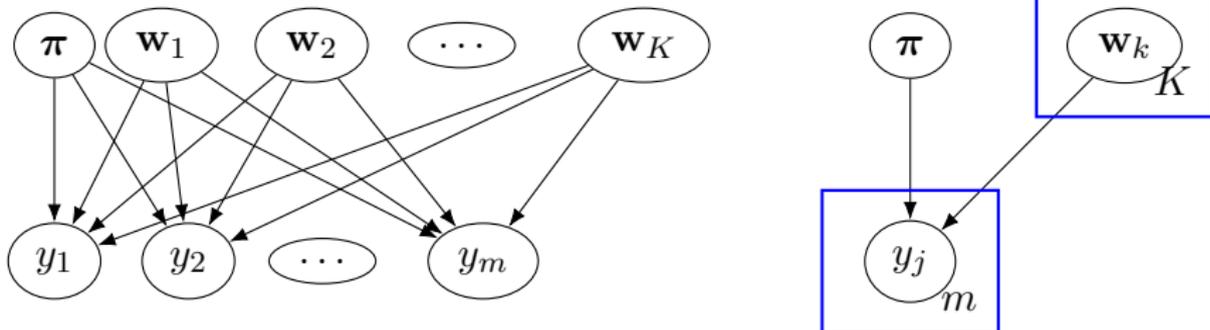
$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, \pi | \mathbf{X}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2, \mu) = p(\pi|\mu) \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1}) \prod_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^K \pi_l \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_l^\top \mathbf{x}_i, \sigma_l^2) \right).$$

Введем матрицу скрытых переменных $\mathbf{Z} = \|z_{ik}\|$, где $z_{ik} = 1 \iff k_i = k$.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K, \pi, \mathbf{Z} | \mathbf{X}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2, \mu) = p(\pi|\mu) \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k^{-1}) \prod_{i=1}^m \prod_{l=1}^K \left(\pi_l \mathcal{N}(y_i|\mathbf{w}_l^\top \mathbf{x}_i, \sigma_l^2) \right)^{z_{il}}.$$

Представление смеси моделей в виде графа

Граф 3: $p(x, y, z) = p(z)p(y)p(x|z, y)$.



Вопрос 1: Как в представлении учитывается то, что смесь составлена из моделей линейной регрессии?

Вопрос 2: Как учесть, что $p(\pi) = \text{Dir}(\mu)$?

Вопрос 3: Как указать наличие наблюдаемого признакового описания x_1, \dots, x_m и гиперпараметров модели \mathbf{A} , σ^2 ?

Вопрос 4: Зачем нам графическое представление вероятностных моделей?

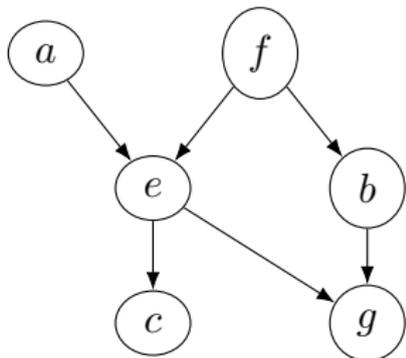
Критерий условной независимости D-separation

Рассмотрим две группы переменных A , B и проверим их условную независимость при условии группы переменных C .

D-separation. Группы переменных A и B условно независимы, если все неориентированные пути из A в B заблокированы C .

Путь из вершины a в вершину b называется заблокированным набором вершин C , если выполнено хотя бы одно из условий

- Стрелки на пути встречаются перед-хвост или хвост-хвост в вершине $c \in C$;
- Стрелки на пути встречаются перед-перед в вершине x , такой, что $x \notin C$ и все ее ориентированные потомки $y \notin C$.



Пути из a в b : $a \rightarrow e \rightarrow g \leftarrow b$; $a \rightarrow e \leftarrow f \rightarrow b$.

Вопрос: Зависимы ли переменные a и b ?

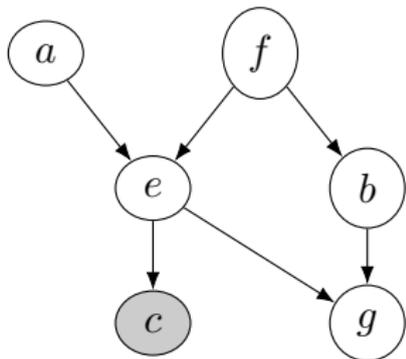
D-separation: продолжение

Рассмотрим две группы переменных A , B и проверим их условную независимость при условии группы переменных C .

D-separation. Группы переменных A и B условно независимы, если все неориентированные пути из A в B заблокированы C .

Путь из вершины a в вершину b называется заблокированным набором вершин C , если выполнено хотя бы одно из условий

- Стрелки на пути встречаются перед-хвост или хвост-хвост в вершине $c \in C$;
- Стрелки на пути встречаются перед-перед в вершине x , такой, что $x \notin C$ и все ее ориентированные потомки $y \notin C$.



Пути из a в b : $a \rightarrow e \rightarrow g \leftarrow b$; $a \rightarrow e \leftarrow f \rightarrow b$.

Вопрос: Независимы ли переменные a и b при условии c ?

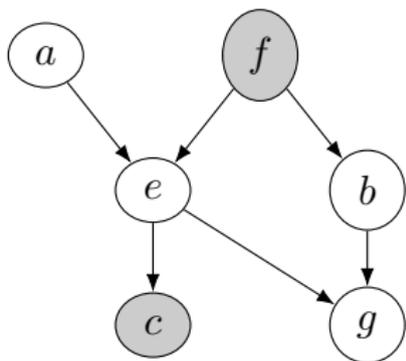
D-separation: продолжение

Рассмотрим две группы переменных A , B и проверим их условную независимость при условии группы переменных C .

D-separation. Группы переменных A и B условно независимы, если все неориентированные пути из A в B заблокированы C .

Путь из вершины a в вершину b называется заблокированным набором вершин C , если выполнено хотя бы одно из условий

- Стрелки на пути встречаются перед-хвост или хвост-хвост в вершине $c \in C$;
- Стрелки на пути встречаются перед-перед в вершине x , такой, что $x \notin C$ и все ее ориентированные потомки $y \notin C$.



Пути из a в b : $a \rightarrow e \rightarrow g \leftarrow b$; $a \rightarrow e \leftarrow f \rightarrow b$.

Вопрос: Независимы ли переменные a и b при условии c, f ?

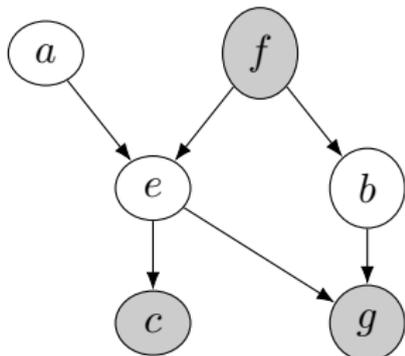
D-separation: продолжение

Рассмотрим две группы переменных A , B и проверим их условную независимость при условии группы переменных C .

D-separation. Группы переменных A и B условно независимы, если все неориентированные пути из A в B заблокированы C .

Путь из вершины a в вершину b называется заблокированным набором вершин C , если выполнено хотя бы одно из условий

- Стрелки на пути встречаются перед-хвост или хвост-хвост в вершине $c \in C$;
- Стрелки на пути встречаются перед-перед в вершине x , такой, что $x \notin C$ и все ее ориентированные потомки $y \notin C$.



Пути из a в b : $a \rightarrow e \rightarrow g \leftarrow b$; $a \rightarrow e \leftarrow f \rightarrow b$.

Вопрос: Независимы ли переменные a и b при условии c, f, g ?

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 359-383.
- 2 Koller, Daphne, and Nir Friedman. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.
- 3 Bacchus, Fahiem, and Adam J. Grove. "Graphical models for preference and utility." arXiv preprint arXiv:1302.4928 (2013).
- 4 Mor, Bhavya, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. "A systematic review of hidden markov models and their applications." Archives of computational methods in engineering 28.3 (2021): 1429-1448.
- 5 Pearl, Judea. Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference. Morgan kaufmann, 1988.
- 6 Pearl, Judea. "Graphical models for probabilistic and causal reasoning." Quantified representation of uncertainty and imprecision (1998): 367-389.